

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ НАГРЕВА ДИСКА НА БАЗЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ МОДЕЛИ

Гусев С. С.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Аннотация. В данной работе рассматриваемая задача о приведении температуры диска к заданной температуре к конечному моменту времени. Постановка задачи исследования заключается в построении решения задачи для определения оптимального управления процессом нагрева диска. Новизна данной работы заключается в привлечении средств программирования и визуализации к решению задачи оптимизации. В работе приводится решение задачи программирования и построение неявной центрально-разностной схемы, которая сводится к введению безразмерных переменных, что приводит к построению шаблона неявной центрально-разностной схемы, которая представлена далее на рисунке 3. Также приводится определение порядка аппроксимации неявной центрально-разностной схемы, где показывается, что погрешность аппроксимации данной схемы имеет второй порядок. Формулируется и приводится доказательство устойчивости неявно-разностной схемы, где исследуется неявно-разностная схема на устойчивость, для чего мы воспользуемся необходимым спектральным условием Неймана устойчивости схемы по начальным данным. Затем приводится представление граничных условий в разностном виде, где граничные условия в разностном виде должны также иметь второй порядок аппроксимации. И в конце приводится метод решения задачи оптимального управления, где мы сводим задачу оптимального управления к задаче условной оптимизации.

Ключевые слова: температура, диск, оптимальное управление, неявная центрально-разностная схема.

1. Введение

Задачи оптимизации встречаются практически во всех сферах человеческой деятельности, так как любое разумное действие является в определенном смысле и оптимальным. Ведь оно выбрано после сравнения с другими (менее предпочтительными) действиями. Оптимизация - целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при

¹ Сергей Сергеевич Гусев, соискатель (gs-serg@mail.ru).

соответствующих условиях. Статья написана для ознакомления с началами численных методов. Теория численных методов излагается с использованием элементарных математических средств [6], а для иллюстрации качества методов используются простейшие математические модели, в том числе в статье рассматривается численный метод решения задачи, а, именно, численная реализация метода оптимизации для нахождения оптимального управления процессом нагрева диска. Приводится построение неявной центрально-разностной схемы, которое сводится к введению безразмерных переменных, что приводит к построению шаблона неявной центрально-разностной схемы.

Если отвлечься от экономического, физического или иного содержания постановки задач, то все они сводятся к следующей оптимизационной задаче, а, именно, нахождению минимаксной функции, функционала на некотором множестве некоторого пространства, то есть здесь выражает качество управления, а множество определяется ограничениями на ресурсы, возможностями экономических или других процессов в изучаемой системе. Статья посвящена постановке задачи, построению решения задачи для определения оптимального управления процессом нагрева диска. Основным результатом работы является численная реализация метода оптимизации для нахождения оптимального управления процессом нагрева диска.

2. Постановка задачи

В докладе рассматривается задача оптимального управления нестационарного процесса теплопроводности в диске или в шаре. Постановка задачи исследования заключается в построении решения задачи для определения оптимального управления процессом нагрева диска. Новизна данной работы заключается в привлечении средств программирования и визуализации к решению задачи оптимизации. В первом случае мы имеем осевую симметрию, во втором – центральную [8 - 10], которые приведены ниже на рисунках 1 и 2 соответственно.

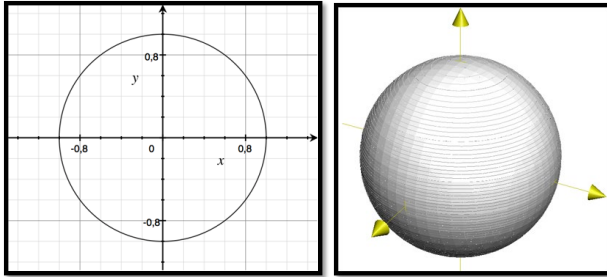


Рис.1. Осевая симметрия Рис. 2. Центральная симметрия
 В данном случае модель процесса описывается одномерным параболическим уравнением:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n k(r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где

$n = 1$ – см. рисунок 1,

$n = 2$ – см. рисунок 2,

$\varphi(t, r)$ – температура тела в точке r в момент времени t ,

$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, ($0 \leq x_0 \leq 1$), ($0 \leq y_0 \leq 1$)

t_k – конечный момент времени ($0 \leq t \leq t_k$),

R – радиус диска или шара ($0 \leq r \leq R$),

k – коэффициент теплопроводности. В дальнейшем будем считать его не зависящим от r , т.е. $k = const$.

При $t = 0$, ставится начальное условие:

$$\varphi(0, r) = \varphi_0(r). \quad (2)$$

При $r = R$ граничное условие имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi(t, R)}{\partial r} + \alpha \varphi(t, R) = \alpha U(t). \quad (3)$$

$U(t)$ - температура на границе, которая находится полностью в нашем распоряжении. В данной работе $U(t)$ - является управляющей функцией, зависящей от времени, а α – является

положительным коэффициентом пропорциональности, называемый коэффициентом теплообмена.

При $r = 0$, ставится условие ограниченности, т.е. $|\varphi(t, 0)| < \infty$, которое является следствием непрерывности и дифференцируемости решения уравнения (1):

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^n k \frac{\partial \varphi(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

В данной работе рассматриваемая задача о приведении температуры диска к заданной температуре к конечному моменту времени. А именно, требуется найти функцию $\varphi(t, r)$, которая является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (2) – (4), найти допустимое управление $U(t)$, т.е. функцию $U(t)$, удовлетворяющую ограничениям вида:

$$0 < U^- \leq U(t) \leq U^+, \quad (5)$$

где U^+ и U^- - заданные константы, а также, управляя температурой на границе, к заданному моменту $t_k > 0$ распределение температуры в области сделать как можно ближе к заданному распределению $\varphi_g(r)$, $0 \leq r \leq R$.

Математическая формулировка этой задачи: рассмотрим функционал, характеризующий отклонение текущей температуры от целевой температуры. Необходимо определить функцию $U(t)$, которая доставляет минимум данного функционала:

$$J = \int_0^R r^n [\varphi(t_k, r) - \varphi_g(r)]^2 dr + \beta \int_0^{t_k} U(t)^2 dt. \quad (6)$$

Прежде всего найдем выражение для вариации функционала (6) через вариацию управления (5). Для этого придадим управлению $U(t)$ некоторое малое приращение $\delta U(t)$. Тогда, очевидно, также, что малые приращения получают и функция $\varphi(t, r)$, и функционал (6). При этом уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial t} = \frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial r} \right) \quad (7),$$

а функционал (6):

$$I + \delta J = \int_0^R r^n [\varphi(t_k, r) + \delta\varphi(t_k, r) - \varphi_g(r)]^2 dr + \beta \int_0^{t_k} (U(t) + \delta U(t))^2 dt$$

Отметим, то функция $\varphi(t, r)$ удовлетворяет уравнению (1). Вычтем из уравнения (7) уравнение (1). Получим:

$$\frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right)$$

Отсюда, зная общий вид первой вариации и ограничиваясь членами первого порядка малости, мы получим для $\delta\varphi(t, r)$

так называемое уравнение в вариациях следующего вида:

$$\frac{\partial\delta\varphi}{\partial t} = \frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial\delta\varphi}{\partial r} \right) \quad (8)$$

со следующими граничными и начальными условиями:

$$\delta\varphi(0, r) = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r^n \frac{\partial\delta\varphi(t, r)}{\partial r} \right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial\delta\varphi(t, R)}{\partial r} + \alpha\delta\varphi(t, R) = \alpha\delta U(t).$$

Ограничиваясь также членами первого порядка малости в выражении для приращения функционала, получим формулу для вариации функционала:

$$\delta J = \int_0^R 2r^n [\varphi(t_k, r) - \varphi_g(r)] \delta\varphi(t_k, r) dr + 2\beta \int_0^{t_k} U(t) \delta U(t) dt. \quad (10)$$

Введем скалярное произведение двух функций $f(t, r)$ и $g(t, r)$ в гильбертовом пространстве $L_2[Q]$, $Q = \{0 \leq r \leq R\}$ по следующему правилу [3]:

$$\langle f, g \rangle (t) = \int_0^R r^n f(t, r) g(t, r) dr.$$

Отсюда видно, что $\langle f, g \rangle$ является функцией времени.

Покажем, что

$$\int_0^R 2r^n [\varphi(t_k, r) - \varphi_g(r)] \delta\varphi(t_k, r) dr = \alpha k R^n \int_0^{t_k} \psi(t, R) \delta U(t) dt, \quad (11)$$

где $\psi(t, R)$ - решение вспомогательного сопряженного уравнения вида [3]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r} \right), \quad (12)$$

с граничными условиями:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^n k \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi(t, R)}{\partial r} + \alpha \psi(t, R) = 0. \quad (13)$$

Следует отметить, что природа уравнения (12) такова, что задание начальных условий при $t = 0$ делает задачу (12), (13) некорректной и поэтому условие надо выставлять при $t = t_k$, а решение этой задачи можно получить, двигаясь от момента $t = t_k$ к $t = 0$. О том, какие условия необходимо выставить при $t = t_k$, будет указано несколько позже [2]. Продолжим вывод равенства (11), пользуясь сопряженной системой и введенными скалярным произведением. С учетом условий (8) – (9) и (12) – (13) имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^R 2r^n [\varphi(t_k, r) - \varphi_g(r)] \delta\varphi(t_k, r) dr &= \int_0^R \psi(t_k, r) \delta\varphi(t_k, r) dr \\ &= \int_0^R \int_0^{t_k} \frac{\partial}{\partial t} (\psi(t_k, r) \delta\varphi(t_k, r)) dt dr \\ &= \iint_Q -\delta\varphi \frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ &\quad + \psi \frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial \delta\varphi}{\partial r} \right) dr dt \stackrel{!}{=} \int_0^R \left(\int_0^{t_k} k r^n \frac{\partial \delta\varphi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} dr \right. \\ &\quad \left. - \int_0^R k r^n \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \delta\varphi}{\partial r} dr \right) dt \stackrel{!!}{=} \int_0^{t_k} k r^n \frac{\partial \delta\varphi}{\partial r} \psi|_R dt \\ &\quad - \int_0^{t_k} k r^n \frac{\partial \psi}{\partial r} \delta\varphi|_R dt \stackrel{!!!}{=} \alpha k R^n \int_0^{t_k} \psi(t, R) \delta U(t) \end{aligned}$$

! – проинтегрируем по частям.

!! – в силу второго условия (9) и первого условия (13)

!!! – в силу третьего условия (9) и второго условия (13)

Равенство (11) получено. Подставляя (11) в (10) будем иметь:

$$\delta J = \alpha k R^n \int_0^{t_k} \psi(t, R) \delta U(t) + 2 \beta \int_0^{t_k} U(t) \delta U(t) dt.$$

т.е.

$$\delta J = \int_0^{t_k} (\alpha k R^n \psi(t, R) + 2 \beta U(t)) \delta U(t) dt. \quad (14)$$

Далее подчиним $\psi(t_k, r)$ следующему условию:

$$\psi(t_k, r) = 2[\varphi(t_k, r) - \varphi_g(r)]. \quad (15)$$

Кроме того, из (8) следует, что $\delta\varphi(0, r) = 0$. Отсюда имеем:

$$\int_0^R 2r^n [\varphi(t_k, r) - \varphi_g(r)] \delta\varphi(t_k, r) dr = \alpha k R^n \int_0^{t_k} \psi(t, R) \delta U(t) dt.$$

Таким образом, в работе была получена формула для вариации минимизируемого функционала, выраженную через вариацию управления. Эта формула позволит применять для решения нашей задачи известные численные методы оптимизации, в том числе и метод градиентного спуска. Стоит отметить, что многие исследователи изучают процессы теплопроводности. В работах [13, 14] рассматриваются более сложные модели и исследуется вопрос о свойствах дискретизированных задач, а именно изучаются вопросы сходимости предлагаемых методов и разностных схем.

3. Численный метод решения задачи

2.1. ПОСТРОЕНИЕ НЕЯВНОЙ ЦЕНТРАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Введем безразмерные переменные следующим образом [1]:

$$r' = \frac{r}{R}, t' = \frac{kt}{R^2}.$$

В этих переменных управление (1) запишется в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (16)$$

а наша краевая задача определена в прямоугольнике:

$$D = (0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq t_k)$$

Отметим, что здесь мы переменные r^j и t^j снова обозначили через r и t .

Условие (3) будет иметь тот же вид, если иметь ввиду, что коэффициент теплообмена α теперь примет вид αR , а эту величину мы снова обозначим через α .

Введем сетки:

$$\omega_h = \{r_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N\}$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

с шагами $h = \frac{1}{N}$ и $\tau = \frac{t_k}{j_0}$.

Обозначим через φ_i^j значение в узле (r_i, t_j) сеточной функции φ , определенной на D . Заменяя производные $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^n k \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$ их разностными выражениями построим неявную центрально-разностную схему для уравнения (16).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_i^{j+1}}{h}.$$

Шаблон неявной центрально-разностной схемы выглядит следующим образом:

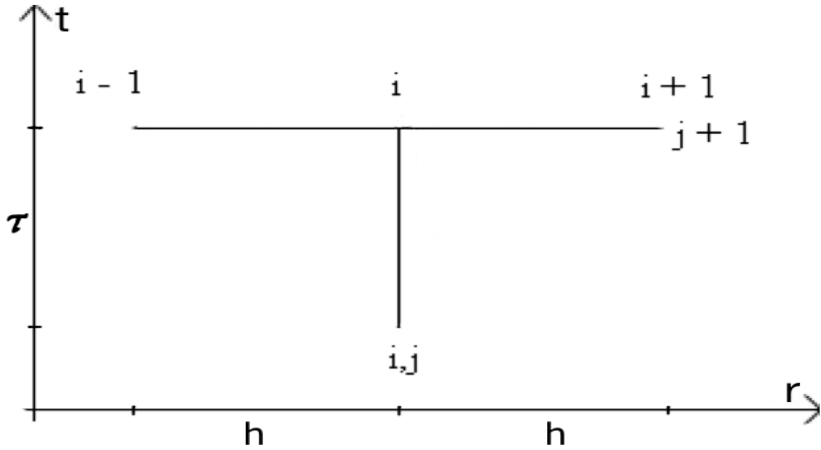


Рис.3. Шаблон неявно-разностной схемы

Применим оператор $\frac{\partial}{\partial r}$ к $r^n \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ и заменим производную по радиусу ее разностным выражением. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_i^{j+1}}{h} \right) \\ &= \left(\frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_i^{j+1}}{h^2} - \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_{i-1}^{j+1}}{h^2} \end{aligned}$$

Следовательно, схема будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau} &= \frac{1}{r_i^n h} \left(\left(\frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_i^{j+1}}{h} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_{i-1}^{j+1}}{h} \right). \quad (17) \end{aligned}$$

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ НЕЯВНОЙ ЦЕНТРАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Покажем, что погрешность аппроксимации данной схемы имеет второй порядок.

Представим в виде ряда Тейлора $\varphi_{i+1}^{j+1}, \varphi_{i-1}^{j+1}$ в окрестности точки (r_i, t^{j+1}) :

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1}^{j+1} &= \varphi_i^{j+1} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 \\ &\quad + \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial r^5} \Big|_i^{j+1} h^5 + \dots, \\ \varphi_{i-1}^{j+1} &= \varphi_i^{j+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 \\ &\quad - \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial r^5} \Big|_i^{j+1} h^5 + \dots,\end{aligned}$$

Подставим представления в ряд Тейлора в правую часть центрально-разностной схемы [5, 7]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_i^n h} \left(\frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_i^{j+1}}{h} - \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_{i-1}^{j+1}}{h} \\ = \frac{1}{r_i^n h^2} \left[\left(\frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n \varphi_{i+1}^{j+1} - \left(\left(\frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n - \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \right) \varphi_i^{j+1} \right. \\ \left. + \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \varphi_{i-1}^{j+1} \right] = \\ = \frac{1}{r_i^n h^2} \left[\left(\frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n \left(\varphi_i^{j+1} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 + \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial r^5} \Big|_i^{j+1} h^5 + \dots \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \left(\varphi_i^{j+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 - \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial r^5} \Big|_i^{j+1} h^5 + \dots \right) \right. \\ \left. - \left(\left(\frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n - \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \right) \varphi_i^{j+1} \right]\end{aligned}$$

Вынесем за скобки коэффициенты при φ_i^{j+1} и сократим с последним слагаемым. Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_i^n h^2} \left[\left(\frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial r^5} \Big|_i^{j+1} h^5 + \dots \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 - \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial r^5} \Big|_i^{j+1} h^5 + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

Очевидно, что $r_i \simeq \frac{r_{i+1} + r_i}{2}$ и $r_i \simeq \frac{r_i + r_{i-1}}{2}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_i^n h^2} \left[r_i^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 + \dots \right) \right. \\ & \quad \left. + r_i^n \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \dots \right) \right] = \\ & = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 + \dots \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 - \dots \right] \\ & = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 + \dots \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} + O(h^2) \end{aligned}$$

Преобразуя эту схему и учитывая, что $r_i = ih$, $r_{i+1} = (i+1)h$, $r_{i-1} = (i-1)h$, будем иметь:

$$\frac{(2i+1)^n}{2^n i^n h^2} \varphi_{i+1}^{j+1} - \left[\frac{(2i+1)^n + (2i-1)^n}{2^n i^n h^2} + \frac{1}{\tau} \right] \varphi_i^{j+1} + \frac{(2i-1)^n}{2^n i^n h^2} \varphi_{i-1}^{j+1} = \frac{\varphi_i^j}{\tau}$$

Внесем в скобки $\frac{1}{2^n i^n}$:

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{1}{2i}\right)^n}{h^2} \varphi_{i+1}^{j+1} - \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{2i}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2i}\right)^n}{h^2} + \frac{1}{\tau} \right] \varphi_i^{j+1} + \frac{\left(1 - \frac{1}{2i}\right)^n}{h^2} \varphi_{i-1}^{j+1} \\ = \frac{\varphi_i^j}{\tau}. \quad (18) \end{aligned}$$

3.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНО-РАЗНОСТНОЙ ФУНКЦИИ

Исследуем эту неявно-разностную схему на устойчивость. Для этого воспользуемся необходимым спектральным условием Неймана устойчивости схемы по начальным данным [2, 3]:

«Спектр оператора перехода со слоя на слой должен лежать в единичном круге $|\lambda(\alpha)| \leq 1$.»

Возьмем в качестве начального условия гармонику $e^{i\alpha n}$. Рассмотрим оператор перехода со слоя на слой. Для удобства заменим обозначение φ_i^j на φ_m^j , так как в доказательстве будет фигурировать мнимая единица i . Получим:

$$\varphi_m^j = \lambda^j e^{i\alpha m}, \quad j = 1, 2, \dots, j_0$$

Пусть $\frac{\tau}{h^2} = \mathcal{R} = \text{const}$. При $j = 0$ в равенстве (18) получаем:

$$\mathcal{R} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n e^{i\alpha} - \left[\mathcal{R} \left(\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n \right) + 1 \right] \lambda + \mathcal{R} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n e^{-i\alpha} = 1$$

Отсюда выразим λ :

$$\lambda = \frac{\mathcal{R} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n e^{i\alpha} + \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-i\alpha} \right) + 1}{\mathcal{R} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) + 1}.$$

В начале рассмотрим случай осевой симметрии при $n = 1$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\mathcal{R} \left(\frac{3}{2} e^{i\alpha} + \frac{1}{2} e^{-i\alpha} \right) + 1}{2\mathcal{R} + 1} = \frac{\mathcal{R} \left(e^{i\alpha} + \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \right) + 1}{2\mathcal{R} + 1} \\ &= \frac{\mathcal{R}(2\cos\alpha + i\sin\alpha) + 1}{2\mathcal{R} + 1}. \end{aligned}$$

Проверим спектральный критерий:

$$\frac{\Re(2\cos\alpha + isin\alpha) + 1}{2\mathcal{R} + 1} \leq 1,$$

$$\left| \cos\alpha + \frac{1}{2} isin\alpha \right| \leq 1,$$

$$\cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \leq 1.$$

Представим правую часть в виде основного тригонометрического тождества:

$$\cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha,$$

$$-\frac{1}{4} \sin^2 \alpha \leq \sin^2 \alpha.$$

Следовательно для любых α неявно-разностная схема устойчива для осевой симметрии.

Теперь проверим для центральной симметрии при $n = 2$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\Re\left(\frac{9}{4} e^{i\alpha} + \frac{1}{4} e^{-i\alpha}\right) + 1}{\frac{5}{2}\mathcal{R} + 1} = \frac{\Re\left(2e^{i\alpha} + \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{4}\right) + 1}{\frac{5}{2}\mathcal{R} + 1} \\ &= \frac{\Re\left(\frac{5}{2}\cos\alpha + 2isin\alpha\right) + 1}{\frac{5}{2}\mathcal{R} + 1}. \end{aligned}$$

Проверим спектральный критерий:

$$\frac{\Re\left(\frac{5}{2}\cos\alpha + 2isin\alpha\right) + 1}{\mathcal{R}\frac{5}{2} + 1} \leq 1,$$

$$\left| \cos\alpha + \frac{4}{5} isin\alpha \right| \leq 1,$$

$$\cos^2 \alpha - \frac{16}{25} \sin^2 \alpha \leq 1.$$

Представим правую часть в виде основного тригонометрического тождества:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha - \frac{16}{25} \sin^2 \alpha &\leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha, \\ -\frac{16}{25} \sin^2 \alpha &\leq \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Неравенство выполняется для любых α . Следовательно не-явно-разностная схема устойчива для осевой ($n = 1$) и центральной ($n = 2$) симметриях для любых $\mathcal{R} = \frac{\tau}{h^2}$. Таким образом устойчивость схемы доказана.

3.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В РАЗНОСТНОМ ВИДЕ

В дальнейшем для удобства будем опускать верхний индекс ($j + 1$), т.е. будем считать, что $\varphi_i = \varphi_i^{j+1}$. Представим схему (18) следующим образом [3, 5]:

$$A_i \varphi_{i-1} + B_i \varphi_{i+1} - C_i \varphi_i = \frac{\varphi_i^j}{\tau}, \quad (19)$$

где:

$$A_i = \frac{\left(1 - \frac{1}{2i}\right)^n}{h^2}; \quad B_i = \frac{\left(1 + \frac{1}{2i}\right)^n}{h^2}; \quad C_i = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{2i}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2i}\right)^n}{h^2} + \frac{1}{\tau} \right] \quad (20)$$

здесь: $i = 1, \dots, N - 1$.

Далее особо следует остановиться на выводе граничных условий (3) и (4) в разностном виде. Покажем, что порядок аппроксимации схемой (18) – (19) уравнения (16) – второй.

Для этого применим оператор $\frac{\partial}{\partial r}$ в правой части уравнения (1)

получим:

$$\frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

Воспользуемся представленными выше аппроксимациями для $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, а для $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$ воспользуемся следующей:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} - 2\varphi_i^{j+1} + \varphi_{i-1}^{j+1}}{h^2}.$$

Тогда будем иметь:

$$\left(\frac{k}{h^2} + \frac{k}{2r_i h}\right) \varphi_{i+1}^{j+1} - \frac{2k}{h^2} \varphi_i^{j+1} + \left(\frac{k}{h^2} - \frac{k}{2r_i h}\right) \varphi_{i-1}^{j+1} = \frac{\varphi_i^j}{\tau}.$$

Следовательно, должно выполняться неравенство:

$$\frac{k}{h^2} - \frac{k}{2r_i h} \geq 0$$

Преобразуем. Отсюда следует, что:

$$h \leq 2r_i.$$

Поэтому граничные условия в разностном виде должны также иметь второй порядок аппроксимации.

Займемся аппроксимацией условия (3). Для этого введем фиктивную точку $i = N + 1$. Тогда условие (3) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\varphi_{N+1} - \varphi_{N-1}}{2h} + \alpha \varphi_N = \alpha U(t_{j+1}). \quad (21)$$

При этом точка с номером N становится внутренней точкой, а значит в ней выполнено уравнение (16), т.е.

$$A_N \varphi_{N-1} + B_N \varphi_{N+1} - C_N \varphi_N = \frac{\varphi_N^j}{\tau}. \quad (22)$$

Из уравнения (19) можем выразить φ_{N+1} и подставить в уравнение (20). В результате, будем иметь:

$$\varphi_{N+1} = \varphi_{N-1} - 2ah\varphi_N + 2ahU.$$

Здесь $U = U(t_{j+1})$. Подставим это выражение для φ_{N+1} в уравнение (20):

$$(A_N + B_N)\varphi_{N-1} - (2ahB_N + C_N)\varphi_N = \frac{\varphi_N^j}{\tau} - 2ahB_NU$$

или:

$$\varphi_{N-1} = \tilde{L}_N \varphi_N + \tilde{M}_N, \quad (23)$$

где:

$$\tilde{L}_N = \frac{(2\alpha h B_N + C_N)}{(A_N + B_N)}$$

$$\tilde{M}_N = \frac{\frac{\varphi_N^j}{\tau} - 2\alpha h B_N U}{(A_N + B_N)}$$

Таким образом, уравнение (23) есть аппроксимация условия (3).

Далее займемся аппроксимацией условия (4). Отметим, что процесс решения уравнения (16) таков, что в каждый момент времени \tilde{t}_{j+1} мы фактически решаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{1}{x^n} \frac{d}{dx} \left(x^n \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x) \quad (24)$$

$$0 < x < 1, \quad n = 1 \text{ или } 2, \quad q(x) \geq 0.$$

Это есть уравнение второго порядка, а значит существует два линейно независимых решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$, и при этом $u_1(x)$ ограничено при $x \in [0,1]$. Тогда для дифференциального уравнения

$$\frac{1}{x^n} \frac{d}{dx} \left(x^n \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = 0$$

можно применить формулу Лиувилля-Остроградского. Докажем ее для нашего конкретного случая. Представим наше дифференциальное уравнение в следующем виде [11]:

$$\frac{1}{x^n} \frac{d}{dx} \left(x^n \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - q(x).$$

Выпишем определитель Вронского для этого уравнения:

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}.$$

Продифференцируем его. Получим:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1'' & u_2'' \end{vmatrix}.$$

Первое слагаемое равно 0, так как этот определитель содержит две одинаковые строки. Подставив:

$$u_1'' = -\frac{1}{x}u_1' + qu_1,$$

$$u_2'' = -\frac{1}{x}u_2' + qu_2$$

во второе слагаемое получим:

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ -\frac{1}{x}u_1' + qu_1 & -\frac{1}{x}u_2' + qu_2 \end{vmatrix}.$$

Вычтем первую строчку, домноженную на q :

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ -\frac{1}{x}u_1' & -\frac{1}{x}u_2' \end{vmatrix} = -\frac{W}{x}.$$

Решения линейно независимы, поэтому:

$$W \neq 0 \Rightarrow \frac{dW}{W} = -\frac{dx}{x}.$$

Дифференциальное уравнение с разделяемыми переменными:

$$\ln|W| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \ln|W| = \ln\left(\frac{C}{x}\right) \Rightarrow W = \frac{C}{x}.$$

Формула доказана. Тогда справедливы следующие утверждения [12]:

1. Если $q(0)$ и $f(0)$ конечны (а в нашем случае так оно и есть), то:

$$u_1(0) \neq 0, \quad u_1'(0) = 0,$$

2. Если $q(x), f(x) \in C^{(2)}[0,1]$, то производные $u_1', u_1'', u_1^{(3)}, u_1^{(4)}$ ограничены при $x \in [0,1]$,

3. Второе линейно независимое с $u_1(x)$ решение $u_2(x)$ уравнение (21) имеет при $x = 0$ логарифмическую особенность.

Краевые условия нашей задачи выделяют единственное решение нашего уравнения. В силу уравнения (1), условие (4) можно заменить требованием:

$$u'(0) = 0,$$

что в нашем случае означает:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(0, t) = 0. \quad (25)$$

Покажем теперь, что разностное краевое условие

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} - \frac{h}{2(n+1)} \left(\frac{\varphi_0}{\tau} - \frac{\varphi_0^j}{\tau} \right) = 0$$

аппроксимирует условие (3) с порядком h^2 .

В самом деле, погрешность аппроксимации этого условия, очевидно равна:

$$v = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} - \frac{h}{2(n+1)} \left(\frac{\varphi_0}{\tau} - \frac{\varphi_0^j}{\tau} \right)$$

при этом:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + h\varphi_{0,r} + 0.5h^2\varphi_{0,rr} + O(h^3)$$

тогда:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} = \varphi_{0,r} + 0.5h\varphi_{0,rr} + O(h^2)$$

получаем:

$$v = \varphi_{0,r} + 0.5h\varphi_{0,rr} - \frac{h}{2(n+1)} \left(\frac{\varphi_0}{\tau} - \frac{\varphi_0^j}{\tau} \right) + O(h^2) \quad (26)$$

Из уравнения

$$\frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} \left(r^n \frac{du}{dr} \right) - \frac{\varphi}{\tau} = \frac{\varphi^j}{\tau}$$

имеем:

$$\varphi_{rrr} = \frac{\varphi}{\tau} - \frac{\varphi^j}{\tau} - \frac{n\varphi_r}{\tau}$$

Так как $\varphi_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, то $\frac{\varphi_r}{r} \rightarrow \varphi_{0,rr}$ и $\varphi_{0,rr} = \left(\frac{\varphi_0}{\tau} - \frac{\varphi_0^j}{\tau} \right) - n\varphi_{0,r}$.

Отсюда:

$$\varphi_{0,rr} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\varphi_0}{\tau} - \frac{\varphi_0^j}{\tau} \right)$$

и из (26) следует, что: $v = O(h^2)$.

Разностное краевое условие при $r = 0$ будем записывать в виде:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{hh^*} - \frac{\varphi_0}{\tau} = -\frac{\varphi_0^j}{\tau}, \quad h^* = \frac{h}{2(n+1)} = \begin{cases} \frac{h}{4}, n = 1 \\ \frac{h}{6}, n = 2 \end{cases} \quad (27)$$

Для решения уравнения (16) будем применять метод прогонки, используя при этом неявную центрально-разностную схему (19), (20) и разностные краевые условия (23) и (27).

Отметим, что условие (27) можно записать в виде:

$$\varphi_0 \left(1 + \frac{hh^*}{\tau}\right) = \varphi_1 + \frac{hh^* \varphi_0^j}{\tau}$$

или

$$\varphi_0 = \frac{\tau \varphi_1}{(\tau + hh^*)} + \frac{hh^* \varphi_0^j}{(\tau + hh^*)} \quad (28)$$

Пусть подобные соотношения справедливы и для $i = 1, 2, \dots, N-1$, т.е.

$$\varphi_{i-1} = L_i \varphi_i + M_i \quad (29)$$

где L_i и M_i некоторые числа. Подставим соотношение (29) в схему (19), (20). Будем иметь:

$$A_i(L_i \varphi_i + M_i) + B_i \varphi_{i+1} - C_i \varphi_i = -\frac{\varphi_i^j}{\tau}$$

Отсюда:

$$(A_i L_i - C_i) \varphi_i + B_i \varphi_{i+1} = -\frac{\varphi_i^j}{\tau} - A_i M_i$$

$$\varphi_i = \frac{B_i}{C_i - A_i L_i} \varphi_{i+1} + \frac{\varphi_i^j / \tau + A_i M_i}{C_i - A_i L_i}$$

Таким образом, мы получим следующие рекуррентные соотношения

$$L_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i L_i}; \quad M_{i+1} = \frac{\varphi_i^j / \tau + A_i M_i}{C_i - A_i L_i} \quad (30)$$

Из (28) следует, что:

$$L_1 = \frac{\tau}{(\tau + hh^*)}; \quad M_1 = \frac{hh^* \varphi_0^j}{(\tau + hh^*)} \quad (31)$$

По формулам (30) с учетом (31) мы легко можем вычислить L_i и M_i для $i = 1, 2, \dots, N$. Пусть при $i = N$ мы вычислили L_N и M_N . Тогда, используя формулы (22), мы имеем:

$$\begin{cases} \varphi_{N-1} = L_N \varphi_N + M_N \\ \varphi_{N-1} = \tilde{L}_N \varphi_N + \tilde{M}_N \end{cases}$$

Отсюда легко видеть, что:

$$L_N \varphi_N + M_N = \tilde{L}_N \varphi_N + \tilde{M}_N$$

и далее:

$$\varphi_N = \frac{\tilde{M}_N - M_N}{L_N - \tilde{L}_N} \quad (32)$$

Используя формулу (32) и соотношение (29), двигаясь «назад», легко вычислить все значения φ_i ($i = 0, \dots, N$).

Далее обозначим φ_i через φ_i^j , можно таким же образом определить значения φ_i на следующем слое по времени.

Следует отметить следующий факт. Для решения нашей задачи оптимального управления нам понадобится кроме уравнения (16) решать сопряженное уравнение (12) с краевыми условиями (13) и «конечным» условием (15). Для этого также можно использовать неявную центрально-разностную схему. Решение этого уравнения происходит в обратном времени, т.е. от $t = t_k$ до 0, при этом знак «-» в правой части превращается в «+».

3.5. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В силу того, что управление U зависит от времени, будем аппроксимировать его кусочно-постоянными функциями следующего вида [4, 11, 15]:

$$U(t) = U_i, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, j^0 - 1 \quad (33)$$

где U_i есть константа на интервале, равном длине шага по времени. Заметим, что это есть не единственный способ аппрокси-

мации. Например, можно считать управление константой на интервале, равном нескольким шагам по времени (так называемый квазиоптимальный режим). Мы же будем использовать аппроксимацию вида (33). Тогда наш минимизируемый функционал становится функцией N переменных, а именно:

$$J = J(U_1, U_2, \dots, U_{j^0}) \quad (34)$$

и для его минимизации можно использовать известные методы оптимизации, в том числе и методы градиентного спуска.

Напомним, что в данном случае мы сводим задачу оптимального управления к задаче условной оптимизации, так как на переменные U_1, U_2, \dots, U_{j^0} , согласно (5) наложено ограничение

$$U^- \leq U_i \leq U^+, \quad i = 1, 2, \dots, j^0. \quad (35)$$

Представим вариацию минимизируемого функционала (14) в новых безразмерных переменных:

$$\delta J = \int_0^{t_k} (\alpha \psi(t, 1) + 2\beta U(t)) \delta U(t) dt \quad (36)$$

Заменим интегрирование конечным суммированием. Имеем:

$$\delta J = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\alpha \frac{\psi(t_j) + \psi(t_{j+1})}{2} + 2\beta U_j \right) \delta U_j \tau$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial J}{\partial U_j} = \left(\alpha \frac{\psi(t_j) + \psi(t_{j+1})}{2} + 2\beta U_j \right) \tau \quad (37)$$

$$j = 0, 1, \dots, j^0 - 1$$

Зная величины (37), легко условием (35) выписать формулы для градиентного спуска

$$\begin{aligned} \tilde{U}_j^{(k+1)} &= U_j^{(k)} - \gamma \frac{\partial J}{\partial U_j} \\ U_j &= \begin{cases} U^+, & \text{если } \tilde{U}_j^{(k+1)} > U^+ \\ \tilde{U}_j, & \text{если } U^- \leq U_j^{(k+1)} \leq U^+ \\ U^-, & \text{если } \tilde{U}_j^{(k+1)} < U^- \end{cases} \quad (38) \end{aligned}$$

Здесь γ - шаг вдоль градиента ($\gamma > 0$).

4. Заключение

В заключении следует отметить, что все поставленные задачи были выполнены, цели достигнуты. В ходе данной работы было найдено решение задачи оптимального управления, а именно оптимального управления процессом нагрева диска. Следует отметить, что в данной работе рассматривалась задача о приведении температуры диска к заданной температуре к конечному моменту времени. Вначале формулировалась постановка задачи исследования, которая заключается в построении решения задачи для определения оптимального управления процессом нагрева диска. Далее приводится построение неявной центрально-разностной схемы, которое сводится к введению безразмерных переменных, что приводит к построению шаблона неявной центрально-разностной схемы, которая представлена на рисунке 3. Затем приводится определение порядка аппроксимации неявной центрально-разностной схемы, где показывается, что погрешность аппроксимации данной схемы имеет второй порядок. После, формулируется и приводится доказательство устойчивости неявно-разностной схемы, где исследуется неявно-разностная схема на устойчивость, для чего мы впоследствии воспользовались необходимым спектральным условием Неймана устойчивости схемы по начальным данным. Затем приводится представление граничных условий в разностном виде, где граничные условия в разностном виде должны также иметь второй порядок аппроксимации. И в конце приводится метод решения задачи оптимального управления, где мы сводим задачу оптимального управления к задаче условной оптимизации.

Литература

1. МОРОЗКИН Н.Д., ТКАЧЕВ В.И. *Управление процессами теплообмена изделий сложной формы с учетом ограничений на термонапряжения*. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сбор-

- ник трудов в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладная механика. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – 780 с. С. 239 – 242.
2. МОРОЗКИН Н.Д., МОРОЗКИН Н.Н. *Оптимизация процессов внешнего нагрева с учетом ограничений на термонапряжения и на максимальную температуру.*
3. ПЕСТЕРОВ А.А. *Оптимальное управление подвижным источником теплового воздействия при легировании заготовок кварцевых оптических волокон.* Дисс. на соискание ученой степени канд.техн.наук. Пермь, 2019.
4. АФИНОГЕНТОВ А.А. *Моделирование и оптимальное управление технологическим комплексом "Нагрев - обработка металла давлением".* Автореферат дисс. на соискание ученой степени канд.техн.наук. Самара, 2008.
5. ЗАЙКИНА Н.В. *Моделирование и оптимальное управление процессом индукционного нагрева алюминиевых заготовок, вращающихся в магнитном поле постоянного тока.* Дисс. на соискание ученой степени канд.техн.наук. Самара, 2010.
6. АРТУР М.Х. *Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов температурных режимов индукционного нагрева.* Дисс. на соискание ученой степени канд.техн.наук. Самара, 2018.
7. АРТУР М.Х. *Синтез алгоритмов оптимального управления процессом индукционного нагрева стальной цилиндрической заготовки при неполном измерении состояния.* Вестник Самарского государственного технического университета. Т. 25. – 2017.
8. САМАРСКИЙ А.А. *Введение в численные методы.* – СПб.: Лань, 2005.
9. ТРИКОМИ Ф. Дж. *Лекции по уравнениям в частных производных.* М.: – URSS, 2007.
10. ФУРСИКОВ А.В. *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения.* – Новосибирск: Научная книга, 1999.
11. Glusa, Christian, and Enrique Otarola. «Optimal control of a parabolic fractional PDE: analysis and discretization» arXiv preprint arXiv: 1905.10002 (2019).

12. MURAVEY L.A., PETROV V.M. *Optimal control of technological process in microelectronics*. Interprobor – 90, Moscow, 1990
13. MURAVEY L.A., PETROV V.M., ROMANENKOV A.M. *Modeling and optimization of ion-beam etching process II*. Proceedings. International conference on optimization methods and applications (OPTIMA-2013). 2013.
14. MURAVEY L.A., PETROV V.M., ROMANENKOV A.M. *Modeling and optimization of ion-beam etching process*. Proceedings. III International conference on optimization methods and applications (OPTIMA-2012). Costa da Caparica, Portugal, September 23–30, 2012. Edited by VI Zubov., vol. 47, p. 181. 2006.

SEARCH FOR OPTIMAL CONTROL OF THE DISK HEATING PROCESS BASED ON A FINITE-DIFFERENCE MODEL

Sergey Gusev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Ph.D. Student (gs-serg@mail.ru).

Abstract. In this paper, we consider the problem of bringing the disk temperature to a given temperature at a finite time. First, the statement of the research problem is formulated, which consists in constructing a solution to the problem for determining the optimal control of the disk heating process. The novelty of this work lies in the use of programming and visualization tools to solve the optimization problem. The construction of the implicit central-difference scheme is given below, which reduces to the introduction of dimensionless variables, which leads to the construction of the template of the implicit central-difference scheme, which is presented further in Figure 3. Then the definition of the order of approximation of the implicit central-difference scheme is given, where it is shown that the error of approximation of this scheme is of the second order. After that, we formulate and present a proof of the stability of the implicit-difference scheme, where we study the implicit-difference scheme for stability, for which we subsequently use the necessary Neumann spectral condition for the stability of the scheme from the initial data. Then a representation of the boundary conditions in the difference form is given, where the boundary conditions in the difference form must also have a second order of approximation. And at the end, we present a method for solving the optimal control problem, where we reduce the optimal control problem to the conditional optimization problem.

Keywords: temperature, disk, optimal control, implicit central difference scheme.

УДК 519.714.2

ББК 32.965.5

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...*

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...

Опубликована ...заполняется редактором...