

## АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИЕЙ ЗАДАННОГО КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ<sup>1</sup>

Фуртат И.Б.<sup>2</sup>, Гущин П.А.<sup>3</sup>, Нгуен Б.Х.<sup>4</sup> Колесник Н.С.<sup>5</sup>  
(Институт проблем машиноведения РАН)

В статье приведена модификация классического алгоритма адаптивного управления по выходу с целью гарантии нахождения выходного сигнала в заданном разработчиком множестве в любой момент времени. В отличие от классического адаптивного управления, где нельзя повлиять на качество переходного процесса, качество регулирования в установившемся режиме и время переходного процесса, здесь предлагается дополнить классическую процедуру адаптивного управления нелинейным законом управления для решения данных проблем. Нелинейный закон управления базируется на преобразовании выходной переменной так, чтобы задача с ограничениями свелась к задаче без ограничений, что и позволяет в дальнейшем применять известные методы адаптивного управления. Приведен пример, иллюстрирующий эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: динамическая система, адаптивное управление, нелинейное управление, замена координат, устойчивость, управление.

### 1. Введение

Методы адаптивного управления хорошо зарекомендовали себя в задачах управления с параметрической неопределенностью и внешними возмущениями. Несмотря на то, что первые задачи по адаптивному управлению были поставлены еще в 50-х годах XX века, до сих пор публикуется множество различных схем адаптивного управления, что подтверждает интерес к данным задачам.

Часто цель адаптивного управления состоит в стабилизации выходной переменной объекта в заданном множестве

---

<sup>1</sup> Результаты получены при поддержке гранта Российского научного фонда № 18-79-10104-П.

<sup>2</sup> Игорь Борисович Фуртат, д.т.н., профессор (cainenash@mail.ru).

<sup>3</sup> Павел Александрович Гущин, к.т.н. (guschin.p@mail.ru).

<sup>4</sup> Ба Хю Нгуен, аспирант (leningrat206@gmail.com).

<sup>5</sup> Никита Сергеевич Колесник, аспирант (nik.kolesnik.1998@mail.ru).

в асимптотике или за конечное время [2, 3, 9, 10]. При этом оценки для расчета характеристик предельного множества и времени переходного процесса либо достаточно грубы, либо остаются в терминах существования. Более того, до сих пор нет результатов в области адаптивного управления с обеспечением заданного качества переходных процессов. Решению данных задач будет посвящена настоящая статья.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 ставится задача адаптивного управления с ограничениями на выходную переменную. В частности, ограничения могут влиять на качество переходных процессов и процессов в установившемся режиме, а также ограничения можно задать время переходного процесса. В разделе 3 предложен метод решения, включающий в себя методы классического адаптивного управления [2, 3, 9, 10] и метод, гарантирующий нахождение выходных сигналов в заданном множестве [4, 7]. В разделе 4 рассмотрен пример моделирования, иллюстрирующий теоретические результаты и подтверждающий сделанные выводы.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему

$$(1) \quad Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t),$$

где  $t \geq 0$ ,  $u \in \mathbb{R}$  – сигнал управления,  $y \in \mathbb{R}$  – выходной сигнал, доступный измерению,  $f \in \mathbb{R}$  – ограниченное возмущение,  $Q(p)$  и  $R(p)$  – линейные дифференциальные операторы с постоянными неизвестными коэффициентами и порядками  $n$  и  $n - 1$  соответственно,  $R(\lambda)$  – гурвицевый полином, где  $\lambda$  – комплексная переменная,  $p = d/dt$ .

Требуется разработать закон управления, который обеспечит нахождение выходного сигнала объекта  $y(t)$  в следующем множестве

$$(2) \quad \mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R} : \underline{g}(t) < y(t) < \bar{g}(t)\} \text{ для любых } t \geq 0,$$

где  $\underline{g}(t)$  и  $\bar{g}(t)$  – ограниченные функции вместе со своими первыми производными по времени. Данные функции выбираются разработчиком исходя из требований работы системы.

Например (см. рис. 1), можно гарантировать переходные процессы в заданной трубке, границы которой монотонно сходятся к окрестности нуля за заданное время  $T$ , в то время как, в [2, 3, 9, 10] нельзя гарантировать заданное качество переходных процессов, заданную окрестность в установившемся режиме и заданное время переходного процесса. Сказанное будет наглядно продемонстрировано в примере в конце статьи.

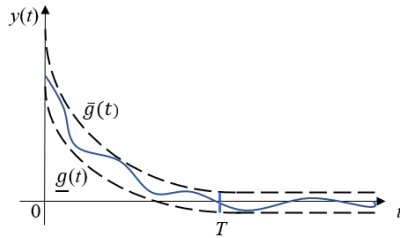


Рис. 1. Частная иллюстрация цели управления.

Замечание 1. В постановке задачи рассматривается объект (1) с единичной относительной степенью ( $\deg Q(p) - \deg R(p) = 1$ ). Такие объекты часто исследуются в литературе [1, 6, 9, 12] и могут описывать процесс заполнения жидкости в наливных танках [8], динамику трансмиссии в механической коробке передач [11], динамику колебательных систем [5] и т.д. Важно, что для таких объектов различными методами управления (метод непосредственной компенсации, метод скоростного градиента [2, 3, 9, 10] и т.п.) можно получить одну и ту же структуру закона адаптивного управления. Для объекта же с относительной степенью больше единицы различные подходы приводят к совершенно различным алгоритмам управления [2]. Поэтому в статье акцентировано внимание на объекте с единичной относительной степенью, чтобы продемонстрировать применение единой структуры адаптивного управления для решения задачи с гарантией заданного качества. Однако, как будет видно из полученных результатов, решение легко может быть обобщено на задачи управле-

ния с относительной степенью больше единицы, в частности, с использованием метода расширенной ошибки, алгоритмов адаптации высокого порядка, метод бэкстеппинга [2] и т.д., где в каждом отдельном случае будут получены различные алгоритмы управления.

### 3. Метод решения

Согласно [2, 9, 10], перепишем выражение (1) в виде (3)

$$y(t) = \frac{k_m}{p+a} \left[ u(t) + \frac{N_1(p)}{M(p)} u(t) + \frac{N_2(p)}{M(p)} y(t) + ky(t) + \frac{\theta}{M(p)} f(t) + \epsilon(t) \right],$$

где  $k_m > 0$ ,  $a > 0$  и  $\theta$  – известные коэффициенты,  $M(\lambda)$  известный гурвицевый полином порядка  $n - 1$ ,  $N_1(p)$  и  $N_2(p)$  – линейные дифференциальные операторы порядков  $n - 2$  каждый и с неизвестными коэффициентами,  $k$  неизвестный параметр,  $\epsilon(t)$  – экспоненциально затухающая функция, обусловленная ненулевыми начальными условиями (1).

Обозначим  $N_1(p) = [c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,n-2}] [1, p, \dots, p^{n-2}]^T$ ,  $N_2(p) = [c_{2,0}, c_{2,1}, \dots, c_{2,n-2}] [1, p, \dots, p^{n-2}]^T$ ,  $c_0 = -[c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,n-2}, c_{2,0}, c_{2,1}, \dots, c_{2,n-2}, k]$  – вектор постоянных неизвестных параметров,  $\bar{f}(t) = \frac{\theta}{M(p)} f(t)$  – новое ограниченное возмущение в силу ограниченности исходной функции  $f(t)$  и гурвицевости полинома  $M(\lambda)$ ,  $w(t) = \text{col}\{V_u(t), V_y(t), y(t)\}$  – вектор регрессии, составленный с помощью следующих фильтров:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{V}_u(t) &= FV_u(t) + bu(t), V_u(0) = 0, \\ \dot{V}_y(t) &= FV_y(t) + by(t), V_y(0) = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $V_u, V_y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $F$  – матрица в форме Фробениуса с характеристическим многочленом  $M(\lambda)$ ,  $b = [0, 0, \dots, 1]^T$ .

Учитывая введенные обозначения, перепишем (3) как

$$(5) \quad \dot{y}(t) = -ay(t) + k_m [u(t) - c_0^T w(t) + \bar{f}(t) + \epsilon(t)].$$

Согласно [4, 7], для решения задачи управления с заданными ограничениями введем замену выходной переменной  $y$  в виде

$$(6) \quad y(t) = \Phi(\varepsilon(t), t),$$

где  $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}$  – непрерывно-дифференцируемая функция по  $t$ ,  $\Phi(\varepsilon, t)$  удовлетворяет следующим условиям:

- (а)  $\underline{g}(t) < \Phi(\varepsilon, t) < \bar{g}(t)$  для любых  $t \geq 0$  и  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ;
- (б) существует обратное отображение  $\varepsilon = \Phi^{-1}(y, t)$  для любых  $y \in \mathcal{Y}$  и  $t \geq 0$ ;
- (в) функция  $\Phi(\varepsilon, t)$  непрерывно-дифференцируемая по  $\varepsilon$  и  $t$ , а также  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \neq 0$  для любых  $y \in \mathcal{Y}$  и  $t \geq 0$ ;
- (г) функция  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$  ограничена по  $t \geq 0$  для любых  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .

Теперь определим динамику по переменной  $\varepsilon$  для исследования устойчивости замкнутой системы. Для этого найдем полную производную по времени от (6) в виде  $\dot{y} = \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$ . Так как  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \neq 0$  (см. условие (в)), то, принимая во внимание (5), перепишем последнее равенство как

$$(7) \quad \dot{\varepsilon}(t) = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left( -ay(t) + k_m [u(t) - c_0^T w(t) + \bar{f}(t) + \varepsilon(t)] - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right).$$

То есть, с помощью преобразования координат (6) исходная задача с ограничениями сведена к задаче без ограничений. Теперь необходимо синтезировать закон управления  $u$ , обеспечивающий устойчивость по вход-состоянию системы (7).

Зададим закон управления в виде

$$(8) \quad \begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t), \\ u_1(t) &= c^T(t)w(t), \\ u_2(t) &= \frac{1}{k_m} \left[ ay(t) + \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} - \alpha \varepsilon(t) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $u_1(t)$  – закон адаптивного управления,  $u_2(t)$  – закон управления, гарантирующий нахождение  $y(t)$  в множестве (2),  $c(t)$  – вектор настраиваемых параметров,  $\alpha > 0$ .

Подставив (8) в (7), получим

$$(9) \quad \dot{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} [-\alpha \varepsilon + k_m(c(t) - c_0)^T w(t) + k_m \bar{f}(t) + k_m \varepsilon(t)].$$

Теорема 1. Пусть для преобразования (5) выполнены условия (а)-(г),  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$  для любых  $\varepsilon$  и  $t$ , а также  $\sup_t \left\{ \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right\} < \infty$ . Тогда для любых  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  и  $\gamma > 0$  закон управления (7) вместе с алгоритмом адаптации

$$(10) \quad \dot{c}(t) = -\beta \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \varepsilon(t) w(t) - \gamma c(t)$$

обеспечивает принадлежность выходной переменной  $y(t)$  множеству (2).

Замечание 2. Рассмотрим отличия классического адаптивного закона управления [2, 3, 9, 10] от предложенного. Классический вид адаптивного закона управления выглядит как

$$(11) \quad \begin{aligned} u(t) &= u_1(t) = c^T(t)w(t), \\ \dot{c}(t) &= -\beta y(t)w(t) - \gamma c(t). \end{aligned}$$

Из (8) следует, что предложенный закон управления состоит из классического  $u_1$ , необходимого для компенсации параметрической неопределенности, и нелинейного  $u_2$  для гарантии нахождения  $y$  в множестве (2). Дополнительно, алгоритм адаптации (10), в отличие от классического (11), содержит нелинейный коэффициент усиления  $\left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1}$  и переменную  $\varepsilon$  вместо  $y$ , поскольку стабилизируется система (9) вместо (5).

Доказательство. Зададим функцию Ляпунова вида

$$(12) \quad V = \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{k_m}{2\beta} (c - c_0)^T (c - c_0) + \chi \int_t^\infty \varepsilon^2(s) ds,$$

где  $\chi > 0$ . Найдя полную производную от (12) по времени вдоль траекторий (8) и (10), получим

$$(13) \quad \dot{V} = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} [-\alpha \varepsilon^2 + k_m \varepsilon \bar{f}(t) + k_m \varepsilon(t) \varepsilon(t)] - \frac{k_m \gamma}{\beta} c^T (c - c_0) - \chi \varepsilon^2(t).$$

Воспользуемся следующими соотношениями:

$$(14) \quad \begin{aligned} \varepsilon \bar{f} &\leq 0.5 [\mu^{-1} \varepsilon^2 + \mu \bar{f}^2], \\ \varepsilon \varepsilon &\leq 0.5 [\mu^{-1} \varepsilon^2 + \mu \varepsilon^2], \\ -c^T (c - c_0) &= -0.5 [(c - c_0)^T (c - c_0) + c^T c - c_0^T c_0]. \end{aligned}$$

С учетом (14), перепишем (13) как

$$(15) \quad \dot{V} \leq - \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} (\alpha - k_m \mu^{-1}) \varepsilon^2 - \frac{k_m \gamma}{2\beta} [(c - c_0)^T (c - c_0) + c^T c] - (\chi - 0.5 k_m \mu) \varepsilon^2(t) + \frac{\gamma}{2\beta} c_0^T c_0 + 0.5 k_m \mu \sup \{ \bar{f} \}^2.$$

Из (15) следует, что при выполнении условий

$$(16) \quad \begin{aligned} |\varepsilon| &> \sqrt{\frac{\mu(\gamma c_0^T c_0 + k_m \beta \mu \sup \{ \bar{f} \}^2)}{2\beta(\alpha \mu - k_m)}} \sup_t \left\{ \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right\}, \\ \alpha &> k_m \mu^{-1}, \\ \chi &> 0.5 k_m \mu, \end{aligned}$$

имеем  $\dot{V} < 0$ . При этом, из (16) видно, что всегда существуют  $\alpha$ ,  $\mu$  и  $\chi$ , обеспечивающие  $\dot{V} < 0$ . Из условия (б) следует, что преобразование (6) гарантирует выполнение условия (2). Теорема доказана.

Замечание 3. Из (16) видно, что при уменьшении значения  $\gamma$  и при увеличении значения  $\alpha$  можно уменьшить предельное значение по  $|\varepsilon|$ . В свою очередь, из условий (б) и (г) следует, что преобразование (6) является строгой монотонной функцией. Значит, с уменьшением предельного значения  $|\varepsilon|$  в пределе уменьшается колебательность по переменной  $y$  в множестве (2).

#### 4. Пример

Рассмотрим объект управления (1) с различными коэффициентами в операторах  $Q(p)$  и  $R(p)$ :

- (а)  $Q(p) = (p - 1)^3$  и  $R(p) = (p + 1)^2$ ,
- (б)  $Q(p) = p^3 - 5p^2 + 3p - 1$  и  $R(p) = 0.5(p + 1)^2$ ,
- (в)  $Q(p) = p^3 + 5p^2 - 7p + 5$  и  $R(p) = 0.5(p + 1)^2$ ,

начальными условиями  $p^2 y(0) = p y(0) = y(0) = 1$  и возмущением  $f(t) = 5 + 5 \sin(1.5t) + 3 \cos(0.8t) + d(t)$ , где  $d(t) = \text{sat}\{\hat{d}(t)\}$ ,  $\text{sat}\{\cdot\}$  – функция насыщения,  $\hat{d}(t)$  – белый шум, моделируемый в Matlab Simulink с помощью блока «Band-Limited White Noise» с мощностью шума 1 и периодом дискретизации 0.1.

Сформируем алгоритм управления. Преобразование координат (6) зададим в виде  $\Phi(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t)e^\varepsilon + \underline{g}(t)}{e^\varepsilon + 1}$ . Качество управления определим функциями  $\bar{g}(t) = 4e^{-3t} + 0.1$  и  $\underline{g}(t) = 3.8e^{-3t} - 0.1$ . Зададим в фильтрах (4)  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ . В законе управления (7) зададим  $\alpha = 1$ ,  $a = 1$  и  $k_m = 1$ . В алгоритме адаптации (14) зададим  $\beta = 1$  и  $\gamma = 1$ .

Сравним предложенный алгоритм управления с адаптивным управлением [2, 3, 9, 10], представленным в виде (11). Выберем в данном адаптивном алгоритме те же параметры, что и в предложенном алгоритме.

На рис. 2 приведены результаты переходных процессов для алгоритма [2, 3, 9, 10] и предложенного закона управления при параметрах (a), (b) и (c).

Достоинство предложенного алгоритма, в отличие от [2, 3, 9, 10], очевидно: переходные процессы всегда содержатся в трубке (2), границами которой можно задать качество переходных процессов. Так, полученные процессы почти экспоненциально затухают в предельное множество  $(-0.1; 0.1)$  за время 1.5 с., в то время как алгоритмы [2, 3, 9, 10] не контролируемы в плане переходного процесса и времени переходного процесса, а так же невозможно априори определить качество выходной переменной в установившемся режиме.

## 5. Заключение

В статье применены методы классического адаптивного управления [2, 3, 9, 10] и метод нелинейного управления [4, 7], которые позволили создать новый метод адаптивного управления, гарантирующий заданной качество переходных процессов. Вначале используется метод [4, 7], позволяющий преобразовать задачу с ограничениями к задаче без ограничений. Затем применяется классический метод адаптивного управления [2, 3, 9, 10]. Результаты моделирования подтвердили теоретические выводы и показали, что в классических схемах



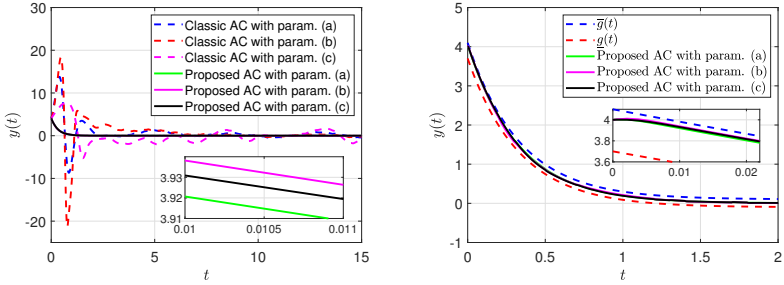


Рис. 2. Слева изображены переходные процессы для классического адаптивного управления [2, 3, 9, 10] (пунктирные линии) и предложенного адаптивного алгоритма (сплошные линии). Справа пунктирными линиями изображены графики функций  $\bar{g}(t)$  и  $g(t)$  (пунктирные линии), задающие качество переходных процессов, и графики выходных сигналов с предложенным адаптивным законом управления (сплошные линии).

адаптивного управления при различных параметрах объекта наблюдаются существенно разные неконтролируемые переходные процессы, в то время как в новой схеме управления при тех же параметрах гарантируется почти заданное качество переходных процессов.

Литература

1. ЕРЕМИН Е.Л. Алгоритм адаптивной системы управления с явно-эталонной моделью для строго минимально-фазового объекта // Информатика и системы управления. – 2004. – № 2, – том 8. – С. 157–166.
2. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000.
3. ФРАДКОВ А.Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. – СПб.: Наука, 2003.
4. ФУРТАТ И.Б., ГУЩИН П.А. Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 4. – С. 121–139.
5. ХАЛИЛ Х.К. Нелинейные системы. Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
6. СНOPRA N., SPONG M.W. Output Synchronization of Nonlinear Systems with Relative Degree One // Recent Advances in Learning and Control. – Vol. 371. Springer, London. –2008. –P. 51–64.
7. FURTAT I., GUSHCHIN P. Nonlinear feedback control providing plant output in given set // International Journal of Control. –2021. <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>
8. HASHIM Z.S., IBRAHEEM I.K. A relative degree one modified active disturbance rejection control for four-tank level control system // International Review of Applied Sciences and Engineering. –2021. –No. 2, –Vol. 8. –P. 157–166.
9. IOANNOU P.A., SUN J. Robust Adaptive Control. Courier Corporation, –2012.

10. NARENDRA K.S., ANNASWAMY A.M. Stable Adaptive Systems. Courier Corporation, 2012.
11. RIFAI K.E., YOUSEF-TOUMI K. Robust Adaptive Control of Switched system. –InTech, Switched Systems, 2009.
12. ZHAO G., CHEN G., MI J. Overcoming a Fundamental Limitation of Linear Systems with Generalized First Order Reset Element // Proc. of the 37th Chinese Control Conference (CCC). –2018. DOI: 10.23919/ChiCC.2018.8483381.

## ADAPTIVE CONTROL WITH A GUARANTEE OF A GIVEN PERFORMANCE

Igor Furtat, Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, Dr.Sc, professor (cainenash@mail.ru).

Pavel Gushchin, Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, Cand.Sc (gushchin.p@mail.ru).

Ba Huy Nguyen, Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, аспирант (leningrat206@gmail.com).

Nikita Kolesnik, Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, аспирант (nikita@gmail.com).

Abstract: A method for control of dynamical systems is proposed which ensures that the output signal of the plant is in a given set at any time. To solve the problem a special coordinate change is used which allows one to reduce the original problem with restrictions to the problem of studying the input-state stability of a new extended system without restrictions. Examples of coordinate replacement are given and control algorithms for linear plants and dynamic systems with sector nonlinearity are synthesized in the presence of parametric uncertainty and external disturbances. The results are accompanied by modeling, illustrating the effectiveness of the proposed method and confirming theoretical conclusions.

Keywords: dynamical system, change of coordinates, stability, control.

УДК 519.7

ББК Ж 50

Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии ...

Поступила в редакцию ...

Дата опубликования ...