

УДК 519.712

ББК 22.18

## УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ<sup>1</sup>

**Плотников С.А.**<sup>2</sup>,

*(Кафедра Теоретической Кибернетики, Санкт-Петербургский  
Государственный Университет, Санкт-Петербург)*

**Фрадков А.Л.**<sup>3</sup>

*(Кафедра Теоретической Кибернетики, Санкт-Петербургский  
Государственный Университет, Санкт-Петербург. Институт  
Проблем Машиноведения РАН, Санкт-Петербург)*

*В статье рассматривается применение алгоритма скоростного градиента для управления колебаниями линейной системы с несколькими степенями свободы на примере одноосного вибрационного гироскопа. Для определения цели управления вводятся функционалы энергии для отдельных степеней свободы, и ставится задача о достижении желаемых уровней энергии для этих функционалов. К дифференциальным уравнениям гироскопа с введенными частными функционалами применен алгоритм скоростного градиента, при этом доказано достижение цели управления. Также для данной системы оценены индексы возбудимости — величины, характеризующие возможность увеличения энергии системы за счет ограниченного управления.*

**Ключевые слова:** управление колебаниями, алгоритм скоростного градиента, индексы возбудимости.

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФ, грант 14-29-00142.

<sup>2</sup> Сергей Александрович Плотников, аспирант, (waterwalf@gmail.com).

<sup>3</sup> Александр Львович Фрадков, доктор технических наук, профессор (fradkov@mail.ru).

## **Введение**

В прикладных исследованиях часто возникают задачи управления, в которых важным аспектом является сбережение энергии. Поэтому для уменьшения энергозатрат желательно использовать малое или ограниченное управление. Для достижения соответствующих целей находит применение алгоритм скоростного градиента [5, 6, 2], который позволяет управлять энергией систем при использовании сколь угодно малого управления при отсутствии диссипации, а также ограниченного управления при ее наличии. Этот алгоритм подходит для решения подобного рода задач. Он успешно применяется для управления линейными и нелинейными колебательными системами [1, 9], в задачах адаптивного управления [16], а также для обеспечения синхронизации в сетях из динамических систем [12, 14, 15, 16]. Однако в существующих работах рассматривается управление колебаниями систем осцилляторов при помощи скалярного управления. Поэтому представляет интерес применение алгоритма скоростного градиента для управления колебаниями систем дифференциальных уравнений с несколькими степенями свободы. Будем считать, что число управлений совпадает с числом степеней свободы системы.

Вибрационный гироскоп является примером системы дифференциальных уравнений с двумя степенями свободы [4, 8]. При этом уравнения описывающие динамику гироскопа не являются независимыми. Поэтому данный пример хорошо подходит для исследования возможностей применения алгоритма скоростного градиента к системе с несколькими степенями свободы.

В статье рассматривается применение алгоритма скоростного градиента для управления колебаниями линейной системы с несколькими степенями свободы на примере одноосного вибрационного гироскопа. Статья организована следующим образом: В разделе 1 вводятся функционалы энергии для каждой из степеней свободы. Они необходимы для постановки цели управления, которая, в свою очередь, формулируется в разделе 2. Также в этом

разделе описывается применение алгоритма скоростного градиента к дифференциальным уравнениям гироскопа с введенными частными функционалами. Задача разбивается на три случая:

- 1) Возбуждение колебаний с заданными энергиями по двум из осей координат (см. подраздел 2.1).
- 2) Подавление колебаний по оси  $Ox$  (см. подраздел 2.2).
- 3) Подавление колебаний по оси  $Oy$  (см. подраздел 2.3).

При этом доказывается достижение цели управления для каждого из трех случаев. В разделе 3 для данной системы оцениваются индексы возбудимости — величины, характеризующие возможность увеличения энергии системы за счет ограниченного управления. Моделирование работы полученного алгоритма представлено в разделе 4. Наконец, последний раздел статьи 5 — заключение.

## **1. Уравнения модели**

Существует большое количество моделей вибрационного гироскопа [4, 8]. Будем рассматривать модель одноосного вибрационного гироскопа (см. рис. 1). Вибрационный гироскоп состоит из рамки и подвижного элемента, который прикреплен к рамке с помощью четырех упругих пружин. Рамка гироскопа имеет квадратную форму, длина стороны которой равняется  $l$ . Подвижный элемент может совершать колебания в плоскости рамки. Сама рамка вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рамки и проходящей через ее центр, с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ .

Введем две системы координат: подвижную (относительную)  $Oxy$ , которая связана с рамкой, и неподвижную (абсолютную)  $O\xi\eta$ . Подвижная система координат вращается относительно неподвижной с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Уравнения движения подвижного элемента гироскопа в проекции на оси ко-

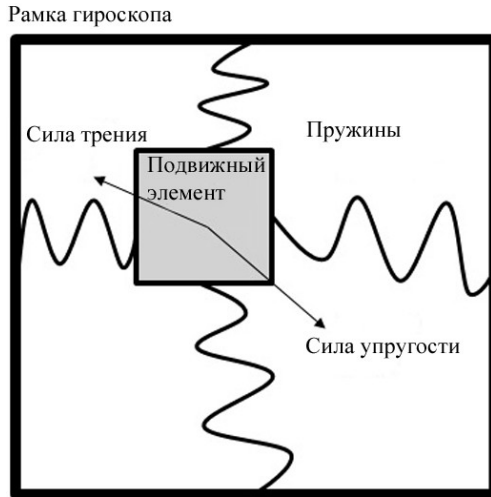


Рис. 1. Модель вибрационного гироскопа.

ординат, связанные с рамкой, выглядят следующим образом [4]:

$$(1) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= \left( -\frac{k}{m} + \Omega^2 \right) x - \frac{c}{m} (\dot{x} - \Omega y) + 2\Omega \dot{y} + u_x, \\ \ddot{y} &= \left( -\frac{k}{m} + \Omega^2 \right) y - \frac{c}{m} (\dot{y} + \Omega x) - 2\Omega \dot{x} + u_y, \end{aligned}$$

где  $x$ ,  $y$  — координаты подвижного элемента в системе координат  $0xy$ ,  $m$  — масса подвижного элемента,  $k$  — коэффициент жесткости пружины,  $c$  — коэффициент вязкого трения,  $u_x$ ,  $u_y$  — компоненты вектора управления  $u$ .

Для того чтобы приступить к исследованию возможностей применения алгоритма скоростного градиента [11] к системе (1) нужно определить цель управления. Определим ее следующим образом: возбуждение колебаний подвижного элемента с заданными уровнями энергии для каждой из координатных осей. При этом представляет интерес, будет ли цель управления достигаться при достаточно малом управлении. В статье [10] был предложен метод на основе алгоритма скоростного градиента, который

позволяет решать задачи управления энергией. Он основан на совместном приведении матриц системы к диагональному виду. Однако он пригоден только для коллоцируемых систем [13], но рассматриваемая система не принадлежит этому классу. Поэтому необходимо искать другой подход.

Уравнения движения объекта для каждой из координатных осей не являются независимыми (1). Это является следствием возникновения кориолисовых сил, которые возникают при вращении рамки. Однако при отсутствии вращения  $\Omega = 0$  уравнения (1) являются независимыми. Это позволяет записать функционалы энергии отдельно для каждого уравнения.

Для этого рассмотрим, какие силы действуют на подвижный элемент при отсутствии вращения. Это сила вязкого трения и сила упругости пружин (рис. 1). Поэтому по второму закону Ньютона:

$$(2) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - c\dot{x} + u_x, \\ m\ddot{y} &= -ky - c\dot{y} + u_y. \end{aligned}$$

Эти уравнения совпадают с (1) при  $\Omega = 0$ . Для каждого из них запишем функционал энергии. Эти функционалы представляют собой сумму кинетической и потенциальной энергий и записываются в виде:

$$(3) \quad \begin{aligned} W_{x_0} &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \\ W_{y_0} &= \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{ky^2}{2}, \end{aligned}$$

а их сумма  $W_0 = W_{x_0} + W_{y_0}$  есть полная энергия системы (2).

Теперь рассмотрим случай, когда относительная система координат вращается относительно абсолютной с ненулевой угловой скоростью  $\Omega$ . Рассмотрим, как при этом изменяются функционалы энергии. Возникновение вращательного движения влияет на скорость тела, а, следовательно, и на кинетическую энергию. Рассмотрим скорость подвижного элемента  $\vec{\rho}$  в относительной системе координат. Радиус-вектор подвижного элемента  $\vec{\rho}$  может быть разложен по проекциям на орты подвижной системы координат  $\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Эти орты меняют свое положение с течением

времени из-за наличия вращения, поэтому, согласно [3],

$$(4) \quad \vec{\rho} = (\dot{x} - \Omega y)\vec{i} + (\dot{y} + \Omega x)\vec{j}.$$

Тогда функционалы энергии для каждой из осей координат представимы в виде

$$(5) \quad \begin{aligned} W_x &= \frac{m(\dot{x} - \Omega y)^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \\ W_y &= \frac{m(\dot{y} + \Omega x)^2}{2} + \frac{ky^2}{2}. \end{aligned}$$

Применяя лагранжев формализм, можно показать [4], что уравнения движения подвижного элемента (1) имеют место, и полная энергия системы  $W$  является суммой функционалов энергии (5).

Рассмотрим динамику колебаний гироскопа без диссипации, т.е. при  $c = 0$ . Тогда уравнения (1) будут выглядеть следующим образом:

$$(6) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= \left(-\frac{k}{m} + \Omega^2\right)x + 2\Omega\dot{y} + u_x, \\ \ddot{y} &= -2\Omega\dot{x} + \left(-\frac{k}{m} + \Omega^2\right)y + u_y. \end{aligned}$$

Функционалы энергии не будут инвариантами. Покажем это путем нахождения их производных в силу системы (6)

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{W}_x &= m\Omega^2 x\dot{x} - m\Omega^2 y\dot{y} - \Omega(m\Omega^2 - k)xy + m\Omega\dot{x}\dot{y}, \\ \dot{W}_y &= -m\Omega^2 x\dot{x} + m\Omega^2 y\dot{y} + \Omega(m\Omega^2 - k)xy - m\Omega\dot{x}\dot{y}. \end{aligned}$$

Это происходит из-за возникновения кориолисовых сил. Поэтому колебания по двум осям координат имеют непостоянную амплитуду. Но полная энергия системы (6) остается постоянной. Теперь, когда получены функционалы энергии для каждой из осей координат (5), можно приступать к исследованию возможностей применения алгоритма скоростного градиента к системе (1) для управления энергией.

## 2. Алгоритм скоростного градиента

Перепишем систему (1) в форме  $\dot{x} = F(x, u)$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= \left(-\frac{k}{m} + \Omega^2\right) x_1 - \frac{c}{m} x_2 + \frac{c\Omega}{m} x_3 + 2\Omega x_4 + u_1, \\
 \dot{x}_3 &= x_4, \\
 \dot{x}_4 &= -\frac{c\Omega}{m} x_1 - 2\Omega x_2 + \left(-\frac{k}{m} + \Omega^2\right) x_3 - \frac{c}{m} x_4 + u_2.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Здесь  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $x_3 = y$ ,  $x_4 = \dot{y}$ , где  $x_i$  — компоненты вектора  $x \in \mathbb{R}^4$ , и  $u_1 = u_x$ ,  $u_2 = u_y$ , где  $u_j$  — компоненты вектора  $u \in \mathbb{R}^2$ . Тогда функционалы энергии (5) переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 W_x &= \frac{kx_1^2}{2} + \frac{m}{2}(x_2 - \Omega x_3)^2, \\
 W_y &= \frac{kx_3^2}{2} + \frac{m}{2}(x_4 + \Omega x_1)^2.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Введем для удобства следующие переменные

$$\begin{aligned}
 v_1 &= x_2 - \Omega x_3, \\
 v_2 &= x_4 + \Omega x_1,
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

которые в физическом смысле являются компонентами линейной скорости.

Цель управления определим как возбуждение колебаний вибрационного гироскопа с заданными уровнями энергии для каждой из осей координат. Обозначим через  $W_x^*$  — желаемый уровень энергии для оси  $0x$ , а  $W_y^*$  — для оси  $0y$  соответственно. Так как размеры рамки гироскопа конечны, то желаемые уровни энергии следует выбирать меньше, чем максимальное значение потенциальной энергии для каждой из осей, равно  $kl^2/8$ . Тогда целевую функцию можно записать следующим образом:

$$Q(x(t), t) = (W_x - W_x^*)^2 + (W_y - W_y^*)^2.
 \tag{11}$$

Данная целевая функция является ограниченной, так как  $W_x + W_y = W$ , значит  $Q \leq 2W^2 + (W_x^*)^2 + (W_y^*)^2$ , а полная энергия системы  $W$  всегда ограничена. Целью управления будет

$$Q(x(t), t) \leq \Delta, \quad t > t^*,
 \tag{12}$$

то есть найдется такой момент времени  $t^*$ , что для всех  $t > t^*$  целевая функция  $Q(x(t), t)$  будет меньше заданной малой величины  $\Delta$ . Это и означает, что подвижный элемент будет совершать колебания с желаемыми уровнями энергии.

Целевая функция (11) не содержит компонент вектора управления  $u_1, u_2$ , но эти компоненты входят в производную целевой функции  $\dot{Q}(x(t), t)$  в силу системы (8):

$$(13) \quad \dot{Q} = 2(W_x - W_x^*)m(x_2 - \Omega x_3)u_1 + \\ + 2(W_y - W_y^*)m(x_4 + \Omega x_1)u_2 + \mu(x),$$

где

$$(14) \quad \mu(x) = 2(W_x - W_x^*)A(x) + 2(W_y - W_y^*)B(x),$$

а

$$(15) \quad A(x) = kx_1x_2 + m(x_2 - \Omega x_3) \times \\ \times \left[ \left( -\frac{k}{m} + \Omega^2 \right) x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{c\Omega}{m}x_3 + \Omega x_4 \right], \\ B(x) = kx_3x_4 + m(x_4 + \Omega x_1) \times \\ \times \left[ \left( -\frac{k}{m} + \Omega^2 \right) x_3 - \frac{c}{m}x_4 - \frac{c\Omega}{m}x_1 - \Omega x_2 \right].$$

Таким образом, с помощью компонент управления  $u_1, u_2$  можно влиять на производную целевой функции  $\dot{Q}$ , стремясь сделать ее отрицательной, чтобы функция  $Q(x(t), t)$  убывала, и достигалась цель управления (12). Это возможно, если функция  $\mu(x)$  ограничена сверху. Покажем это. Так как  $W_x + W_y = W$ , а функция полной энергии системы всегда ограничена, то нужно показать ограниченность функций  $A(x), B(x)$ . Раскроем скобки в выражениях (15) и перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$(16) \quad A(x) = -c(x_2 - \Omega x_3)^2 + \\ + m\Omega(x_2 - \Omega x_3)(x_4 + \Omega x_1) + k\Omega x_1 x_3, \\ B(x) = -c(x_4 + \Omega x_1)^2 - \\ - m\Omega(x_2 - \Omega x_3)(x_4 + \Omega x_1) - k\Omega x_1 x_3.$$



Используя обозначения (17), перепишем выражения (16) в следующем виде:

$$(17) \quad \begin{aligned} A(x) &= -cv_1^2 + m\Omega v_1 v_2 + k\Omega x_1 x_3, \\ B(x) &= -cv_2^2 - m\Omega v_1 v_2 - k\Omega x_1 x_3. \end{aligned}$$

Из функционалов энергии для каждой из координатных осей (9) получим следующие оценки:

$$(18) \quad \begin{aligned} v_1 &\leq \sqrt{\frac{2W_x}{m}}, & v_2 &\leq \sqrt{\frac{2W_y}{m}}, \\ x_1 &\leq \sqrt{\frac{2W_x}{k}}, & x_3 &\leq \sqrt{\frac{2W_y}{k}}. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь оценками (18) и неравенствами  $W_x \leq W$  и  $W_y \leq W$ , получим оценки функций  $A(x)$ ,  $B(x)$ :

$$(19) \quad \begin{aligned} |A(x)| &\leq c\frac{2W_x}{m} + 4\Omega\sqrt{W_x W_y} \leq \left(\frac{2c}{m} + 4\Omega\right) W, \\ |B(x)| &\leq c\frac{2W_y}{m} + 4\Omega\sqrt{W_x W_y} \leq \left(\frac{2c}{m} + 4\Omega\right) W. \end{aligned}$$

Исходя из вида целевой функции (11), получим следующие оценки:

$$(20) \quad |W_x - W_x^*| \leq \sqrt{Q}, \quad |W_y - W_y^*| \leq \sqrt{Q}.$$

Наконец, пользуясь полученными оценками (19) и (20), покажем ограниченность функции  $\mu(x)$  (14) сверху:

$$(21) \quad \mu(x) \leq 8\left(\frac{c}{m} + 2\Omega\right) W\sqrt{Q} = CW\sqrt{Q}.$$

Таким образом, мы показали возможность достижения цели управления. Осталось найти подходящее управление. Для этого приступим к анализу системы (8) и целевой функции (11). Второе и четвертое уравнения системы (8) не являются независимыми. При равенстве угловой скорости  $\Omega$  нулю и при отсутствии управления уравнения системы (8) описывают затухающие колебания маятника. Если же угловая скорость  $\Omega$  отлична от нуля, то этот факт отражается и на характере колебаний. Мы хотим, чтобы характер колебаний сохранялся, то есть, чтобы слагаемые во втором и четвертом уравнениях системы (8), содержащие  $\Omega$  не влияли на знак производной  $\dot{x}_2$  и  $\dot{x}_4$  соответственно. Если ставится задача подавления колебаний по какой-либо из координатных осей, например по оси  $0x$ , тогда первое слагаемое во втором

уравнении (8) будет малым, а значит, влияния угловой скорости  $\Omega$  можно избежать лишь с помощью управления, то есть добавления в управление слагаемых, содержащих  $\Omega$ , взятых с обратным знаком. Тогда первые два уравнения системы (8) будут описывать затухающие колебания маятника, а значит колебания по этой координате будут подавляться. В случае возбуждения колебаний будем рассматривать такие значения  $\Omega$ , чтобы угловая скорость не влияла на характер колебаний.

Также рассмотрим случай, когда одновременно  $W_x$  и  $W_y$  близки к нулю. Тогда и  $\mu(x)$  будет близка к нулю, а значит, и производная целевой функции  $\dot{Q}$ . Значит, целевая функция будет медленно изменяться, либо вообще оставаться постоянной при равенстве нулю  $\dot{Q}$ . В таком случае управление можно выбрать следующим образом

$$(22) \quad \begin{aligned} u_1 &= u_1^0, \\ u_2 &= u_2^0, \end{aligned}$$

где  $u_1^0, u_2^0$  – константы, отличные от нуля. Тогда полная энергия системы (8) станет отделенной от нуля, следовательно, от нуля станут отличны и ее составляющие  $W_x$  и  $W_y$ , а значит и производная целевой функции  $\dot{Q}$ . Таким образом можно вытолкнуть систему из энергетической ямы.

В конечном итоге задачу управления колебаниями системы (8) можно разбить на несколько подзадач:

- 1) Возбуждение колебаний с заданными энергиями по двум из осей координат.
- 2) Подавление колебаний по оси  $0x$ .
- 3) Подавление колебаний по оси  $0y$ .

Рассмотрим отдельно каждую из поставленных задач.

2.1. Возбуждение колебаний с заданными энергиями по двум из осей координат

В данном случае  $W_x^*$  и  $W_y^*$  отличны от нуля. Выберем компоненты управления  $u(t)$  следующим образом

$$(23) \quad \begin{aligned} u_1 &= -\frac{\gamma}{2m}(x_2 - \Omega x_3)(x_4 + \Omega x_1)^2(W_x - W_x^*), \\ u_2 &= -\frac{\gamma}{2m}(x_4 + \Omega x_1)(x_2 - \Omega x_3)^2(W_y - W_y^*), \end{aligned}$$

где  $\gamma$  – коэффициент усиления. Тогда, используя выражения (17), запишем производную целевой функции  $\dot{Q}$  в следующем виде:

$$(24) \quad \dot{Q} = -\gamma Q v_1^2 v_2^2 + \mu(x).$$

Для достижения цели управления (12) нужно пытаться уменьшать целевую функцию  $Q$ . С помощью выбора коэффициента усиления  $\gamma$  можно сделать производную целевой функции отрицательной, и тем самым достичь цели управления. Используя оценку (21), получим следующее неравенство

$$(25) \quad \dot{Q} \leq \dot{D} = -\gamma Q v_1^2 v_2^2 + CW \sqrt{Q}.$$

Таким образом, если доказать, что функция  $D$  убывает, то целевая функция  $Q$  также будет убывать. При колебаниях подвижного элемента составляющие линейной скорости меняются периодически от 0 до максимального значения. Значит, при приближении какой-либо компоненты линейной скорости к нулю производная функции  $\dot{D}$  становится положительной. Необходимо сделать промежутки времени, когда  $\dot{D} > 0$ , малыми, а когда  $\dot{D} < 0$ , – большими. Тогда значение функции  $D$  будет уменьшаться с течением времени, значит, ее значение будет приближаться к нулю.

Перепишем второе и четвертое уравнения системы (8), используя компоненты линейной скорости (17):

$$(26) \quad \begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\frac{k}{m}x_1 + \Omega v_2 - \frac{c}{m}v_1 + u_1, \\ \dot{v}_2 &= -\frac{k}{m}x_3 - \Omega v_1 - \frac{c}{m}v_2 + u_2. \end{aligned}$$

Такая запись является более удобной для анализа колебаний. Рассмотрим случай, когда  $v_1^2 \leq \varepsilon$  или  $v_2^2 \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малая величина, которую выберем в дальнейшем. Величина  $\varepsilon$  достаточно мала,

чтобы  $v_1$  или  $v_2$  выходили из отрезков  $v_1^2 \leq \varepsilon$  и  $v_2^2 \leq \varepsilon$  соответственно. Будем считать, что промежутки времени, когда  $v_1^2 \leq \varepsilon$  и  $v_2^2 \leq \varepsilon$ , не пересекаются, тем самым рассматривая случай, когда время возрастания функции  $D$  максимально. Обозначим их  $t_1$  и  $t_2$  соответственно, тогда сумма длин этих промежутков  $t_3$  является временем, когда  $\dot{D} > 0$ . В этом случае слагаемое  $-\gamma v_1^2 v_2^2 Q$  мало, следовательно,  $\dot{D} \approx CW\sqrt{Q} > 0$ . Тогда функция  $D$  возрастет на величину  $CW\sqrt{Q}t_3$ . Оценим это время  $t_3$ , а именно промежутки  $t_1$  и  $t_2$ . Рассмотрим для начала отдельно первое уравнение (25). Третьим слагаемым в этом уравнении можно пренебречь, так это произведение двух малых величин — коэффициента трения  $c$  и компоненты линейной скорости  $v_1 < \sqrt{\varepsilon}$ . Будем предполагать, что два других слагаемых в правой части имеют разные знаки, то есть рассматриваем случай, когда  $v_1^2 \leq \varepsilon$  максимально долго. Пусть  $v_1$  изменяется от  $-\sqrt{\varepsilon}$  до  $\sqrt{\varepsilon}$  за время  $t_1$ . Тогда справедливо следующее неравенство:

$$(27) \quad \min \dot{v}_1 < \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{t_1}.$$

Далее, используя наши предположения, перепишем неравенство (26) в виде

$$(28) \quad \frac{1}{t_1} > \frac{\min \dot{v}_1}{2\sqrt{\varepsilon}} > \frac{\min(\frac{k}{m}x_1 - \Omega v_2)}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

Так как  $\varepsilon$  выбираем сами, то предположим, что выполнены неравенства:

$$(29) \quad \varepsilon < \frac{W_x}{m}, \quad \varepsilon < \frac{W_y}{m},$$

тогда, используя равенства (9), найдем оценки для  $x_1$ :

$$(30) \quad x_1 > \sqrt{\frac{2W_x - m\varepsilon}{k}} > \sqrt{\frac{W_x}{k}}.$$

Подставим оценки (29) и (18) в неравенство (27) и получим:

$$(31) \quad \frac{1}{t_1} > \frac{\sqrt{kW_x} - \Omega\sqrt{2mW_y}}{2m\sqrt{\varepsilon}} > 0.$$

Аналогичное неравенство можно получить и для длины промежутка времени  $t_2$ :

$$(32) \quad \frac{1}{t_2} > \frac{\sqrt{kW_y} - \Omega\sqrt{2mW_x}}{2m\sqrt{\varepsilon}} > 0.$$

Из неравенств (30) и (31) получаем оценки для  $\Omega$ , которые явным образом определяют насколько малым должна быть угловая скорость  $\Omega$ , чтобы характер колебаний не нарушался.

$$(33) \quad \Omega < \sqrt{\frac{k}{2m}} \sqrt{\frac{W_x}{W_y}}, \quad \Omega < \sqrt{\frac{k}{2m}} \sqrt{\frac{W_y}{W_x}}.$$

Данные оценки зависят от изменяющихся функционалов энергии. Поэтому получим оценку через константы. Предположим, что в начальный момент времени  $W_x > \delta$  и  $W_y > \delta$ , где  $\delta$  — малая величина, а также, учтем то, что максимально возможное значение полной энергии равно  $kl^2/8$ , тогда получим

$$(34) \quad \Omega < \sqrt{\frac{4\delta}{mkl}}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $v_1^2 \geq \varepsilon$  и  $v_2^2 \geq \varepsilon$ . Обозначим длину промежутка времени, когда это выполнено, за  $t_4$ . Будем выбирать  $\gamma$  так, чтобы было выполнено  $\dot{D} < -CW\sqrt{Q} < 0$ . Тогда за время  $t_4$  функция  $D$  уменьшится на величину  $CW\sqrt{Q}t_4$ . Значит,  $\varepsilon$  нужно выбрать таким образом, чтобы  $t_4 > t_3 = t_1 + t_2$ , тогда при функции  $D$  будет убывать, а значит будет убывать и целевая функция  $Q$ . Осталось найти оценку времени  $t_4$ .

Обозначим за  $t_5$  время, за которое одна из координат (например, координата по оси  $0x$ ) подвижного элемента изменяются от нуля до максимального значения и обратно. Тогда  $t_5 = t_4 + t_3$ . Значит, чтобы целевая функция  $Q$  убывала до малой окрестности нуля с течением времени, должно быть выполнено неравенство  $t_5 > 2t_3$ . Оценим время  $t_5$ . Предположим, что подвижный элемент проходит это расстояние  $2\sqrt{(2W_x/k)}$  с максимальной скоростью  $2W_x/m$  (данные значения получены из выражений (9)), то есть за минимальное время. Предположим, что время  $t_5$  меньше этого времени, отсюда получаем оценку:

$$(35) \quad t_5 < 2\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Используя неравенство (34), получим, что для убывания целевой функции должно быть выполнено:

$$(36) \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} < \frac{1}{t_5} < \frac{1}{2t_3} = \frac{1}{2(t_1 + t_2)} < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right).$$

Далее, подставив оценки (30) и (31) в неравенство (35), получим, что нужно выбрать  $\varepsilon$  так, чтобы было выполнено:

$$(37) \quad \sqrt{\frac{k}{m}} < \frac{(\sqrt{k} - \Omega\sqrt{2m})(\sqrt{W_x} + \sqrt{W_y})}{2m\sqrt{\varepsilon}}.$$

Так как мы считаем, что выполнены неравенства (32), то можно получить окончательную оценку величины  $\varepsilon$ :

$$(38) \quad \varepsilon < \frac{(\sqrt{k} - \Omega\sqrt{2m})^2(\sqrt{W_x} + \sqrt{W_y})^2}{4mk}.$$

Как было отмечено выше, коэффициент усиления  $\gamma$  нужно выбирать, чтобы было выполнено  $\dot{D} < -CW\sqrt{Q} < 0$  при  $v_1^2 \geq \varepsilon$  и  $v_2^2 \geq \varepsilon$ . Значит, используя выражение (24), получим, что  $\gamma$  должен удовлетворять следующему неравенству

$$(39) \quad \gamma(Q, W, \varepsilon) > \frac{2CW}{\varepsilon^2\sqrt{Q}}.$$

А после достижения  $Q$  величины  $\Delta$  (обозначим этот момент времени  $t^*$ ), будем выбирать  $\gamma$  так, чтобы цель управления (12) оставалась выполненной для всех  $t > t^*$ :

$$(40) \quad \gamma(W, \varepsilon) > \frac{2C}{\varepsilon^2\sqrt{\Delta}}W,$$

где  $\varepsilon$  должен удовлетворять неравенствам (37) и (28).

Теперь можно сформулировать следующую теорему:

**Теорема 1.** Пусть выбран  $\delta$  такой, что в начальный момент времени  $W_x > \delta$  и  $W_y > \delta$ , а также желаемые уровни энергии  $W_x^* > \delta$  и  $W_y^* > \delta$ . Пусть в системе (8) угловая скорость  $\Omega$  удовлетворяет неравенству (33). Тогда существует  $\bar{\gamma}(Q, W, \varepsilon) > 0$ , удовлетворяющий условию (38) при  $Q > \Delta$  и условию (39) при  $Q \leq \Delta$ , где  $\Delta$  – желаемый уровень точности, и при  $\varepsilon$ , удовлетворяющему условиям (37) и (28), и такой, что при всех  $\gamma > \bar{\gamma}$  и выборе управления в виде (23) цель управления (12) достигается.

## 2.2. Подавление колебаний по оси 0x

В данном случае у нас  $W_x^* = 0$ . И, как предполагалось ранее, управление по этой координате нужно выбирать в виде

$$(41) \quad u_1 = -2\Omega x_4 - \frac{c\Omega}{m}x_3 - \alpha x_2,$$

где  $\alpha \geq 0$  – коэффициент усиления затухания. Он может быть выбран равным нулю, если отличен от нуля коэффициент трения  $c$ . Тогда первые два уравнения системы (8) будут описывать затухающие колебания маятника, а значит, функционал энергии  $W_x$  будет стремиться к нулю, что и означает подавление колебаний по координате  $0x$ .

По второй координате  $0y$  мы хотим достичь отличного от нуля уровня энергии  $W_y^*$ . Так как производная целевой функции имеет вид (13), то ее первое слагаемое с определенного момента времени будет близко к нулю, а значит, им можно будет пренебречь. Будем рассматривать задачу возбуждения колебаний, начиная с этого момента времени. Таким образом, вторую компоненту управления  $u_2$  можно выбрать в виде

$$(42) \quad u_2 = -\frac{\gamma}{2m}(x_4 + \Omega x_1)(W_y - W_y^*),$$

где  $\gamma$  – коэффициент усиления. Тогда, используя выражения (17), запишем производную целевой функции  $\dot{Q}$  в следующем виде:

$$(43) \quad \dot{Q} = -\gamma Q v_2^2 + \mu(x).$$

В данном случае из-за близости функционала энергии  $W_x$  к нулю изменится и оценка для функции  $\mu(x)$ . А именно, первое слагаемое в (14) равно нулю, а оценка для  $B(x)$  имеет вид:

$$(44) \quad |B(x)| \leq \frac{2cW_y}{m}.$$

Тогда

$$(45) \quad \mu(x) \leq \frac{4c}{m}W_y\sqrt{Q}.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$(46) \quad \dot{Q} \leq \dot{D} = -\gamma Q v_2^2 + \frac{4c}{m}W_y\sqrt{Q}.$$

Далее, будем действовать так же, как и в предыдущем разделе, а именно рассматривать случаи, когда функция  $D$  возрастает и убывает. Будем использовать для этих временных промежутков те же обозначения, что и в предыдущем разделе. Воспользуемся полученными оценками для промежутков времени  $t_2$ , когда  $v_2^2 < \varepsilon$ , (31) (в данном случае функция  $D$  будет возрастать на величину  $(4c/m)W_y\sqrt{Q}t_2$ ) и  $t_5$ , когда скорость изменяется от нуля до максимального значения и обратно, (34). Так как в данном

случае  $W_x$  пренебрежимо мал, то неравенство (31) переписывается в виде

$$(47) \quad \frac{1}{t_2} > \frac{\sqrt{kW_y}}{2m\sqrt{\varepsilon}} > 0,$$

следовательно, в данном случае не возникает ограничений на выбор  $\Omega$ . Длина промежутка  $t_3$  в данном случае равна длине промежутка  $t_2$ . За время  $t_4$ , когда  $v_2^2 \geq \varepsilon$ , с помощью выбора коэффициента  $\gamma$  сделаем так, чтобы функция  $D$  уменьшалась на величину  $(4c/m)W_y\sqrt{Q}t_4$ . Чтобы функция  $D$  стремилась к окрестности нуля, аналогично предыдущему разделу, должно быть выполнено неравенство  $t_5 > 2t_2$ . Отсюда, с учетом неравенств (46) и (34), должно быть выполнено

$$(48) \quad \frac{2m\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{kW_y}} < 2\sqrt{\frac{m}{k}},$$

откуда получаем окончательную оценку на  $\varepsilon$

$$(49) \quad \varepsilon < \frac{W_y}{m},$$

которая совпадает с одним из неравенств (28). Как говорилось выше, коэффициент усиления  $\gamma$  нужно выбирать, чтобы было выполнено  $\dot{D} < -(4c/m)W_y\sqrt{Q} < 0$  при  $v_2^2 \geq \varepsilon$ . Значит, используя выражение (45), получим, что  $\gamma$  должен удовлетворять следующему неравенству

$$(50) \quad \gamma(Q, W_y, \varepsilon) > \frac{8cW_y}{m\varepsilon^2\sqrt{Q}}.$$

А после достижения  $Q$  величины  $\Delta$  (обозначим этот момент времени  $t^*$ ), будем выбирать  $\gamma$  так, чтобы цель управления (12) оставалась выполненной для всех  $t > t^*$ :

$$(51) \quad \gamma(W_y, \varepsilon) > \frac{8c}{m\varepsilon^2\sqrt{\Delta}}W_y,$$

где  $\varepsilon$  должен удовлетворять неравенству (48).

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему о достижении цели управления:

**Теорема 2.** Пусть для системы (8) заданы желаемые уровни энергии  $W_x^* = 0$  и  $W_y^* > 0$ . Пусть также в начальный момент времени функционал энергии  $W_y > 0$ . Тогда существует  $\bar{\gamma}(Q, W_y, \varepsilon) > 0$ , удовлетворяющий условию (49) при  $Q > \Delta$  и



условию (50) при  $Q \leq \Delta$ , где  $\Delta$  – желаемый уровень точности, и при  $\varepsilon$ , удовлетворяющему условию (48), и такой, что при всех  $\gamma > \bar{\gamma}$  и выборе компонент управления в виде (40) и (41) цель управления (12) достигается.

### 2.3. Подавление колебаний по оси $Oy$

В данном случае у нас  $W_y^* = 0$ . Этот случай аналогичен случаю, рассмотренному в предыдущем разделе. Управление нужно выбирать следующим образом

$$(52) \quad \begin{aligned} u_1 &= -\frac{\gamma}{2m}(x_2 - \Omega x_3)(W_x - W_x^*), \\ u_2 &= 2\Omega x_2 + \frac{c\Omega}{m}x_3 - \alpha x_4, \end{aligned}$$

где  $\alpha \geq 0$  – коэффициент усиления затухания, а  $\gamma$  – коэффициент усиления.

Для  $\varepsilon$  должна быть выполнена оценка

$$(53) \quad \varepsilon < \frac{W_x}{m},$$

А для коэффициента усиления  $\gamma$  должно быть верно неравенство:

$$(54) \quad \gamma(Q, W_x, \varepsilon) > \frac{8cW_x}{m\varepsilon^2\sqrt{Q}}.$$

После достижения  $Q$  величины  $\Delta$  (обозначим этот момент времени  $t^*$ ), будем выбирать  $\gamma$  так, чтобы цель управления (12) оставалась выполненной для всех  $t > t^*$ :

$$(55) \quad \gamma(W_x, \varepsilon) > \frac{8c}{m\varepsilon^2\sqrt{\Delta}}W_x,$$

где  $\varepsilon$  должен удовлетворять неравенству (52).

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему о достижении цели управления:

**Теорема 3.** Пусть для системы (8) заданы желаемые уровни энергии  $W_x^* > 0$  и  $W_y^* = 0$ . Пусть также в начальный момент времени функционал энергии  $W_x > 0$ . Тогда существует  $\bar{\gamma}(Q, W_x, \varepsilon) > 0$ , удовлетворяющий условию (53) при  $Q > \Delta$  и условию (54) при  $Q \leq \Delta$ , где  $\Delta$  – желаемый уровень точности, и при  $\varepsilon$ , удовлетворяющему условию (52), и такой, что при всех  $\gamma > \bar{\gamma}$  и выборе управления в виде (51) цель управления (12) достигается.

### 3. Индексы возбудимости

Проведем анализ возможности изменения характеристик диссипативной системы (8) за счет управления. Для этого введем количественную меру такого изменения. Для определенности будем рассматривать в качестве выхода функцию запаса  $V(x)$ , роль которой будет играть полная энергия системы (8), а измерять величину входа будем по его уровню — максимальному по времени значению, т. е. в равномерной норме. Из-за наличия диссипации при отсутствии управления величина  $V(x(t))$  имеет тенденцию к убыванию. Поэтому большое значение имеет величина, характеризующая возможность увеличения  $V(x)$  за счет управления. Такая величина называется *индексом возбудимости*.

**Определение 1** [7, с. 59]. Пусть множество допустимых управлений состоит из функций  $u(t)$ , ограниченных при  $0 \leq t < \infty$  и таких, что соответствующие им траектории  $x(t)$  ограничены. Верхним и нижним индексами возбудимости системы (8) по отношению к выходу  $V(x)$  называются функции  $\chi_V^+(\gamma)$ ,  $\chi_V^-(\gamma)$ , определенные при  $0 \leq \gamma < \infty$  следующим образом:

$$(56) \quad \begin{aligned} \chi_V^+(\gamma) &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|u(\cdot)| \leq \gamma \\ x(0)=0}} V(x(t)), \\ \chi_V^-(\gamma) &= \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|u(\cdot)| \leq \gamma \\ x(0)=0}} V(x(t)). \end{aligned}$$

Рассмотрим объект управления (8). Используя выражения (9), а также обозначения (17), получим, что функция запаса системы (8) имеет вид

$$(57) \quad V(x) = \frac{k(x_1^2 + x_3^2)}{2} + \frac{m(v_1^2 + v_2^2)}{2}.$$

Вход системы — вектор управления  $u = (mu_1, mu_2) \in \mathbb{R}^2$ , а в качестве выхода будем рассматривать вектор, составленный из компонент линейной скорости  $y = (v_1, v_2)$ . В таком случае размерности входа и выхода совпадают. Найдем производную функции запаса в силу системы (8):

$$(58) \quad \dot{V} = -c(v_1^2 + v_2^2) + mv_1u_1 + mv_2u_2.$$

Отсюда следует, что

$$(59) \quad V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t (y(s)^T u(s) - \rho(x(s))) ds,$$

где  $\rho(x(t)) = c\|y(t)\|^2$  — скорость диссипации. Следовательно, система (8) является пассивной.

Сформулируем следующую теорему:

**Теорема 4.** *Индексы возбудимости  $\chi_V^+(\gamma)$ ,  $\chi_V^-(\gamma)$  системы (8) удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$(60) \quad \frac{m}{2} \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 \leq \chi_V^-(\gamma) \leq \chi_V^+(\gamma) \leq m \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 + \frac{kl^2}{4},$$

где  $l$  — длина стороны рамки гироскопа.

**Доказательство.** Для доказательства данного утверждения воспользуемся следующей теоремой:

**Теорема 5.** *Пусть система (8) пассивна, причем функция запаса  $V(x)$  и скорость диссипации  $\rho(x)$  удовлетворяют неравенствам*

$$(61) \quad \alpha_0 |y|^2 \leq V(x) \leq \alpha_1 |y|^2 + d,$$

$$(62) \quad \rho_0 |y|^2 \leq \rho(x) \leq \rho_1 |y|^2,$$

для некоторых положительных  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_1$ ,  $d$ . Пусть существует  $\varepsilon$  такое, что множество

$$(63) \quad \Omega^- = \left\{ x : h(x) = 0, \varepsilon < V(x) < \alpha_0 \left(\frac{\gamma}{\rho_1}\right)^2 \right\},$$

где  $y = h(x)$ , не содержит целых траекторий свободной системы.

Тогда индексы возбудимости  $\chi_V^+(\gamma)$ ,  $\chi_V^-(\gamma)$  по отношению к  $V(x)$  удовлетворяют неравенствам

$$(64) \quad \alpha_0 \left(\frac{\gamma}{\rho_1}\right)^2 \leq \chi_V^-(\gamma) \leq \chi_V^+(\gamma) \leq 2\alpha_1 \left(\frac{\gamma}{\rho_0}\right)^2 + d.$$

Теорема 5 является уточненной версией теоремы [7, с. 60]. Ее доказательство проводится способом, аналогичным доказательству теоремы [7, с. 60].

Проверим условия теоремы 5.

Пассивность системы (8) была доказана выше.

Функция запаса системы (8) имеет вид (56). Так как  $y = (v_1, v_2)$ , то выполнено неравенство  $m|y|^2 \leq 2V(x)$ . С другой стороны, сторона рамки гироскопа равна  $l$ . Следовательно,  $2|x_1| \leq l$  и  $2|x_3| \leq l$ . Поэтому выполнено неравенство  $V(x) \leq m|y|^2/2 + kl^2/4$ . Таким образом, выполнено условие (60) теоремы 5, где  $\alpha_0 = \alpha_1 = m/2$ ,  $d = kl^2/4$ .

Функция диссипации  $\rho(x(t)) = c|y|^2$ , следовательно  $\rho_1 = \rho_2 = c$ . Значит, выполнено условие (61) теоремы 5.

Если  $y = h(x) = 0$ , то есть компоненты линейной скорости  $v_1, v_2$  равны 0, значит, согласно уравнениям (25), равны нулю и координаты  $x_1$  и  $x_3$ . Следовательно, функция запаса системы (56) равна нулю. А значит, множество  $\Omega^-$  не содержит целых траекторий свободной системы.

Все условия теоремы 5 выполнены, значит верно и заключение теоремы 4.

Таким образом, мы имеем оценки полной энергии системы (59), которой можно достигнуть, подавая на вход ограниченный вектор управления  $|u(\cdot)| \leq \gamma$ .

#### 4. Моделирование

Рассмотрим сначала динамику гироскопа при отсутствии управления  $u(t) = 0$ . На рис. 2а изображена траектория движения подвижного элемента в неподвижной системе координат  $0\xi\eta$ . Из рис. 2с, на котором изображены графики поведения функционалов энергии (точечным пунктиром обозначена полная энергия системы  $W$ ), видно, полная энергия системы (1) убывает, так как система является диссипативной. Как следствие, колебания подвижного элемента по двум осям координат затухают (см. рис. 2б).

Теперь рассмотрим задачу возбуждения колебаний по двум осям координат. Желаемые уровни энергии зададим следующим образом:  $W_x^* = 0.1$ ,  $W_y^* = 0.2$ . Соответственно, управление  $u(t)$  нужно выбирать в виде (23). Пусть коэффициент усиления равен  $\gamma = 20$ . На рисунке 3 представлены результаты работы алгорит-

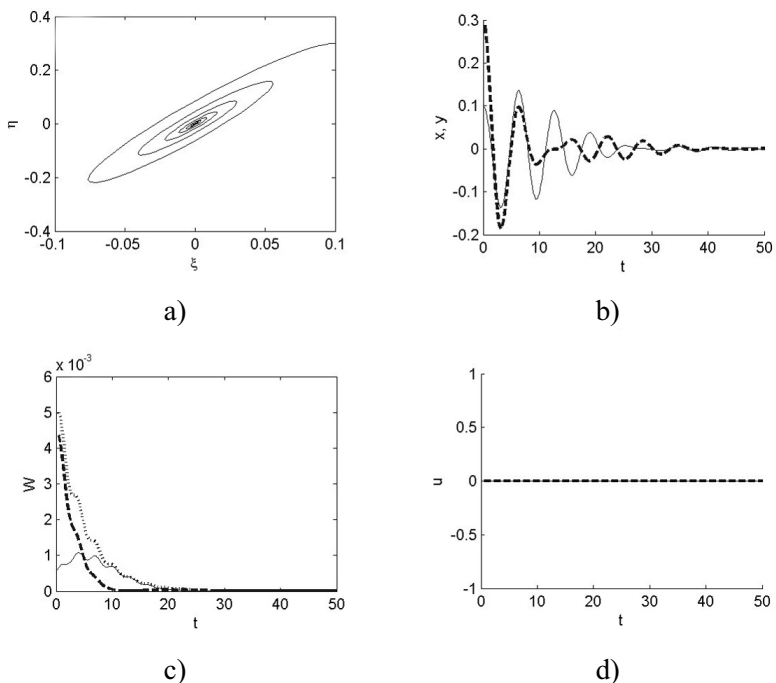
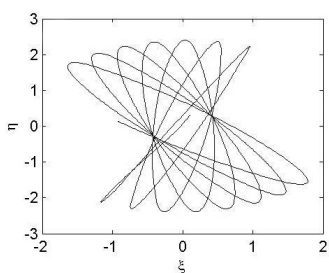
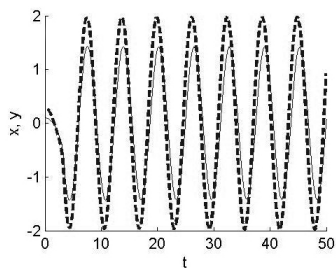


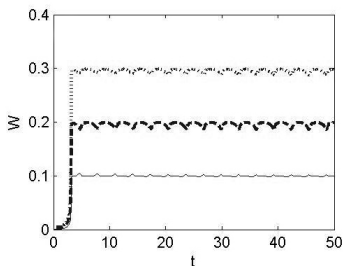
Рис. 2. Динамика гироскопа (1) при нулевом управлении, т.е.  $u(t) = 0$ . Сплошной линией обозначен график изменения координаты  $0x$ , а толстой пунктирной линией – график изменения координаты  $0y$ , соответственно. (а): траектория подвижного элемента в неподвижной системе координат; (б): графики изменения координат гироскопа; (с): Графики изменения полной и частных энергий гироскопа; и (d): графики компонент управления. Параметры:  $m = 0.1$ ,  $k = 0.1$ ,  $\Omega = 0.03$ ,  $c = 0.02$ . Начальные условия:  $x(0) = (0.1, 0, 0.3, 0)$ .



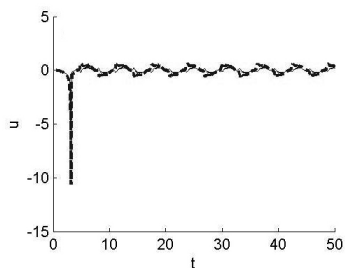
a)



b)



c)



d)

Рис. 3. Динамика гироскопа (1) при подаче управления в виде (23). Возбуждение колебаний по двум координатным осям. (a): траектория подвижного элемента в неподвижной системе координат; (b): графики изменения координат гироскопа; (c): Графики изменения полной и частных энергий гироскопа; и (d): графики компонент управления. Параметры:  $\gamma = 20$ ,  $W_x^* = 0.1$ ,  $W_y^* = 0.2$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как на рис. 2.

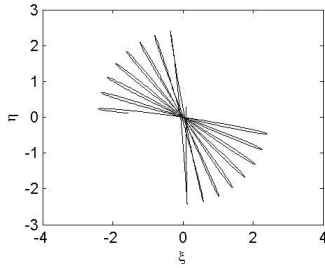
ма. Таким образом, цель управления достигается (см. рис. 3с). Колебания по двум осям координат имеют постоянную амплитуду (см. рис. 3b). На рис. 3d показан график изменения управления  $u(t)$ . Таким образом, после достижения желаемых уровней энергии, управление становится малым. Оно используется для компенсации диссипации и кориолисовых сил.

В третьем случае поставим задачу подавления колебаний по координате  $0x$ . Выберем желаемый уровень энергии по оси  $0y$  равным  $W_y^* = 0.3$ . Следовательно, компоненты управления нужно выбирать в виде (40), (41), где коэффициент усиления равен  $\gamma = 10$ , а коэффициент усиления затухания равен  $\alpha = 0$ . Результаты работы представлены на рис. 4. Таким образом, из рис. 4с видно, что цель управления достигается, и колебания по координате  $0x$  затухают (см. рис. 4b). При этом управление ограничено (см. рис. 4d).

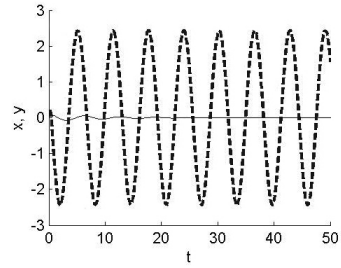
При выборе малого коэффициента усиления  $\gamma$  цель управления может и не достигаться. Например, если поставить задачу возбуждения колебаний по двум осям координат, желаемые уровни энергии выбрать, как  $W_x^* = 0.1$ ,  $W_y^* = 0.2$ , а коэффициент усиления взять равным  $\gamma = 5$ . Можно показать, что такой коэффициент не удовлетворяет условиям теоремы 1, поэтому цель управления в данном случае достигаться не будет. Результат работы алгоритма в этом случае представлен на рис. 5.

## **5. Заключение**

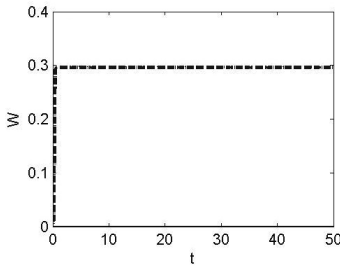
В данной статье рассмотрен случай линейной механической модели системы с двумя степенями свободы на примере вибрационного гироскопа. Для этой модели получены функционалы энергии колебаний по каждой из степеней свободы. Построены алгоритмы возбуждения колебаний подвижного элемента гироскопа с желаемыми уровнями энергии введенных частных функционалов, а также подавления колебаний по одной из осей. Приведены теоремы о достижении цели управления в построенной системе дифференциальных уравнений. Также проведен анализ системы,



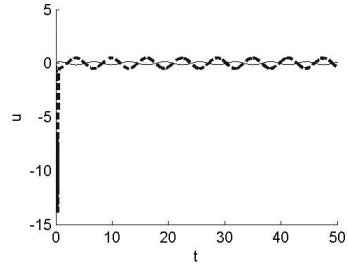
a)



b)



с)



d)

Рис. 4. Динамика гироскопа (1) при подаче управления в виде (40), (41). Подавление колебаний по координате  $0x$ . (a): траектория подвижного элемента в неподвижной системе координат; (b): графики изменения координат гироскопа; (c): Графики изменения полной и частных энергий гироскопа; и (d): графики компонент управления. Параметры:  $\gamma = 10$ ,  $\alpha = 0$ ,  $W_x^* = 0$ ,  $W_y^* = 0.3$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как на рис. 2.



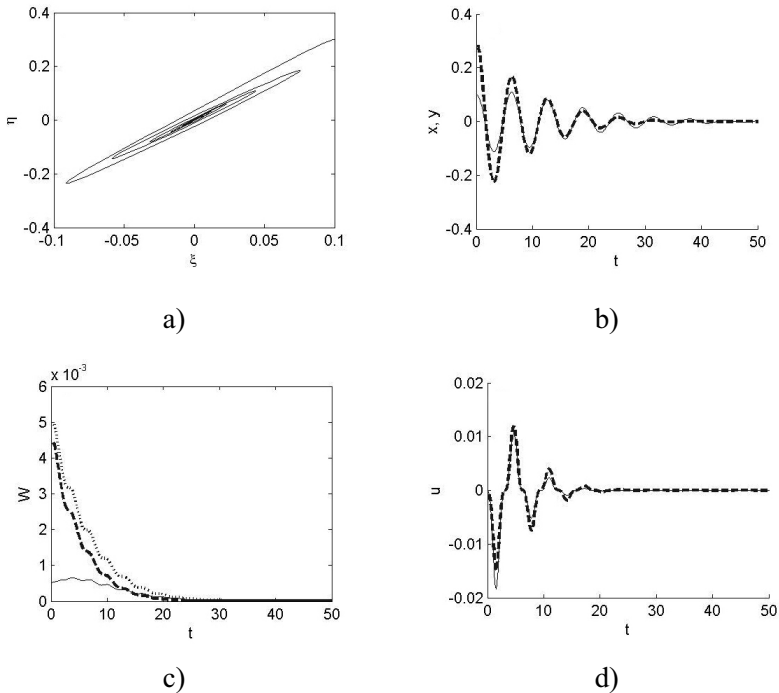


Рис. 5. Динамика гироскопа (1) при подаче управления в виде (23) с малым коэффициентом усиления  $\gamma$ . (a): траектория подвижного элемента в неподвижной системе координат; (b): графики изменения координат гироскопа; (c): Графики изменения полной и частных энергий гироскопа; и (d): графики компонент управления. Параметры:  $\gamma = 5$ ,  $W_x^* = 0.1$ ,  $W_y^* = 0.2$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как на рис. 2.

установлены оценки уровней энергии, которых можно достичь при использовании ограниченного управления. Оказывается, что эти достижимые уровни пропорциональны квадратам отношений интенсивности управления к степени диссипации. Также было проведено моделирование работы предложенных алгоритмов. При невыполнении условий приведенных теорем, алгоритм может и не обеспечивать выполнение цели управления. Это было подтверждено в одном из приведенных экспериментов моделирования.

Таким образом, алгоритм скоростного градиента может применяться для возбуждения колебаний механических систем с несколькими степенями свободы. Применение данного алгоритма позволяет выбирать ограниченное управление, что имеет большое значение в задачах, где требуется обеспечить сбережение энергии.

### **Литература**

1. АХМЕТЖАНОВ А.Р., МЕЛИКЯН А.А., ФРАДКОВ А.Л. *Оптимальность метода скоростного градиента в задаче об управлении выбросом из потенциальной ямы* // ПММ. - 2007. - № 6. - С. 899-909.
2. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами*. - СПб.: Наука, 2000. - 549 с.
3. ПОЛЯХОВ Н.Н., ЗЕГЖДА С.А., ЮШКОВ М.Ю. *Теоретическая механика: Учеб. Пособие*. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. - 536 с.
4. РАСПОПОВ В.Я. *Микромеханические приборы: учебное пособие*. - М.: Машиностроение, 2007. - 400 с.
5. ФРАДКОВ А.Л. *Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления* // Автомат. и телемех. - 1979. - № 9. - С. 90-101.
6. ФРАДКОВ А.Л. *Адаптивное управление в сложных системах: беспойсковые методы*. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1990. - 292 с.

7. ФРАДКОВ А.Л. *Кибернетическая физика*. - СПб.: Наука, 2003. - 208 с.
8. ACAR C. AND SHKEL A. *MEMS Vibratory Gyroscope Structural Approaches to Improve Robustness*. - Springer Publishing, 2007. - 262 p.
9. ANDRIEVSKY B.R. *Computation of the excitability index for linear oscillators* // Proc. 44th IEEE CDC-ECC, Seville. - 2005. - P. 3537-3540.
10. EFIMOV D., FRADKOV A., IWASAKI T. *Exciting multi-DOF systems by feedback resonance* // Automatica. - 2013. - Vol. 49, № 6. - P. 1782-1789.
11. FRADKOV A.L. *Passification of nonsquare linear systems and Yakubovich-Kalman-Popov Lemma* // European Journal of Control. - 2003. - № 6. - P. 573-582.
12. FRADKOV A.L., ANDRIEVSKY B.R. *Control of wave motion in the chain of pendulums* // Proc. 17th IFAC World Congress, Seoul. - 2008. - P. 3136-3141.
13. FUTAKATA Y., IWASAKI T. *Entrainment to natural oscillations via uncoupled central pattern generator* // IEEE Trans. Automatic Control. - 2011. - Vol. 56, Issue 5. - P. 1075-1089.
14. GUZENKO P.Y., LEHNERT J., SCHÖLL E. *Application of Adaptive Methods to Chaos Control of Networks of Rössler Systems* // Cybernetics and Physics. - 2013. - Vol. 2, № 1. - P. 15-24.
15. SELIVANOV A., LEHNERT J., DAHMS T., HÖVEL P., FRADKOV A., AND SCHÖLL E. *Adaptive synchronization in delay-coupled networks of Stuart-Landau oscillators* // Phys. Rev. E. - 2012. - Vol. 85, № 1. - 016201.
16. SELIVANOV A., FRADKOV A., AND FRIDMAN E. *Passification-based decentralized adaptive synchronization of dynamical networks with time-varying delays* // Journal of The Franklin Institute. - 2015. - № 352. - P. 52-72.

## **CONTROL OF LINEAR MECHANICAL SYSTEM OSCILLATION WITH SEVERAL DEGREES OF FREEDOM**

**Sergei Plotnikov**, Department of Theoretical Cybernetics,  
Saint-Petersburg State University, St. Petersburg, graduate student,  
(waterwalf@gmail.com).

**Alexander Fradkov**, Department of Theoretical Cybernetics,  
Saint-Petersburg State University, St. Petersburg. Institute for  
Problems of Mechanical Engineering, St. Petersburg, Doctor of  
Science, professor (fradkov@mail.ru).

*Abstract: This paper presents an application of speed-gradient algorithm to oscillation control of linear system with several degrees of freedom by uniaxial MEMS gyroscope. For the control goal determination the energy functionals for each degree of freedom are derived, and the problem about achievement of desired levels of energy for these functionals is formulated. The speed-gradient algorithm application to gyro dynamics and obtained partial energy functionals is shown. The goal achievement is theoretically proven. And excitability indices, i.e. values characterizing the possibility to increase system energy due to the bounded control, are estimated for the considered system.*

**Keywords:** oscillation control, speed-gradient algorithm, excitability indices.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии ...*

*Поступила в редакцию ...  
Дата опубликования ...*