

# ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО В СРЕДНЕМ ДРОБНОГО ПИД-РЕГУЛЯТОРА В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕТОМ

Пантелеев А.В.<sup>1</sup>, Летова Т.А.<sup>2</sup>, Помазуева Е.А.<sup>3</sup>

*(Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет), Москва)*

*Поставлена задача поиска параметров дробного ПИД-регулятора, оптимального на множестве начальных состояний замкнутой системы объект-регулятор и множестве типовых входных воздействий, как задача поиска минимума функции многих переменных. Сформированы порядок решения задачи и соответствующее программное обеспечение. Приведен пример решения поставленной задачи поиска параметров оптимального в среднем дробного ПИД-регулятора для управления движением самолета по углу тангажа.*

**Ключевые слова:** дробный ПИД-регулятор, критерий оптимизации, множество начальных состояний, множество входных воздействий, метод имитации отжига.

## 1. Введение

Использованию дробного интегро-дифференциального исчисления для описания динамики процессов управления посвящено большое число работ [3], в которых обсуждаются вопросы устойчивости, управляемости и качества дробных

---

<sup>1</sup> Андрей Владимирович Пантелеев, доктор физико-математических наук, профессор (avpanteleev@inbox.ru, тел. (499)158-48-11).

<sup>2</sup> Татьяна Александровна Летова, кандидат технических наук, доцент (тел. (495)735-85-08).

<sup>3</sup> Екатерина Александровна Помазуева, студент (kate-420@rambler.ru, тел. (499)492-88-88).

динамических систем. Эти работы условно можно разделить на два класса.

1. Работы, посвященные математическому моделированию и качественному анализу динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями. Так, в [10, 11, 12] сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия устойчивости систем с дробно-степенной передаточной функцией (теорема Матиньона). В [18] проведен анализ поведения интегральной оценки (интеграл от модуля и квадрата ошибки) дробных систем управления, на вход которых подается воздействие в виде ступенчатой функции и сформулированы необходимые и достаточные условия, налагаемые на параметры дробной передаточной функции, при которых может быть обеспечено экспоненциальное затухание ошибки. В [15] рассмотрены вопросы управляемости дробной линейной стационарной системы.

Поиску оптимального управления дробными динамическими системами посвящены работы [3, 7, 14, 16]. В этих работах критерий оптимальности представляет собой функционал, зависящий от переменных состояния и управления, а объект управления описывается системой дробных дифференциальных уравнений. В работе [7] содержатся результаты моделирования дробных управляемых динамических систем и сформированы рекомендации по построению высокоэффективных численных схем.

2. Работы, посвященные формированию дробных ПИД-регуляторов различного типа [3, 8, 10, 13], используемых для управления динамическими системами, описываемыми дифференциальными уравнениями дробного и целого порядка. Работы [3, 10] содержат исследования по применению ПИД-контроллеров для управления динамическими системами. Возможности применения CRONE-контроллеров для обеспечения высокой работоспособности по отношению к вариации коэффициентов передачи управления описаны в [3, 13].

Решение задачи о выборе параметров наиболее сложного  $PI^\lambda D^\mu$ -контроллера, имеющего передаточную функцию:  $W(s) = K + T_i s^{-\lambda} + T_d s^\mu$ , в которой предметом поиска являются

параметры  $K, \mu, \lambda, T_i, T_d$ , описано в [9, 13, 17]. Использование методов многомерной оптимизации для определения параметров  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -контроллера описано в [3]. В работах [3, 8, 13] содержится информация о применении дробных контроллеров для решения практических задач, связанных с управлением роботами, системами водоснабжения и электропитания.

В настоящей работе рассмотрены задачи поиска параметров дробного ПИД-регулятора с конечной памятью, оптимального в среднем на заданном множестве  $\Omega$  начальных состояний системы и множестве  $G$  типовых входных воздействий.

## 2. Общая постановка задачи

Рассматривается замкнутая система «объект – дробный ПИД-регулятор», представленная на рис. 1, в которой:

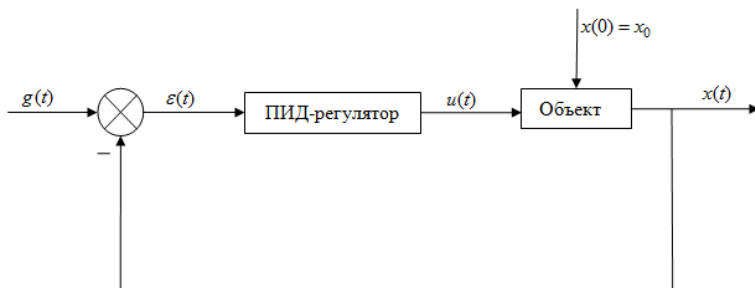


Рис. 1

- математическая модель объекта управления представляется уравнениями возмущенного движения

$$(1) \quad \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0 \in \Omega,$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  – вектор состояния,  $u = (u_1, \dots, u_m)^T, m \leq n$  – вектор управления,  $t$  – время,  $t \in [0, T]$ , момент  $T$  соответствует окончанию процесса,  $f(x, u, t)$  – заданная непрерывная функция;  $x_0$  – начальный вектор состояния;  $\Omega$  – множество начальных состояний;

- $g(t)$  – входное воздействие, принадлежащее множеству  $G$  типовых входных воздействий;

- $\varepsilon(t) = g(t) - x(t)$  – ошибка.

Дробный ПИД-регулятор формирует управляющее воздействие  $u(t)$  на основании ошибки  $\varepsilon(t)$  в виде:

$$(2) \quad u(t) = K_{np} \varepsilon(t) + K_I I_{t-\Delta(t),t}^\alpha \varepsilon(t) + K_D D_0^\beta \varepsilon(t),$$

где

- $K_{np}, K_I, K_D$  – коэффициенты регулятора;

- $I_{t-\Delta(t),t}^\alpha \varepsilon(t)$  – интеграл дробного порядка,

$$\Delta(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \Delta, \\ \Delta, & t \geq \Delta, \end{cases} \quad \text{– «память» регулятора, } t - \Delta(t) \text{ – нижний}$$

предел интегрирования,  $t$  – верхний предел интегрирования,  $\alpha > 0$  – дробный порядок интеграла;

- $D_0^\beta \varepsilon(t)$  – дробная производная,  $\beta > 0$  – дробный порядок производной.

Интеграл дробного порядка может вычисляться:

а) по формуле Грюнвальда-Летникова [1], когда

$$(3) \quad I_{t-\Delta(t),t}^\alpha \varepsilon(t) = h^\alpha \sum_{j=\lceil \frac{t-\Delta(t)}{h} \rceil}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} \varepsilon\left(t - \left(j - \frac{t-\Delta(t)}{h}\right)h\right),$$

где  $[x]$  – целая часть,  $h$  – шаг,  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функция;

б) по формуле Римана-Лиувилля [1]

$$(4) \quad I_{t-\Delta(t),t}^\alpha \varepsilon(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\Delta(t)}^t \frac{\varepsilon(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1.$$

При численной реализации вычисление интеграла в (4) производится по формулам прямоугольников и трапеций.

Дробная производная может быть вычислена:

а) по формуле Грюнвальда-Летникова

$$(5) \quad D_0^\beta \varepsilon(t) = h^\beta \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^j \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta-j+1)} \varepsilon(t - j \cdot \varepsilon(t - jh)),$$

где  $\beta > 0$  – порядок дробной производной;

б) по формуле Гёльдера [14]

$$(6) \quad D_0^\beta \varepsilon(t) = \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-h)}{h^\beta}.$$

Структура дробного ПИД-регулятора в отличие от рассмотренной в [1] учитывает «память» системы, так как вычисление интеграла осуществляется не с начального момента времени до текущего значения  $t$ , а с момента  $t - \Delta(t)$  до  $t$ .

Будем в дальнейшем обозначать дробный ПИД-регулятор, реализующий закон (2), ПИ $_{\alpha}D_{\beta}$ -регулятором [1].

Предположим, что в задаче стабилизации замкнутая система объект – ПИ $_{\alpha}D_{\beta}$ -регулятор подвергается следующим воздействиям:

- возможные начальные состояния  $x(0) = x_0$ ,  $x_0 \in \Omega$ , где  $\Omega$  – множество возможных начальных состояний, в котором выбирается  $p$  характерных начальных состояний  $x_0^k, k = 1, \dots, p$ ;

- пробные типовые входные воздействия  $g_1(t), \dots, g_N(t)$ , образующие множество входных воздействий  $G$ , где  $N$  – заданное целое число.

Будем искать значения параметров  $K_{np}, K_I, K_D, \alpha, \beta$  ПИ $_{\alpha}D_{\beta}$ -регулятора, оптимизируя критерий качества управления  $J$ , формируя его по следующему правилу, содержащему три этапа.

1. Интегральную ошибку на интервале  $[0, T]$  при заданном входном воздействии  $g_j(t), j = 1, \dots, N$  и фиксированном начальном состоянии  $x(0) = x_0$  будем оценивать величиной

$$I^j(x_0) = \int_0^T \varepsilon^2(t) dt, \quad j = 1, \dots, N.$$

2. Средняя интегральная ошибка  $J^j$  на множестве  $\Omega$  возможных начальных состояний при заданном входном воздействии  $g_j(t), j = 1, \dots, N$  равна

$$J^j = \frac{\int I^j(x_0) dx_0}{mes \Omega}, \quad j = 1, \dots, N,$$

где  $mes\Omega$  – мера множества  $\Omega$ .

3. Среднюю интегральную ошибку  $J$  на множестве  $G$  всех  $N$  пробных типовых входных воздействий и множестве возможных начальных состояний найдем по формуле

$$(7) \quad J(K_{np}, K_I, K_D, \alpha, \beta) = \frac{\sum_{j=1}^N J^j}{N}.$$

Замечание.

1. В частном случае можно считать, что множество  $\Omega$  возможных начальных состояний задается параллелепипедом со сторонами, параллельными координатным осям. По каждой из координат задается равномерная сетка с некоторым шагом. В результате множество  $\Omega$  представляется объединением  $p$  непересекающихся элементарных подмножеств  $\Omega_j, j=1, \dots, p$ . Координатами центра каждого из подмножеств  $\Omega_j$  определяется начальное состояние  $x_0^k, k=1, \dots, p$ . Тогда

$$\int_{\Omega} I^j(x_0) dx_0 \cong \sum_{k=1}^p I^j(x_0^k) mes\Omega_k,$$

где  $mes\Omega_k$  – мера элементарного подмножества (объем).

В результате имеем

$$J^j \cong \frac{\sum_{k=1}^p I^j(x_0^k) mes\Omega_k}{mes\Omega} = \frac{\sum_{k=1}^p I^j(x_0^k)}{p}.$$

2. Значение критерия (7) характеризует поведение пучка траекторий, исходящего из множества начальных состояний  $\Omega$ , при входных воздействиях из множества  $G$ .

Требуется при заданном множестве начальных состояний  $\Omega$  и множестве  $G$  входных воздействий  $g(t)$  определить параметры  $K_{np}, K_I, K_D, \alpha, \beta$  дробного ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятора из условия минимума критерия  $J$ , т.е. среди всех возможных значений  $K_{np}, K_I, K_D, \alpha, \beta$  ( $\alpha > 0, \beta > 0$ ) требуется найти такие

$K_{np}^*, K_I^*, K_D^*, \alpha^*, \beta^*$ , при которых критерий  $J$  принимает наименьшее значение:

$$J^* = \min_{K_{np}, K_I, K_D, \alpha, \beta} J(K_{np}, K_I, K_D, \alpha, \beta).$$

Искомый дробный ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятор с параметрами  $K_{np}^*, K_I^*, K_D^*, \alpha^*, \beta^*$  будем называть оптимальным в среднем, поскольку при вычислении значения критерия  $J$  производится осреднение значений функционала  $I^j(x_0)$  по множествам  $\Omega$  и  $G$ .

Поставленная задача представляет собой задачу минимизации функции  $J(K_{np}, K_I, K_D, \alpha, \beta)$ , которая может быть решена с использованием одного из численных методов. В работе используются два метода оптимизации нулевого порядка: метод адаптивного случайного поиска [4] и метод имитации отжига, относящийся к метаэвристическим методам поиска глобального экстремума [6].

### **3. Порядок решения задачи**

1. Сформировать на множестве  $\Omega$  множество характерных начальных состояний  $x_0^k, k = 1, \dots, p$ .
2. Сформировать  $N$  пробных типовых входных воздействий  $g_j(t), j = 1, \dots, N$  (множество  $G$ ).
3. Выбрать формулы для вычисления дробного интеграла и производной (табл. 1).

Таблица 1.

№	Формулы, используемые для вычисления дробного интеграла и дробной производной
1.	- Интеграл вычисляется по формуле Грюнвальда-Летникова. - Производная вычисляется по формуле Грюнвальда-Летникова.
2.	- Интеграл вычисляется по формуле Грюнвальда-Летникова. - Производная вычисляется по формуле Гёльдера.
3.	- Интеграл Римана-Лиувилля по формуле прямоугольников. - Производная вычисляется по формуле Грюнвальда-Летникова.
4.	- Интеграл Римана-Лиувилля по формуле прямоугольников. - Производная вычисляется по формуле Гёльдера.
5.	- Интеграл Римана-Лиувилля по формуле трапеций. - Производная вычисляется по формуле Грюнвальда-Летникова.
6.	- Интеграл Римана-Лиувилля по формуле трапеций. - Производная вычисляется по формуле Гёльдера.

4. Задать пробные начальные значения  $K_{np}^0, K_I^0, K_D^0, \alpha^0, \beta^0$  параметров ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятора, при которых замкнутая система «объект – ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятор» будет устойчива (рекомендуется), и:

а) проинтегрировать с использованием численных методов уравнения замкнутой системы объект-регулятор, где  $\dot{x} = f(x(t), u(t), t), x(0) = x_0^k, u(t) = K_{np}\varepsilon(t) + K_I I_{t-\Delta(t), t}^{\alpha} \varepsilon(t) + K_D D_0^{\beta} \varepsilon(t)$  на интервале  $[0, T]$  для  $x_0^k, k = 1, \dots, p, g_j(t), j = 1, \dots, N$ ;

б) вычислить значения интегральной ошибки  $I^j(x_0^k), j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, p$ ;

в) вычислить значения средней интегральной ошибки



$$J^j = \frac{\sum_{k=1}^p I^j(x_0^k)}{p}, j = 1, \dots, N;$$

г) вычислить значение критерия

$$J^0 = \frac{\sum_{j=1}^N J^j}{N} = J(K_{np}^0, K_I^0, K_D^0, \alpha^0, \beta^0).$$

5. Задать начальные значения параметров метода адаптивного случайного поиска: коэффициент сжатия  $0 < \theta < 1$ , коэффициент растяжения  $\alpha p > 1$ ,  $M$  – максимальное число выполненных испытаний на текущей итерации,  $h_0$  – начальную величину шага,  $R$  – минимальную величину шага,  $\nu$  – максимальное количество итераций. Решить задачу поиска минимума  $J(K_{np}, K_I, K_D, \alpha, \beta)$  методом адаптивного случайного поиска [4]. Для подсчета критерия  $J$  использовать операции а) – г) на шаге 4. Результатом решения задачи будут параметры  $\tilde{K}_{np}, \tilde{K}_I, \tilde{K}_D, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ , соответствующие (с заданной точностью) точке минимума критерия  $J$ .

6. Задать начальные значения глобального параметра  $T_0$  (температура), параметра закона распределения Больцмана  $c > 0$ , параметра  $\gamma \in [0.8, 0.99]$  и максимальное число итераций  $\nu$ . Решить задачу поиска глобального минимума критерия  $J$  методом имитации отжига [6], положив в качестве начальных значений искомым параметров значения  $\tilde{K}_{np}, \tilde{K}_I, \tilde{K}_D, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ .

#### 4. Пример

Рассмотрим в качестве примера задачу управления самолетом по углу тангажа в режиме горизонтального полета. Уравнения возмущенного движения самолета в режиме горизонтального полета имеют вид [2]:

$$(8) \quad \begin{cases} (p + n_{22})\alpha - p\vartheta = 0, \\ (n_0 p + n_{32})\alpha + (p^2 + n_{33}p)\vartheta = -n_b \delta_b, \end{cases}$$

где  $\alpha$  – отклонение угла атаки,  $\mathcal{G}$  – отклонение угла тангажа,  $\delta_b$  – отклонение руля высоты,  $p = \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования.

Будем в дальнейшем записывать систему (8) в нормальной форме Коши, обозначив  $x_1 = \alpha, x_2 = \mathcal{G}, x_3 = \dot{\mathcal{G}}$ . Тогда имеем

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -n_{22}x_1 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = (n_0 n_{22} - n_{32})x_1 - (n_0 + n_{33})x_3 - n_b \delta_b. \end{cases}$$

Управление самолетом по углу тангажа ( $\mathcal{G} = x_2$ ) осуществляется ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятором, формирующим отклонение руля высоты  $\delta_b(t)$  по закону

$$(10) \quad \delta_b(t) = K_{np1}(x_{2\text{зад}}^j - x_2(t)) + K_{np2}x_3(t) + K_I I_{t-\Delta(t),t}^{\alpha}(x_{2\text{зад}}^j - x_2(t)) + K_D D_0^{\beta} x_3(t),$$

где  $x_{2\text{зад}}^j$  – желаемое значение угла тангажа,  $j=1, \dots, N$ ; здесь учитывается, что  $x_{3\text{зад}}^j = 0$  – желаемое значение скорости изменения угла тангажа, вектор начальных состояний  $x_0^k = (x_{10}^k, x_{20}^k, x_{30}^k)^T, k=1, \dots, p$ .

Значения  $x_{2\text{зад}}^j, x_{3\text{зад}}^j = 0$  определяют постоянные входные воздействия на замкнутую систему:  $g_2(t) = x_2^j(t) = x_{2\text{зад}}^j, g_3(t) = x_3^j(t) = x_{3\text{зад}}^j = 0, j=1, \dots, p$ .

Критерии  $I^j(x_0^k), J^j, J$  имеют вид:

$$I^j(x_{10}^k, x_{20}^k, x_{30}^k) = \int_0^T (x_{2\text{зад}}^j - x_2(t))^2 dt, j=1, \dots, N;$$

$$J^j = \frac{\sum_{k=1}^p I^j(x_{10}^k, x_{20}^k, x_{30}^k)}{p}, j=1, \dots, N;$$

$$J = \frac{\sum_{j=1}^N J^j}{N}.$$

При формировании критерия  $J^j$  предполагалось, что множество  $\Omega$  возможных начальных состояний по координатам  $x_1, x_2, x_3$  ( $\alpha, \vartheta, \dot{\vartheta}$ ) задается параллелепипедом с заданными сторонами, который содержит в себе  $p$  элементарных параллелепипедов. За точку  $(x_{10}^k, x_{20}^k, x_{30}^k)^T$  берется центральная внутренняя точка элементарного параллелепипеда.

Для решения задачи поиска минимума функции  $J(K_{np1}, K_{np2}, K_I, K_D, \alpha, \beta)$  на множестве  $\Omega$  начальных состояний  $x_{10}, x_{20}, x_{30}$  и множестве входных воздействий  $x_{2зад}^j(t), j = 1, \dots, N$  разработана программа на языке C#, имеющая модульную структуру, которая позволяет осуществлять решение задачи для различных способов вычисления дробного интеграла и дробной производной (табл. 1).

Работа с программой начинается с задания коэффициентов уравнений возмущенного движения (9), которые могут быть либо введены вручную, либо перенесены автоматически из предварительно заполненной таблицы (табл. 2) [2] в соответствии с типом самолета (легкий, тяжелый) в ходе ответа на вопрос «Выберите тип самолета» (рис. 2).

Таблица 2

Коэффициенты	Легкий самолет, Н = 15 км	Тяжелый самолет, Н = 8 км
$n_0$	0,7	1,17
$n_{22}$	2,5	3
$n_{32}$	16	42
$n_{33}$	2,2	2,5
$n_b$	100	28

Задаются границы параллелепипеда, определяющие множество  $\Omega$  возможных начальных состояний, начальные значения  $x_1, x_2, x_3$  (угла атаки, угла тангажа и скорости изменения угла тангажа), начальное входное воздействие  $g(t) \in G, G = \{g(t) : g(t) = x_{2зад}(t) = \rho \cdot I(t), 0 \leq \rho \leq 1\}$ , значение  $\Delta$ .

Задайте границы множества возможных начальных состояний

Угол атаки [  ;  ]

Угол тангажа [  ;  ]

Скорость изменения угла тангажа [  ;  ]

Задайте границы множества входных воздействий [  ;  ]

Задайте предельное время интегрирования

Задайте значение  $\alpha$        Задайте значение  $\Delta$

Задайте значение  $\beta$

Выберите тип самолета

Задайте начальные параметры управления

$K_{np1} =$

$K_{np2} =$

$K_I =$

$K_D =$

Задайте начальное состояние из множества возможных начальных состояний

Задайте значение угла атаки

Задайте значение угла тангажа

Задайте значение скорости изменения угла тангажа

Задайте значение входного воздействия

Задайте время наблюдения переходного процесса

Выбрать формулы, по которым будут вычисляться дробная производная и дробный интеграл

Проинтегрировать систему уравнений при заданном начальном состоянии и вычислить критерий J

Рис. 2

Затем следует выбрать формулы (рис. 3) для вычисления дробного интеграла и дробной производной в соответствии с табл. 1 и перейти к заданию начальных значений параметров ПИ $_{\alpha\Delta\beta}$ -регулятора (рис. 2).

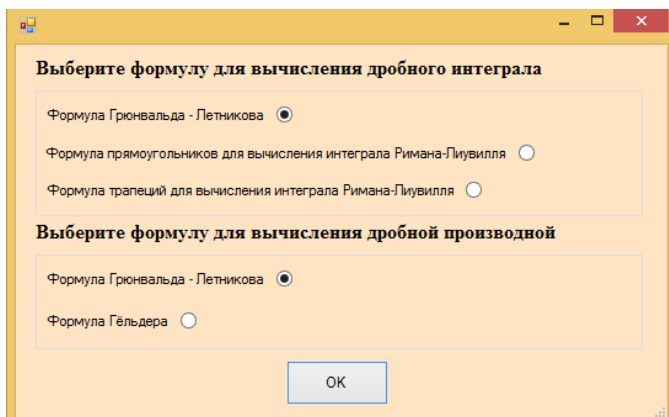


Рис. 3

Начальные значения искоемых параметров  $\text{ПИ}_{\alpha\text{Д}\beta}$ -регулятора задаются на основании предварительных испытаний замкнутой системы объект –  $\text{ПИ}_{\alpha\text{Д}\beta}$ -регулятор на устойчивость, которые можно провести, интегрируя уравнения (9), (10) (рис. 2).

Интегрирование уравнений системы стабилизации (9), (10) осуществляется методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом  $h = 0,01$ . Результат интегрирования системы приведен на рис. 4.

Интегрирование системы (9), (10) осуществляется многократно с учетом множества  $\Omega$  начальных состояний системы и множества  $G$  типовых входных воздействий  $g(t)$ . В процессе интегрирования вычисляются критерии  $I^j(x_0^k), J^j, J$ . Начальное значение критерия  $J^0 = 0,1634$ , а также переходные процессы для заданного начального состояния из множества  $\Omega$  и входного воздействия  $x_{2\text{зад}} = 1$  из множества  $G$ , приведены на рис. 4.

Тип самолета - Легкий самолет,  $N = 15$

Начальное состояние

Угол атаки = 0.1

Угол тангажа = 0.05

Скорость изменения угла тангажа = 0.05

Входное воздействие = 1

Начальные параметры управления

$K_{\text{угл}} = -1$

$K_{\text{угр}} = 1$

$K_i = -1$

$K_D = 0$

$\alpha = 0.9$

$\beta = 1$

$J = 0.1634340650527$

Для решения задачи оптимизации:

$J \rightarrow \min$

задайте параметры метода адаптивного случайного поиска

Посмотреть описание параметров адаптивного случайного поиска

$h_0 = 2$   $\theta = 0.8$

$M = 10$   $qr = 1.2$

$R = 0.01$   $v = 50$

Решить задачу оптимизации методом адаптивного случайного поиска

### Результат интегрирования системы уравнений при заданном начальном состоянии

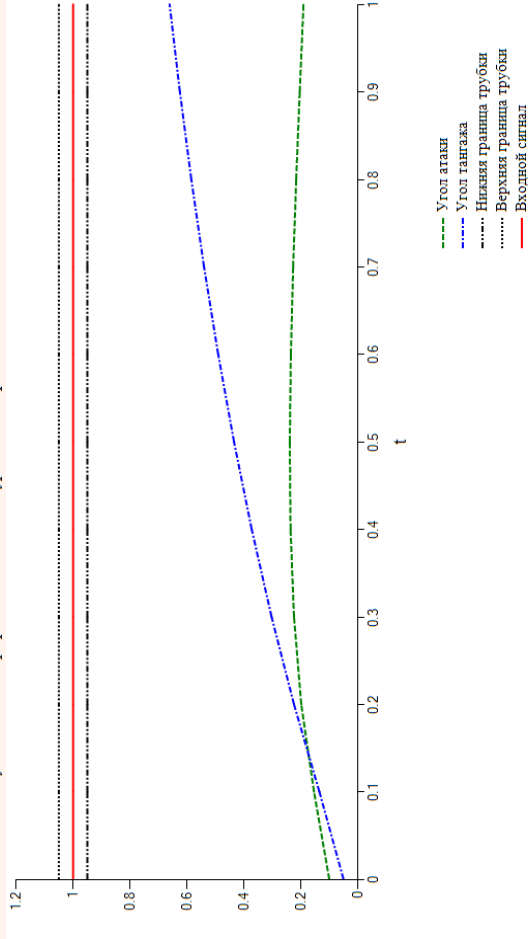


Рис. 4

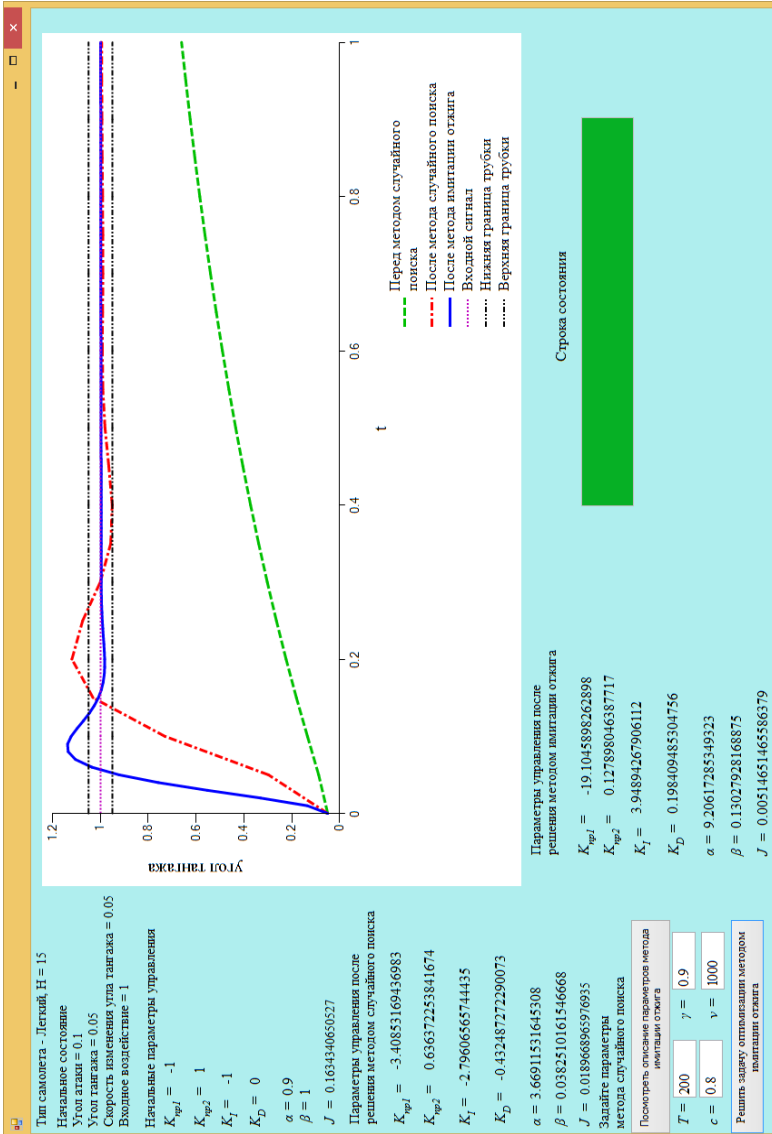


Рис. 5

Решение задачи оптимизации осуществляется в два этапа.

На первом этапе используется метод адаптивного случайного поиска. Для его реализации следует задать параметры метода (рис. 4). Решение задачи оптимизации позволяет определить значения параметров ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятора, соответствующие с заданной точностью точке минимума критерия  $J$  и построить графики переходного процесса по регулируемой координате – углу тангажа (рис. 5).

Такое построение можно осуществлять для любого (из числа заданных) возможного начального состояния и входного воздействия  $g(t)$  из заданного множества  $G$ . Если качество переходного процесса будет удовлетворять предъявленным техническим требованиям, то дальнейший поиск можно прекратить.

На втором этапе осуществляется поиск глобального минимума методом имитации отжига. Для его реализации следует задать параметры метода (рис. 5). Результатом решения будут значения параметров  $K_{np1}, K_{np2}, K_I, K_D, \alpha, \beta$  ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятора и минимальное значение  $J^*$  функции  $J$ . На рис. 5 представлен переходной процесс по углу тангажа, соответствующий этим параметрам.

На базе разработанной программы были проведены расчеты оптимальных параметров ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятора с использованием всех приведенных (табл. 1) формул для вычисления дробного интеграла и дробной производной для двух типов самолетов (легкого и тяжелого) при различных значениях  $\Delta$ . Настройки ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятора и средние по пучку траекторий показатели качества переходного процесса по углу тангажа для легкого и тяжелого самолета ( $\sigma$  – перерегулирование и  $t_p$  – время переходного процесса) приведены в табл. 3-10 для всех наборов формул из табл. 1. Настройки ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятора получены в результате решения задачи оптимизации методом имитации отжига, а формулы для вычисления дробного интеграла Римана-Лиувилля методом прямоугольников и трапеций соответственно имеют вид:



$$I^\alpha \varepsilon(t) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=\left[\frac{t-\Delta(t)}{h}\right]}^{\left[\frac{t-1}{h}\right]} \frac{\varepsilon(tj)}{(n-j)^{1-\alpha}}, 0 < \alpha < 1,$$

$$I^\alpha \varepsilon(t) = \frac{h^\alpha}{2\Gamma(\alpha)} \sum_{j=\left[\frac{t-\Delta(t)}{h}\right]}^{\left[\frac{t-1}{h}\right]} \frac{\varepsilon(tj) + \varepsilon(t(j+1))}{(n-j)^{1-\alpha}}, 0 < \alpha < 1, n = \left[\frac{t}{h}\right].$$

Таблица 3. Настройки ПИ<sub>α</sub>Д<sub>β</sub>-регулятора для легкого самолета при Δ = 0,1

№	K <sub>np1</sub>	K <sub>np2</sub>	K <sub>D</sub>	K <sub>I</sub>	α	β
1	-19,104	0,127	0,198	3,948	9,206	0,130
2	-11,370	1,172	-0,940	-19,084	0,181	0,086
3	-22,074	-0,117	1	-28,878	0,623	0,020
4	-61,687	1,513	-0,075	-39,706	0,134	0,253
5	-11,368	0,583	-0,074	-5,655	0,292	0,328
6	-29,987	0,557	-0,017	14,450	0,401	0,766

Таблица 4. Настройки ПИ<sub>α</sub>Д<sub>β</sub>-регулятора для легкого самолета при Δ = 0,2

№	K <sub>np1</sub>	K <sub>np2</sub>	K <sub>D</sub>	K <sub>I</sub>	α	β
1	-9,02	0,838	-0,301	-32,107	3,835	0,221
2	-12,41	0,454	-0,246	-22,941	13,983	0,163
3	-7,22	0,081	0,047	-7,838	0,814	0,351
4	-19,18	0,509	0,047	-4,759	0,937	0,131
5	-6,69	0,048	0,314	-0,087	0,401	0,108
6	-17,36	2,760	-22,320	-14,079	0,404	0,298

Таблица 5. Показатели качества переходного процесса по углу тангажа для легкого самолета при  $\Delta = 0,1$

№	$\sigma$ , %	$t_p$ , с	$J$
1	10,6	0,09	0,0051
2	1,38	0,14	0,0083
3	5,1	0,08	0,0056
4	4,1	0,04	0,0026
5	6,7	0,08	0,0079
6	10,9	0,77	0,0034

Таблица 6. Показатели качества переходного процесса по углу тангажа для легкого самолета при  $\Delta = 0,2$

№	$\sigma$ , %	$t_p$ , с	$J$
1	6	0,16	0,0099
2	0	0,06	0,0066
3	21,8	0,28	0,0143
4	7,4	0,08	0,0057
5	0,8	0,12	0,0144
6	0	0,33	0,0132

Таблица 7. Настройки ПИ <sub>$\alpha$</sub> Д <sub>$\beta$</sub> -регулятора для тяжелого самолета при  $\Delta = 0,1$

№	$K_{np1}$	$K_{np2}$	$K_D$	$K_I$	$\alpha$	$\beta$
1	-60,49	2,075	-0,679	9,956	64,360	0,220
2	-25,07	1,477	1,314	55,257	16,573	0,189
3	-21,64	3,850	-3,596	41,665	0,106	0,013
4	-15,39	0,755	-0,486	-35,079	0,584	0,390
5	-162,28	8,773	-4,122	-43,444	0,758	0,016
6	-18,66	0,626	-0,969	-2,044	0,444	0,028

Таблица 8. Настройки ПИ <sub>$\alpha$</sub> Д <sub>$\beta$</sub> -регулятора для тяжелого самолета при  $\Delta = 0,2$

№	$K_{np1}$	$K_{np2}$	$K_D$	$K_I$	$\alpha$	$\beta$
1	-53,68	-1,013	1,960	21,003	30,790	0,108
2	-26,66	1,429	0,029	-75,245	37,492	0,982
3	-10,36	-8,926	8,929	1,055	0,217	0,008
4	-8,77	0,266	-1,179	-0,700	0,227	0,151
5	-4,82	0,663	-0,102	-3,214	0,493	0,614
6	-68,10	5,509	-0,963	-15,304	0,461	0,339

Таблица 9. Показатели качества переходного процесса по углу тангажа для тяжелого самолета при  $\Delta = 0,1$

№	$\sigma$ , %	$t_p$ , с	$J$
1	21,2	0,21	0,0081
2	3	0,11	0,0165
3	10,7	0,24	0,0153
4	11,7	0,13	0,0103
5	2,6	0,06	0,0053
6	8	0,15	0,0114

Таблица 10. Показатели качества переходного процесса по углу тангажа для тяжелого самолета при  $\Delta = 0,2$

№	$\sigma$ , %	$t_p$ , с	$J$
1	6,8	0,09	0,0062
2	3,7	0,11	0,0151
3	5,6	0,19	0,0092
4	11,8	0,29	0,0156
5	0	0,35	0,0258
6	0	0,15	0,0120

На рис. 6, 7 приведены переходные процессы по углу тангажа для легкого и тяжелого самолетов при  $\Delta = 0,1$ , а производная и интеграл вычисляются по формуле Грюнвальда-Летникова.

На рис. 8, 9 приведены переходные процессы по углу тангажа для легкого и тяжелого самолетов при  $\Delta = 0,1$ , когда для вычисления интеграла Римана-Лиувилля используется формула трапеций, а дробная производная вычисляется по формуле Грюнвальда-Летникова.

Легко видеть, что использование интеграла Римана-Лиувилля при одной и той же формуле вычисления дробной производной позволяет значительно уменьшить перерегулирование.

Сравнение результатов моделирования для обоих типов самолетов при использовании обобщенного ПИД-регулятора [5] и ПИ $_{\alpha}D_{\beta}$ -регулятора при одном и том же значении  $\Delta$  говорит о том, что использование ПИ $_{\alpha}D_{\beta}$ -регулятора позволяет снизить значение критерия  $J$  на порядок.

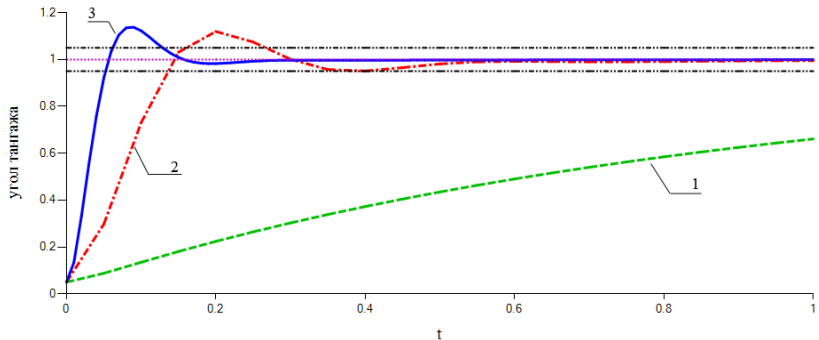


Рис. 6. Переходные процессы по углу тангажа получены: 1 – для исходных значений  $K_{np1} = -1, K_{np2} = 1, K_I = -1, K_D = 0, \alpha = 0,9, \beta = 1$ ; 2 – в результате оптимизации параметров ПИ<sub>α</sub>Д<sub>β</sub>-регулятора методом адаптивного случайного поиска; 3 – в результате оптимизации параметров ПИ<sub>α</sub>Д<sub>β</sub>-регулятора методом имитации отжига

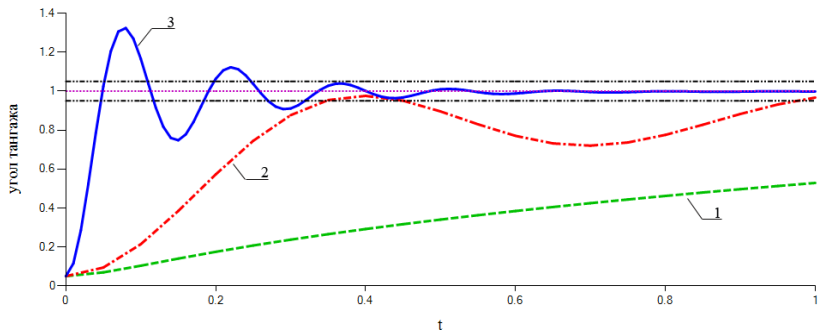


Рис. 7. Переходные процессы по углу тангажа получены: 1 – для исходных значений  $K_{np1} = -1, K_{np2} = 1, K_I = -1, K_D = 0, \alpha = 0,9, \beta = 1$ ; 2 – в результате оптимизации параметров ПИ<sub>α</sub>Д<sub>β</sub>-регулятора методом адаптивного случайного поиска; 3 – в результате оптимизации параметров ПИ<sub>α</sub>Д<sub>β</sub>-регулятора методом имитации отжига

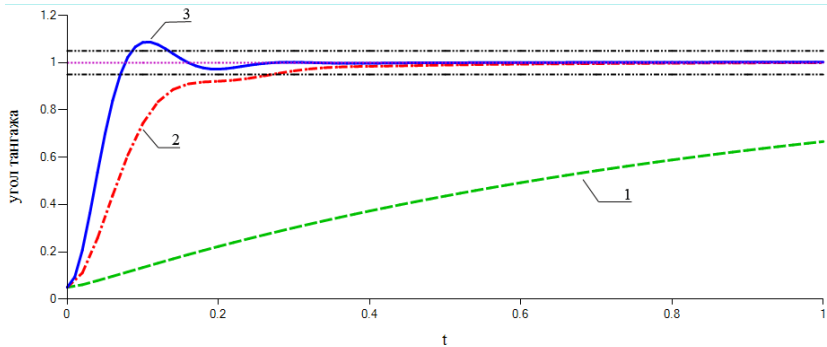


Рис. 8. Переходные процессы по углу тангажа получены: 1 – для исходных значений  $K_{np1} = -1, K_{np2} = 1, K_I = -1, K_D = 0, \alpha = 0,9$ ,  $\beta = 1$ ; 2 – в результате оптимизации параметров  $ПИ_{\alpha}Д_{\beta}$ -регулятора методом адаптивного случайного поиска; 3 – в результате оптимизации параметров  $ПИ_{\alpha}Д_{\beta}$ -регулятора методом имитации отжига

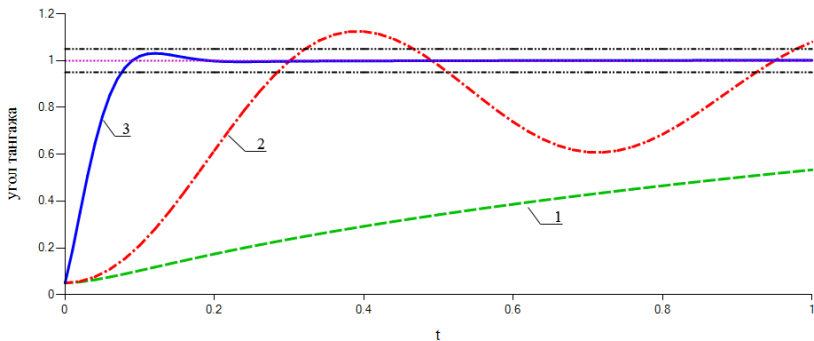


Рис. 9. Переходные процессы по углу тангажа получены: 1 – для исходных значений  $K_{np1} = -1, K_{np2} = 1, K_I = -1, K_D = 0, \alpha = 0,9$ ,  $\beta = 1$ ; 2 – в результате оптимизации параметров  $ПИ_{\alpha}Д_{\beta}$ -регулятора методом адаптивного случайного поиска; 3 – в результате оптимизации параметров  $ПИ_{\alpha}Д_{\beta}$ -регулятора методом имитации отжига

## 5. Выводы

1. Поставлена задача о параметрическом синтезе оптимального в среднем дробного ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятора на заданном множестве  $\Omega$  начальных состояний системы и множестве  $G$  возможных входных воздействий  $g(t)$  с учетом памяти регулятора  $\Delta(t)$ .

2. Поставленная задача сформулирована как задача минимизации функции многих переменных  $J(K_{np}, K_I, K_D, \alpha, \beta)$ .

3. Предложен порядок решения задачи, позволяющий найти минимум критерия  $J$  с использованием методов адаптивного случайного поиска и метода имитации отжига.

4. Разработано программное обеспечение, поддерживающее предложенный порядок решения задачи.

5. Приведен пример решения задачи поиска параметров оптимального в среднем дробного ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятора для управления самолетом по углу тангажа в режиме горизонтального полета.

6. Настройки дробного ПИ $_{\alpha}$ Д $_{\beta}$ -регулятора в задаче управления самолетом по углу тангажа позволяют на порядок снизить оптимальное значение критерия  $J$  по сравнению с его значениями в случае обобщенного ПИД-регулятора [5].

## Литература

1. Авсиевич А.В., Авсиевич В.В. Моделирование систем автоматического управления с дробным ПИД-регулятором // Вестник Самарского государственного технического университета, сер. техническое науки. – 2010. – №1(26). – С. 6-59.

2. Боднер В.А., Теория автоматического управления полетом. – М.: Наука, 1961. – 698 с.

3. Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 5. – С. 3-34.

4. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высшая шк., 2008. – 544 с.
5. Пантелеев А.В., Летова Т.А., Помазуева Е.А. Применение методов глобальной оптимизации для параметрического синтеза обобщенного пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора в задаче управления полетом // Труды МАИ. . – 2015. – № 79. – 23 с.
6. Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В., Алешина Е.А. Методы глобальной оптимизации. Метаэвристические стратегии и алгоритмы. – М.: Вузовская книга, 2013. – 244 с.
7. Cai X., Liu f. Numerical Simulation of the Fractional-Order Control System // J. Appl. Math. Comp. 2007. V. 23. No. 1-2. P. 229-241.
8. Caponetto R., Dongola G., Fortuna L., Petras I. Fractional Order Systems. Modelling and Control Applications. Singapore: World Scientific, 2010.
9. Castillo F.J., Feliu V., Rivas R., Sanchelz L. Desing of a Class of Fractional Controlles from Fraquency Spetifications with Guaranteed Time Domane Behavior // Comput. Math. Appr. 2010. V. 50. P. 1656-1666.
10. Chen Y.Q., Petras I., Xue D. Fractional Order Control – A Tutorial // Proc. 1009 Amer. Control Conf. St. Louis, 2009. P. 1397-1411.
11. Harley T.T., Lorenzo C.F. Dynamics and Control of Initialized Fractional-Order Systems // Nonlin. Dyn. 2002. V. 29. No. 1-4. P. 201-233.
12. Matingnon D. Stability Properties for Generalized Fractional Differential Systems // Proc. Colloq. Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications. V. 5. Paris, 1998. P. 145-158
13. Monje C.A., Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue D., et al. Fractional-Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications. London: Springer-Verlag, 2010.
14. Mophou G.M. Optimal Control of Fractional Diffusion Equation //Comput. Math. Appl. 2011. V. 61. P. 68-78.
15. Mozyrska D., Torres D.F.M. Modified Optimal Energy and Initial Memory of Fractional Continuous-Time Linear Systems // Signal Proc. 2011. V. 91. P. 379-385.

16. Özdemir N., Karadeniz D., İskender B.B. Fractional Optimal Control Problem of a Distributed System in Cylindrical Coordinates // *Phis. Lett. A*. 2009. V. 373. P. 221-226.
17. Padula F., Visioli A. Tuning Rules for Optimal PID and Fractional-Order PID Controlles // *J. Proc. Contr.* 2011. V. 21. P. 69-81.
18. Tavazoei M.S. Notes on Integral Performance Indices in Fractional-Order Control Systems // *J. Proc. Contr.* 2010. V. 20. P. 285-291.



## **PARAMETRIC SYNTHESIS OF OPTIMAL ON AVERAGE FRACTIONAL PID-CONTROLLER IN THE PROBLEM OF FLIGHT CONTROL**

**Andrey Pantelev**, Moscow Aviation Institute, Moscow, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor (avpantelev@inbox.ru, (499)158-48-11).

**Tatiana Letova**, Moscow Aviation Institute, Moscow, Candidate of Engineering Sciences, associate professor ((495)735-85-08).

**Ekaterina Pomazueva**, Moscow Aviation Institute, Moscow, student (kate-420@rambler.ru, (499)492-88-88).

*Abstract: Tasked the problem of search parameters of fractional PID-controller, optimal on the set of initial states of a closed system object-controller and on the set of typical input actions, as the problem of finding the minimum of a function of several variables. Formed by order of solving the problem and the appropriate software. An example of the problem solution of finding the optimal on the average parameters of fractional PID controller to control the movement of the aircraft on the corner of the pitch.*

**Keywords:** fractional PID-controller, optimization criterion, set of initial states, set of input signals, simulated annealing method.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии \_\_\_\_\_*

*Поступила в редакцию \_\_\_\_\_  
Опубликована \_\_\_\_\_*