УДК 004.023
ББК 22.18

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ УПАКОВКИ

Ляпин М.Г.[1]
(Липецкий государственный педагогический университет, Липецк)
lymph@list.ru

В статье приводятся математическая модель и эвристичские подходы к решению задачи прямоугольной упаковки как задачи многокритериальной комбинаторной оптимизации. Для решения поставленной задачи применяются быстрые эвристики и известные метаэвристики, модифицированные для случая нескольких критериев оптимальности.

Ключевые слова: задача прямоугольной упаковки, многокритериальная оптимизация, метаэвристические алгоритмы.

Введение

Интерес к теме многокритериальной комбинаторной оптимизации (Multiobjective Combinatorial Optimization, MOCO) [5] высок среди исследователей, поскольку широк спектр применения методов решения таких задач на практике в управлении производственными процессами: при решении задач размещения, составления расписания, упаковки, планирования, задач геометрического проектирования, экономики, размещения объектов, управления процессом обработки данных, при-

---

[1] *Максим Геннадиевич Ляпин, аспирант (lymph@list.ru).*

нятия решений [3, 4]. К одной из таких задач относится задача прямоугольной упаковки, которая состоит в размещении прямоугольников внутри контейнеров таким образом, чтобы получить эффективное решение по нескольким критериям эффективности. В статье даётся общая постановка задачи МОСО, формулируется математическая модель многокритериальной задачи прямоугольной упаковки и предлагаются эвристические методы решения этой задачи, отличающиеся учётом внутренней структуры исходных данных и итогового плана упаковки. Методы решения поставленной задачи основываются на предложениях и алгоритмах, изложенных в статьях [1, 2].

1. Постановка задачи МОСО

Область допустимых решений задачи представляет собой множество $X \subset Z^n$. Необходимо найти

$$\min \left\{ f_1(S), \ldots, f_Q(S) : S \in X \right\}. \qquad (1)$$

Вектор критериев эффективности $f : R^n \to R^Q$ задаёт отображение множества допустимых решений на множество значений целевой функции.

$$Y = f(X) = \left\{ f(S) : S \in X \right\} \subset R^Q \qquad (2)$$

Запись "min" означает минимизацию с точки зрения отыскания эффективного (Парето-оптимального или рационального) решения. Подмножество $S \in X$ называется эффективным, если не существует другого допустимого решения $S' \in X$, такого, что $f_j(S') \le f_j(S)$ для всех $j = 1, \ldots, Q$ и $f_j(S') < f_j(S)$ хотя бы для одного *j*. Соответствующий вектор $f(S) = (f_1(S), \ldots, f_Q(S))$ называется недоминируемым.

Решить задачу МОСО значит построить множество недоминируемых решений задачи.

1.1. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ УПАКОВКИ

Задача прямоугольной упаковки состоит в том, что требуется упаковать в контейнеры n маленьких прямоугольных объектов с известными размерами таким образом, чтобы максимизировать коэффициент упаковки – отношение площади упакованных объектов к площади контейнера – и тем самым минимизировать количество используемых контейнеров. Однако, при управлении реальными производственными процессами возникает ряд критериев, учитывающих не только геометрические параметры объектов, но и другие, связанные, например, с особенностями технологического процесса или с экономической эффективностью решения.

Решение задачи упаковки обычно представляют в виде набора элементов $< X^*, Y^* >$, где $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y^* = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – векторы координат объектов упаковки, (x_i, y_i) – координаты нижнего левого угла *i*-го объекта. При этом должны выполняться геометрические ограничения: ортогональное размещение прямоугольников в упаковке; неперекрытие прямоугольников; неперекрытие прямоугольников гранями контейнеров.

Поиск этих координат в области допустимых решений перебором невозможен, поскольку таких точек бесконечное множество, поэтому применяют кодирование решения, которое приводится к координатному виду некоторым преобразованием.

Исходный список объектов можно задать с помощью приоритетного списка (Priority List, *PL*), содержащего номера объектов и определяющего порядок (последовательность) упаковки объектов. Тогда результат упаковки будет зависеть от последовательности объектов в приоритетном списке и правила упаковки объектов в контейнер. Если каждому объекту присваивается номер $i = 1, 2, \dots n,$ то $\pi = \left(\pi(j) \mid j = \overline{1, n}\right) \in PL$, где $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ – любая перестановка (биекция) номеров объектов *i*. Например, приоритетный список $\pi = \{4,1,3,2\}$ означает, что сначала будет производиться укладка в контейнер объекта 4, затем объекта 1, и т.д.

Сформулируем многокритериальную задачу упаковки, решение которой задаётся в виде отображения приоритетного списка в координаты нижних левых углов упакованных объектов. Область допустимых решений задачи представляет собой множество перестановок номеров объектов упаковки $PL \subset N^n$.

$$\min \left\{ f_1(S),..., f_Q(S) : S = \varphi(\pi) = (X^*, Y^*), \pi \in PL \right\}. \quad (3)$$

Отображение $\varphi : N^n \to R^n \times R^n$ переводит приоритетный список номеров объектов в координаты нижних левых углов упакованных объектов. Если перестановка π кодирует решение S, то отображение $S = \varphi(\pi)$ называется декодированием приоритетного списка в план упаковки, а сама функция φ называется декодером.

Вектор критериев эффективности $f : N^n \to R^Q$ задаёт отображение множества допустимых решений на множество значений целевой функции.

2. Эвристические методы решения

В [2] автором данной статьи приводился метод конструирования «жадных» эвристик с помощью перестановочных списков. Особенность этого метода в том, что исходные данные представляются в виде множества приоритетных списков, номера объектов в каждом из которых упорядочены в соответствии с критерием оптимизации. В частности, два списка упорядочены по убыванию высоты и длины объектов соответственно, что позволяет осуществлять равномерное заполнение контейнера по высоте и длине. Если критерии оптимизации вычисляются как функции от параметров объектов упаковки, известных априорно, то введение дополнительных упорядоченных перестановочных списков объектов, соответствующих заданному критерию, позволит построить субоптимальное решение. В [2] приведены результаты эксперимента на тестовых классах задач, где в качестве дополнительного критерия эффективности выступала функция от площади объекта упаковки. Подобный подход построения решений с помощью перестановочных списков показывает эффективность при решении многокритериальных задач прямоугольной упаковки. Описанный метод относится к однопроходным и малопроходным эвристикам, применяющимся для получения быстрого субоптимального решения или для получения начального решения для метаэвристических алгоритмов.

К метаэвристическим алгоритмам относят эволюционные и генетические алгоритмы, алгоритм имитации отжига, алгоритмы муравьиной колонии и некоторые другие. Для решения многокритериальных задач используются различные модификации и гибридные алгоритмы.

2.1 АЛГОРИТМ МУРАВЬИНОЙ КОЛОНИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ УПАКОВКИ

Принцип действия алгоритма заключается в следующем: на каждой итерации конечным числом агентов-муравьёв находятся допустимые решения задачи, причём на каждом шаге каждый агент добавляет к частично построенному решению новый компонент, руководствуясь некоторым вероятностным правилом [4]. Характеристиками нового компонента решения являются уровень феромона, показывающий, как часто данный компонент входил в лучшие решения на предыдущих итерациях алгоритма, и эвристическая информация, характерная для задачи. Эти характеристики определяют выбор с некоторой вероятностью направления передвижения агента.

Для одноцелевой задачи автором данной статьи был разработан алгоритм на основе декодера перестановочных списков

[1]. Построим модификацию алгоритма муравьиной колонии для решения многокритериальной задачи упаковки.

Необходимо решить задачу (3). Решением будем считать приоритетный список номеров объектов упаковки.

Общую структуру алгоритма можно описать следующими шагами.

Шаг 1. Строится Q колоний, каждая из которых будет строить путь для одного критерия эффективности, и ещё 1 колония муравьёв-агентов, которая будет строить решение по данным всех других колоний.

Шаг 2. В каждой колонии муравьёв для каждого объекта строится допустимое решение покомпонентно.

Шаг 3. Происходит глобальное обновление феромона для каждой колонии в зависимости от достигнутых значений критериев эффективности.

Шаг 4. Выполняются шаги 2 и 3 заданное число итераций.

Особенности построения допустимых решений на шаге 2 описаны далее.

Компонентом решения выступает номер объекта упаковки. Формируются два приоритетных списка $PL1$ и $PL2$. В $PL1$ располагаются номера всех объектов в порядке уменьшения их высоты, а в $PL2$ – номера объектов, отсортированные в порядке уменьшения длины. Моделью передвижения агентов может служить полный связный граф, вершинами которого являются компоненты решения, а рёбрами – связи между соответствующими компонентами. Передвижения и построение графа происходит последовательно с чередованием списков: первое значение вершины выбирается из $PL1$, второе из $PL2$, третье опять из $PL1$, и т.д. Следует отметить, что добавленные в решение объекты удаляются из обоих списков.

Феромон наносится на пары объектов упаковки (компонентов решения): первый объект i – последний из компонентов, добавленных в решение, а второй объект j – компонент-кандидат на добавление в решение. При этом эвристическая информация для пары объектов в каждой из колоний своя и зависит от вида целевой функции, например, площадь компонента-кандидата, с целью упаковки в первую очередь наиболее габаритных объектов.

Движение агента с номером u на s-ом шаге в колонии c основывается на вероятностном уравнении, которое определяет следующее ребро пути:

$$P_{u,j}^{c} = \frac{\tau_s^c(j)\cdot\left[\eta^c(j)\right]^{\beta}}{\sum_k \tau_s^c(k)\cdot\left[\eta^c(k)\right]^{\beta}} \quad (4)$$

Здесь $P_{u,j}^{c}$ – вероятность того, что агент с номером u выберет следующим компонент j, $\tau^c(j)$ – интенсивность феромона на ребре между вершинами i и j, которая определяется выражением (5), $\eta^c(j)$ – эвристическая информация для колонии c, а β – коэффициент важности эвристической информации, k – задаёт номера компонентов из множества кандидатов на добавление в решение агентом u.

$$\tau_s^c(j) = \frac{\sum_r \tau^c(j)}{s} \quad (5)$$

Выражение (5) определяет сумму всех значений феромона между вершинами i и j, делённую на число уже добавленных в решение компонентов (локальное обновление феромона), r – задаёт номера вершин i, которые уже есть в решении.

Построенный агентом путь определяет порядок упаковки объектов по некоторому эвристическому алгоритму. После построения агентами путей вычисляется значение критерия эффективности для данной колонии и происходит глобальное обновление значений феромонов:

$$\tau(i,j) = \rho\tau(i,j) + \sum_u \Delta\tau_u(i,j) \quad (6)$$

где ρ – коэффициент испарения феромона, u – номер агента,

$$\Delta\tau_u(i,j) = \frac{1}{L_u} \quad (7)$$

– это количество феромона, оставленного агентом u на ребре между вершинами i и j, где L_u определяется как композиция значений критериев эффективности решения, построенного агентом u, делённая на количество объектов упаковки n.

Были проведены вычислительные эксперименты на задаче упаковки из [2] с тремя критериями эффективности и 100 объектами упаковки. Размеры контейнеров были 100×100. Исходные размеры брались из библиотеки OR-library. Результаты сравнивались с наилучшими известными решениями этих задач. Коэффициент важности эвристической информации β изменялся от 1 до 8, количество агентов-муравьёв в каждой из колоний изменялось от 10 до 30, при этом коэффициент испарения феромона был равен 0.9 при начальном значении феромона 1.

Для каждой из колоний агентов-муравьёв рассчитывается критерий эффективности, с которым соотносится данная колония. Следует отметить, что при любом эффективном решении удалось получать достаточно плотную упаковку с малыми потерями на незаполненные участки контейнера, при этом отличие решения от оптимального было не более одного контейнера перерасхода. Лучшие результаты были получены при параметре β >4 и при максимальном значении численности колонии. При этом временные ресурсы существенно возрастали, поскольку увеличивался объём вычислений.

На рисунке 1 представлено сравнение однопроходной эвристики на базе перестановочных списков и алгоритма муравьиной колонии для задач класса 10.

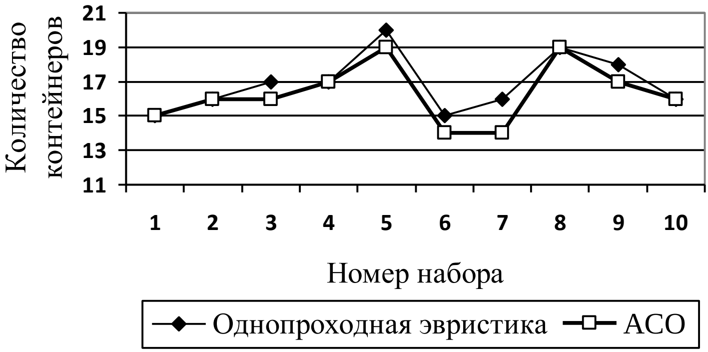

Рис. 1 – Сравнение результатов работы *ACO* и *однопроходной эвристики* на тестовых наборах из *OR-library*

Результаты

В статье сформулирована математическая модель многокритериальной задачи прямоугольной упаковки, которая учитывает кодирование решения с помощью приоритетного списка и отличается учётом внутренней структуры решения задачи. Для решения поставленной задачи предлагается использовать эвристические алгоритмы, а именно, однопроходные жадные эвристики, построенные с помощью метода, применяющего перестановочные списки. Такой эвристический подход отличается тем, что позволяет учитывать критерии эффективности в структуре кодирования приоритетных списков объектов упаковки. Автором разработан метаэвристический алгоритм, основанный на алгоритме муравьиной колонии, который позволяет находить эффективные решения и отличается учётом особенностей задачи упаковки и критериев эффективности в процессе построения допустимых решений и обновления значения феромона.

Литература

1. ЛЯПИН М.Г. *Метаэвристические алгоритмы решения задачи прямоугольной упаковки в полосу* // «Кибернетика и высокие технологии XXI века – C&T-2008»: Сб. трудов IX Международной научно-технической конференции. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2008. С. 320–327.
2. ЛЯПИН М.Г. *Модели и методы решения многоцелевой задачи ортогональной упаковки* / С.Л. Блюмин, М.Г. Ляпин. // Системы управления и информационные технологии: Научно-технический журнал. Воронеж: Научная книга, 2009. №3 (37). С. 4–8.
3. СЕМЕНОВА Н.В. *Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок* / Н.В. Семенова, Л.Н. Колечкина, А.Н. Нагорная // Кибернетика и системный анализ. Киев: Институт кибернетики НАН Украины, №3, 2008. С. 158–172.
4. EHRGOTT M. *Approximative solution methods for multiobjective combinatorial optimization* / M. Ehrgott, X. Gandibleux // TOP. Vol. 12. 2004. № 1. P. 1–63.
5. GANDIBLEUX X. *1984–2004 — 20 years of multiobjective metaheuristics. But what about the solution of combinatorial problems with multiple objectives?* / X. Gandibleux, M. Ehrgott // Lecture notes in computer science. Vol. 3410. 2005. P. 33–46.

HEURISTICS FOR THE MULTIOBJECTIVE RECTANGULAR PACKING PROBLEM

Lyapin Maksim, Lipetsk State Pedagogical University, Lipetsk, postgraduate (lymph@list.ru).

Abstract: *this article presents mathematical model and heuristics for solving the rectangular packing problem as multiobjective combinatorial optimization problem. Fast heuristics and modification of well-knowing metaheuristics apply for solving this multiobjective problem.*

Keywords: rectangular packing problem, multiobjective optimization, metaheuristics.