

О ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ЦЕЛЕЙ МЕЖДУ ПЕРЕХВАТЧИКАМИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЁРА¹

Галяев А.А.², Долгушин П.Д.³
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В работе рассматривается динамическая задача коммивояжёра (ДЗК) с прямолинейно движущимися целями. В рамках общей постановки рассмотрена частная подзадача – задача о перераспределении целей между двумя коммивояжёрами (перехватчиками). Полагая известным оптимальный план обхода целей для одного перехватчика, ставится задача о поиске оптимального плана для каждого из двух при заданной исходной конфигурации целей. Для этой постановки предложен алгоритм перераспределения целей, проведен статистический анализ и представлены результаты его работы.

Ключевые слова: динамическая задача коммивояжёра, комбинаторная оптимизация, задача перераспределения целей.

1. Введение

Задача коммивояжёра (ЗК, Travelling salesman problem, TSP) в классической постановке [4] хорошо изучена. Коммивояжёру (перехватчику, хищнику) необходимо объехать (перехватить, догнать) конечный набор городов (целей, жертв) – точек на плоскости – за наименьшее возможное время. На данный момент TSP решается численно [5] для достаточно большого количества целей. На рисунке 1 показаны интуитивно по-

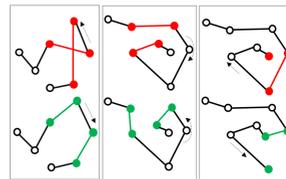


Рис. 1. Исправление неоптимальных путей в классической ЗК

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта российского научного фонда № 23-19-00134

² Галяев Андрей Алексеевич, д.т.н., г.н.с (galaev@ipu.ru).

³ Долгушин Павел Дмитриевич, техник (dolpad@ipu.ru).

нятные правила исправления неоптимальных путей в классической ЗК, которые перестают работать на различных обобщениях этой задачи.

Классическая постановка со временем обросла целой плеядой разноплановых обобщений. В середине прошлого века была сформулирована «динамическая задача коммивояжёра» (ДЗК, Moving-target TSP – MTTSP) [2]. В этой постановке цели движутся равномерно и прямолинейно, закон движения заранее известен. Исследования, поиски вокруг ДЗК продолжались весь XX век [6], активно продолжаются и в последние годы [1, 7, 8, 11]. Чаще всего обобщения сводятся к различным моделям динамики [9, 3], переходу от одного перехватчика к нескольким и к различным критериям оптимальности. Из-за многогранности проблем, возникающих в ДЗК, появляются докторские диссертации, полностью посвящённые лишь этой тематике [10]. В некоторых современных работах демонстрируется впечатляющая эффективность подходов, использующихся в MTTSP, для решения сугубо практических задач [12].

Сказать про ДЗК, что она является решённой или близкой к этому, преждевременно. Резкий скачок сложности при конструировании алгоритма вычисления оптимального плана при переходе от статики к динамике чувствуется на следующем примере: если все цели неподвижны на одной прямой, то поиск кратчайшего их обхода очевиден, коммивояжёру нужно сначала пройти все цели слева от стартовой позиции, потом справа, получив какое-то время обхода t_1 , затем, наоборот, сначала пройти все цели справа, затем слева, получив суммарное время t_2 , а оптимальное время во всей задаче будет минимумом из t_1, t_2 .

В задаче же ДЗК, где цели нестатичны, даже в одномерном пространстве, т.е. на прямой, описанный выше наивный алгоритм неоптимален. Поясним на примере (рис. 2) и отметим, что пример этот будет «общего положения», а не специальным образом подобранным. Пусть на прямой отмечен

красным единственнй перехватчик, движущийся со скоростью v , слева от него цели 1, 3, справа – 2, 4, третья и четвёртая цели почти покоятся вдали от перехватчика, а первая и вторая от него быстро удаляются пусть даже с равными скоростями. Если в данной конфигурации действовать как если бы задача была классической ЗК, то за то долгое время, пока перехватчик будет лететь до далёкой третьей цели и возвращаться, быстрая цель 2 успеет удалиться за четвёртую цель и тем самым порядок обхода $\{1, 3, 4, 2\}$ будет неоптимальным.

Оптимально же будет сначала схватить цели в порядке $\{1, 2\}$, что произойдёт быстро, так как они расположены почти у перехватчика, затем, очевидно, $\{4, 3\}$. Тем самым оптимальный план $\{1, 2, 4, 3\}$ – план, в котором перехватчику придётся сменить направление движения дважды, что невозможно в оптимальном алгоритме в случае классической ЗК.

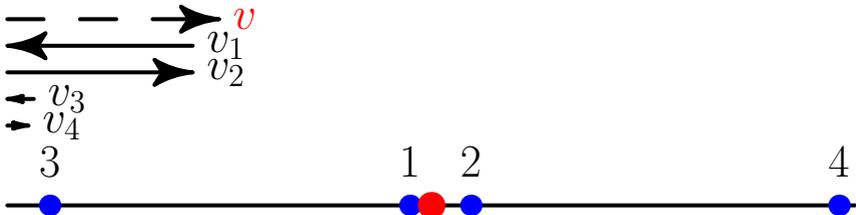


Рис. 2. Пример конфигурации, в которой облёт всех целей по одну сторону от перехватчика, затем по другую, не является оптимальным

В работе [6] представлен точный алгоритм для ДЗК в одномерном случае с квадратичной по количеству целей сложностью.

Актуальность разработки методов решения ДЗК обусловлена важностью для практических приложений, таких как обслуживание расположенных на территории подвижных объектов, при снабжении или инспекции рыболовецких судов, находящихся в районе лова, при защите объектов от множественного применения беспилотников, и многих других.

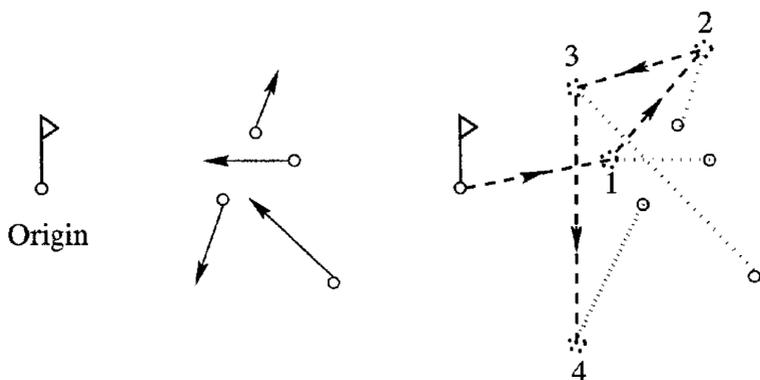


Рис. 3. Пример оптимального решения в ДЗК

В рамках ДЗК в данной работе исследуется задача-сужение ДЗК, которую авторы назвали задачей о перераспределении целей. Опираясь на оптимальный план перехвата одним перехватчиком множества прямолинейно движущихся целей, требуется установить оптимальный план для двух перехватчиков, при условии, что они выходят из одной точки (или двух очень близких точек), и конфигурация целей в фазовом пространстве остается неизменной. Затем требуется провести анализ двух полученных планов и установить закономерности в очередности обхода целей.

Работа состоит из нескольких разделов. Во введении обсуждается мотивация проведенного исследования. Во втором разделе рассматривается математическая постановка задачи и вводятся необходимые определения. В третьем разделе формируется набор эвристических правил, на основании которых строится алгоритм перераспределения целей. В четвертом разделе формулируется итоговый алгоритм, в заключении приводятся выводы о проделанной работе и дальнейшие планы исследований.

2. Постановка задачи

Для постановки задачи о перераспределении целей, сначала сформулируем ДЗК для случая одного, затем двух перехватчиков.

2.1. Один перехватчик

Пусть на плоскости выбрана декартова система координат, в начальный момент времени $t = 0$ имеются $M \in \mathbb{N}$ целей-точек с известными координатами $(x_i(0), y_i(0))$, $i \in \{1, \dots, M\}$, а в точке $(0, 0)$ находится один перехватчик.

Пусть закон движения перехватчика $(x(t), y(t))$ имеет лишь два ограничения: перемещение должно быть непрерывным $x(t), y(t) \in C(\mathbb{R}_+)$ и модуль скорости не должен превосходить 1 в тех точках, где скорость определена. Любую задачу можно привести к единичному ограничению сверху благодаря обезразмериванию.

Пусть закон движения целей – равномерное и прямолинейное движение – известен:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i \cos(\psi_i), & x_i(0) = x_i^0, \\ \dot{y}_i(t) = v_i \sin(\psi_i), & y_i(0) = y_i^0, \end{cases}$$

где $i \in \{1, \dots, M\}$ – номер цели, а постоянные параметры $v_i \in [0, 1)$ и $\psi_i \in [0, 2\pi)$ – модуль скорости цели и угол наклона траектории к оси абсцисс соответственно. Если бы по модулю скорость цели была не меньше скорости перехватчика, то задача вообще говоря вырождалась бы, в том смысле, что не при любых исходных параметрах перехватчик мог бы перехватить все цели.

Определение 1. Для удобства совокупность начальных условий для движущихся целей и перехватчика и всех параметров задачи назовём начальной конфигурацией.

Определение 2. Для перехватчика планом $\pi(k)$ по перехвату $k \in \{0, \dots, M\}$ целей назовём упорядоченную последовательность из k различных чисел из $\{1, \dots, M\}$.

Например, если план перехватчика имеет вид $\{1, 3, 2\}$, то это значит, сначала он должен перехватить цель с номером 1, затем 3, затем 2. План из нуля целей, т.е. пустой план, интерпретируется как указание к бездействию.

Определение 3. Множество всех планов из k целей назовём Π_k , $|\Pi_k| = C_M^k \cdot k!$.

Отметим характеристику плана π – суммарное время исполнения $T_{sum}(\pi)$ – т.е. полное время, за которое перехватчик обойдёт все предписанные ему цели.

Критерием оптимальности в рамках ДЗК для одного перехватчика выбрана $T_{sum}(\pi)$, где $\pi \in \Pi_M$. Нетрудно показать, что при таком критерии перехватчик должен двигаться по ломаной.

Итого, в рамках работы динамика перехватчика описывается системой уравнений

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \cos(\psi(t)), & x(0) = x^0 \\ \dot{y}(t) = v(t) \sin(\psi(t)), & y(0) = y^0 \end{cases}$$

где (v, ψ) – управляющие параметры, $v(t) \in [0, 1]$, $\psi(t) \in [0, 2\pi)$, параметр v – модуль скорости перехватчика, а ψ – направление его скорости на плоскости – кусочно постоянная функция. В работе [6] доказана т.н. «no-waiting lemma», «принцип движения на максимальной скорости», говорящий, что тогда для минимизации T_{sum} перехватчик должен двигаться с максимальной скоростью, т.е. $v(t) \equiv 1$ и

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \cos(\psi(t)), & x(0) = x^0 \\ \dot{y}(t) = \sin(\psi(t)), & y(0) = y^0 \end{cases}$$

Благодаря этому принципу задача переходит в разряд дискретных, что есть упрощение исходной постановки.

Тогда наилучшим (с точки зрения введённого критерия) будет план π_* :

$$(4) \quad \pi_* \in \arg \min_{\pi \in \Pi_M} T_{sum}(\pi)$$

Так как множество планов Π_M конечно и не пусто, то наилучший план всегда существует. Быть может, не единственный, хотя в данном случае вероятность случайным образом сгенерировать начальную конфигурацию, допускающую несколько оптимальных планов – нулевая. Объединяя всё вышесказанное, можно сформулировать задачу оптимизации для одного перехватчика в следующем виде.

Задача 1. Для M целей с динамикой (1) требуется найти оптимальный по критерию $T_{sum}(\cdot)$ план перехвата $\pi_* \in \Pi_M$ перехватчиком с динамикой (3).

Решением этой задачи является план (4).

2.2. О перехвате одной цели и способе вычисления суммарного времени плана

Введём естественные инвариантные обозначения: \mathbf{d}_0 – вектор от перехватчика к цели в начальный момент времени и \mathbf{v}_0 – вектор-скорость цели. Нетрудно показать, что перехватчик должен лететь по прямой, но по какой именно? Решение приведено, например, в работе, [2].

Оптимальное время перехвата t^* удовлетворяет соотношению:

$$(5) \quad t^* = \frac{\langle \mathbf{d}_0, \mathbf{v}_0 \rangle + \sqrt{\langle \mathbf{d}_0, \mathbf{v}_0 \rangle^2 - d_0^2(v_0^2 - 1)}}{1 - v_0^2}.$$

Зная эту величину, нетрудно найти точку перехвата и направление оптимального перелёта. Тем самым, в общем случае, суммарное время исполнения плана $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_M\}$ по перехвату M целей одним перехватчиком может быть найдено по формуле

$$(6) T_{sum}(\pi) = \begin{cases} t_1^*, & M = 1 \\ t_M^* + T_{sum}(\pi \setminus \pi_M) = t_M^* + \dots + t_1^*, & M > 1, \end{cases}$$

где t_i^* – время перехвата i -ой цели из позиции, которая сложилась после перехвата $(i - 1)$ -ой цели.



Рис. 4. Перехват одним перехватчиком. Красным цветом обозначен перехватчик, синим – цели

2.3. Два перехватчика

Поставим ДЗК для двух перехватчиков. Фиксируем некоторую начальную конфигурацию для задачи с одним перехватчиком. У этой задачи есть решение – оптимальный план π_* . Добавим в рассмотрение второго перехватчика и поместим его в начальный момент времени $t = 0$ в начало координат, т.е. в ту же точку, откуда стартует исходный перехватчик. С точки зрения характеристик и возможностей второй перехватчик – полная копия первого.

Теперь, снабдив перехватчики планами, например, $\{3, 5, 2\}$ и $\{1, 4\}$ соответственно, подразумеваем, что первый перехватчик должен обойти цели в порядке 3, 5, 2, а второй – 1, 4.

Определение 4. Двумерным планом на M целей, т.е. на все цели, участвующие в задаче, в случае двух перехватчиков с непересекающимися планами $\pi_1(k_1)$ и $\pi_2(k_2)$, $k_1 + k_2 = M$, назовём упорядоченный набор из двух планов $\pi^2 = (\pi_1(k_1); \pi_2(k_2))$.

Итого, если задача с двумя перехватчиками снабжена двумерным планом $\pi^2 = (\pi_1, \pi_2)$, это означает, что первый

перехватчик должен обойти все цели согласно плану π_1 , второй – π_2 , причём никакую цель не обойдут дважды и никакую не пропустят. По сути, с этого момента задача с двумя перехватчиками разбилась на две задачи с единственным перехватчиком.

Отметим характеристику двумерного плана – суммарное время исполнения $T_{sum}^2(\pi^2)$ – это максимум из времён исполнений первым и вторым перехватчиком своих планов $\pi_1(k_1)$ и $\pi_2(k_2)$ соответственно. Т.е. $T_{sum}^2(\pi^2) = \max(T_{sum}(\pi_1(k_1)), T_{sum}(\pi_2(k_2)))$. Эта величина и служит критерием в случае двух перехватчиков.

Определение 5. Множество всех двумерных планов на M целей назовём Π_M^2 , $|\Pi_M^2| = (M + 1)!$.

Наилучшим с точки зрения введённого критерия будет двумерный план π_*^2 :

$$(7) \quad \pi_*^2 \in \arg \min_{\pi^2 \in \Pi_M^2} T_{sum}^2(\pi^2).$$

Итак, можно сформулировать задачу оптимизации для двух перехватчиков в следующем виде.

Задача 2. Для M целей с динамикой (1) требуется найти оптимальный по критерию $T_{sum}^2(\cdot)$ двумерный план перехвата $\pi_*^2 \in \Pi_M^2$ двумя перехватчиками с динамикой (3).

Решением этой задачи является двумерный план (9).

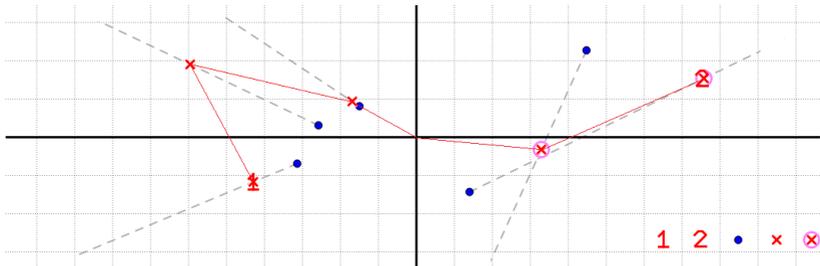


Рис. 5. Два перехватчика вылетают из нуля, первый перехватывает цели, показанные крестиком без кружка, второй – оставшиеся

2.4. Задача о перераспределении целей

Теперь сформулируем задачу, обсуждаемую в данной работе. Пусть фиксирована начальная конфигурация K задачи 1, известен её оптимальный план π_* . В K добавим второго перехватчика с той же стартовой позицией, что и у первого. Тем самым, задача 1 перешла в задачу 2. Задача о перераспределении целей состоит в том, чтобы предложить алгоритм A , дающий двумерный план π^2 для данной начальной конфигурации K , пользуясь тем, что известен оптимальный одномерный план π_* , т.е. $\pi^2 = A(K, \pi_*)$. Провести статистический анализ этого алгоритма, оценить возможность его применения, сравнить конструируемый план π^2 с оптимальным двумерным планом π_*^2 .

Имеется ли прикладной интерес в такой постановке? Да, к примеру, если целей 11, а у перехватчика возможность перехватить только 10 из них, то либо потребуются применение второго перехватчика, либо конструктивное улучшение первого, что далеко не всегда возможно, иначе почему за конвейерной лентой стоит не один сверхспециалист, а несколько рабочих?

3. Построение алгоритма

В данном разделе будет сформулирован набор эвристических правил, с учётом которых будет конструироваться план π^2 . Наложённые на построение плана ограничения будут высекать из Π_M^2 множество $\tilde{\Pi}_M^2$, состоящее лишь из тех планов, которые удовлетворяют ограничениям. Это множество будем называть множеством поиска.

Определение 6. Наилучший по критерию $T_{sum}^2(\cdot)$ план $\pi^2 \in \tilde{\Pi}_M^2$ будем называть субоптимальным.

Отметим, что

$$\min_{\pi^2 \in \Pi_M^2} T_{sum}^2(\pi^2) \leq \min_{\pi^2 \in \tilde{\Pi}_M^2} T_{sum}^2(\pi^2).$$

Рассчитав относительную ошибку $\frac{T_{sum}^2(\pi^2) - T_{sum}^2(\pi_*^2)}{T_{sum}^2(\pi_*^2)}$ между оптимальным π_*^2 и субоптимальным π^2 планами, можно будет судить об успешности каждого правила в отдельности и всего алгоритма в целом. Заметим, что разные ограничения высекают вообще говоря разные множества поиска, что будет совершенно ясно из дальнейшего.

3.1. Параметры численных экспериментов

В ходе работы для анализа каждого из правил для $M = 9, \dots, 14$ было проведено по 1000 экспериментов, в которых начальные позиции и скорости целей генерировались случайным образом, позиции – в квадрате 10×10 с центром в нуле. Что касается скоростей целей, они лежали на отрезке $[0, 5; 0, 8]$. Оба перехватчика стартуют из нуля.

Шаг при генерации координат и скоростей был равен 0,01, т.е. возможные значения для координат – $\{-10, 00; -9, 99; -9, 98; \dots; 9, 99; 10, 00\}$, для скоростей – $\{0, 50; 0, 51; \dots; 0, 79; 0, 80\}$. Выбор исходного квадрата размером 10×10 не нарушает общности, благодаря обезразмериванию. Скорости выбраны с отрезка $[0, 5; 0, 8]$ с целью приближения эксперимента к реальности: для перехвата медленных целей ($v < 0, 5$) оптимизация не так критична, для слишком быстрых ($v > 0, 8$) либо успех маловероятен, либо, при возможности, стоит использовать более быстрый перехватчик.

3.2. Правило сохранения первой цели – правило СПЦ

Если в конкретном случае $\pi_* = \{3, 1, 2\}$, значит у одного перехватчика есть какая-то причина начинать облёт именно с цели 3. К примеру, если в начальной конфигурации скорость какой-то одной цели много больше всех остальных, её нередко приходится перехватывать первой для оптимального обхода. Но если у одного перехватчика была причина начинать оптимальный обход именно с 3, то может для одного из

двух перехватчиков в той же начальной конфигурации причина начинать с 3 также сохранится?

Правило СПЦ. Пусть $\pi_* = \{\pi_1, \dots, \pi_M\}$. Тогда будем строить двумерный план $\pi^2 = (\pi_1(k_1); \pi_2(k_2))$, $k_1 + k_2 = M$, так, что первый перехватчик должен лететь именно к первой цели π_1 , т.е. $\pi_1(k_1) = \{\pi_1, \dots\}$. Заметим, что так как оба перехватчика стартуют из одной и той же точки, то нет разницы между двумерными планами $\pi^2 = (\pi_1(k_1); \pi_2(k_2))$ и $\tilde{\pi}^2 = (\pi_2(k_2); \pi_1(k_1))$. Потому в правиле первая цель отдаётся именно первому перехватчику, а не первому или второму.

Отметим, что при следовании правилу СПЦ субоптимальный план не всегда совпадает с оптимальным.

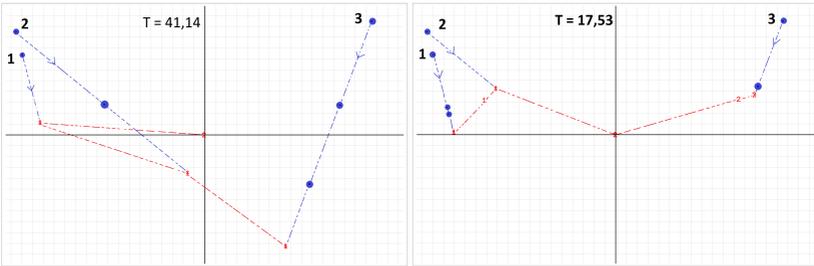


Рис. 6. Оптимальный план $\pi_* = \{1, 2, 3\}$, в то время как $\pi_*^2 = (\{2, 1\}, \{3\})$

В одномерном плане последовательность $\{1, 2, 3\}$ оказалась оптимальной, так как при таком плане точки перехвата всех целей выстроились практически в линию. В двумерном же плане, отдав цель 3 второму перехватчику, никакой «удачной» линии для первого перехватчика нет, а обслужить цели в порядке $\{2, 1\}$ намного выгоднее, чем в порядке $\{1, 2\}$. В данной конкретной ситуации скорость цели 2 существенно выше цели 1, и потому, если сначала лететь к цели 1, цель 2 успеет улететь слишком далеко. Для данной начальной конфигурации оптимальные времена $T_{sum}(\pi_*) = 41,14$, $T_{sum}(\pi_*^2) = 17,53$.

Исследуем, как часто при следовании правилу СПЦ субоптимальный план совпадает с оптимальным и найдём среднюю относительную ошибку при следовании правилу СПЦ.

Каждому столбцу на гистограмме соответствует своя тысяча численных экспериментов. Поясним значение красного столбца: для него была проделана 1000 экспериментов, в каждом из которых изначальное количество целей не было фиксированным, а определялось случайно, от 9 до 14. Тем самым, последний столбец можно воспринимать как минимум как проверку достоверности предыдущих результатов – значение его обязано быть в некотором смысле средним по сравнению со всеми остальными. Моделирование показывает, что так и происходит.

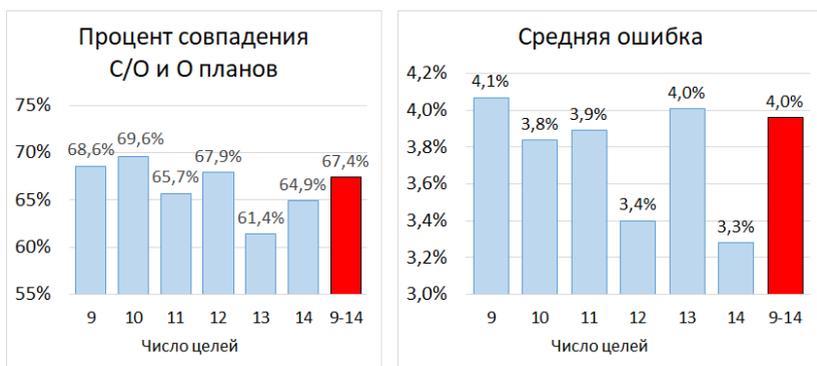


Рис. 7. Статистические показатели для СПЦ (совпадение и средняя ошибка)

Средняя ошибка по всем столбцам при следовании правилу СПЦ не выше 4%, с небольшим дрейфом к уменьшению при увеличении числа целей. Отметим, что на обеих гистограммах проявляется некоторая рассинхронность между случаем чётного и нечётного числа целей. При чётном количестве целей результаты чуть лучше.

Интересно посмотреть на среднюю ошибку, названную в работе фактической. Под фактической ошибкой понимается не средняя ошибка за все эксперименты, а средняя ошибка за те из них, в которых эта ошибка была не нулевой.

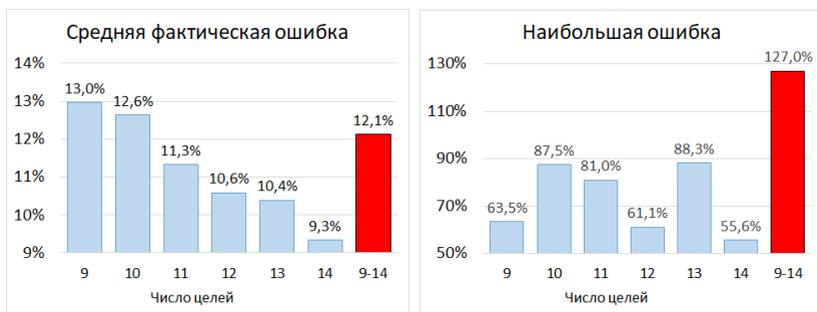


Рис. 8. Статистические показатели для СПЦ (средняя фактическая и наибольшая ошибки)

Величина не превысила 13%, с тенденцией к уменьшению. Эта величина важна, потому как если бы она оказалась огромной, это бы означало, что следование правилу СПЦ даёт либо нулевую ошибку, либо огромную, без выраженной середины.

Отслеживалась и наибольшая ошибка за все эксперименты. Отметим, что в отличие от предыдущих характеристик, на эту существенно влияет число экспериментов, что согласуется с логикой: чем больше экспериментов, тем больше возможностей попасть в «наихудшую» начальную конфигурацию. Тем же объясняется и то, почему красный столбец совершенно не выглядит «средним».

Велика ли наибольшая ошибка в 100%? Если окажется, что субоптимальный план привёл к ошибке в 100%, а в то же время большая часть планов приводит к ошибке меньшей, значит, субоптимальный план плох, т.к. явно хуже среднего. В то же время, если субоптимальный план вновь хуже оптимального в два раза, а средняя ошибка по всем планам, например – в три, то субоптимальный план вовсе не плох.

Следующие рисунки поясняют сказанное. При пяти целях, $M = 5$, полным перебором были рассмотрены всевозможные двумерные планы для одной заданной начальной конфигурации, $|\Pi_5^2| = 6! = 120$. Для каждого из планов было рассчитано суммарное время исполнения $T_{sum}^2(\cdot)$ и максимальная удалённость от нуля по всем целям за всё время исполнения плана $\max\text{Dist}(\cdot)$.

Подробнее о вышеупомянутой характеристике: пусть $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{t})$ – радиус-вектор i -ой цели. Тогда

$$\max\text{Dist}(\pi^2) = \max_{i \in \{1, \dots, M\}} \max_{t \in [0, T_{sum}^2(\pi^2)]} |\mathbf{r}_i(\mathbf{t})|.$$

Данная характеристика может трактоваться как субкритерий для задачи. Если у двух двумерных планов совпадают времена исполнения, то выберем из них тот, у кого будет меньше показатель $\max\text{Dist}(\cdot)$, ведь это будет означать, что перехватчики выполняют работу за равное время, однако во втором случае удалятся от локации вылета на меньшее расстояние.

Итак, одна точка на графике отвечает одному двумерному плану. По абсциссе отложено время исполнения плана, по ординате – максимальная удалённость от нуля по всем целям в ходе данного плана. Красным отмечен субоптимальный план – лучший из всех тех, что удовлетворяли правилу СПЦ.

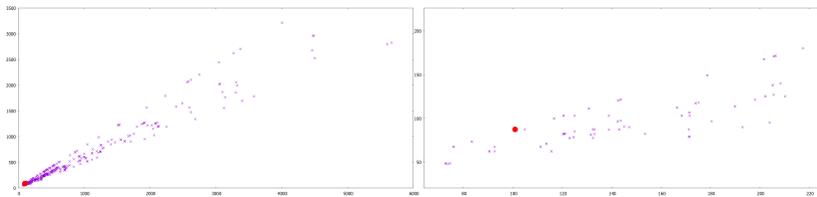


Рис. 9. Результаты всевозможных двумерных планов для некоторой конфигурации в осях $(T_{sum}^2, \max\text{Dist})$, $M = 5$

Ниже показана та же статистика, но при $M = 7$. Дополнительно отметим следующее: при приближении на графике видны планы, совпадающие по времени исполнения. Как было отмечено ранее, в случае одного перехватчика случайно

попасть в такую ситуацию почти невозможно. Дело в том, что в случае ДЗК для нескольких перехватчиков, существование нескольких оптимальных планов вовсе не нулевое по вероятности.

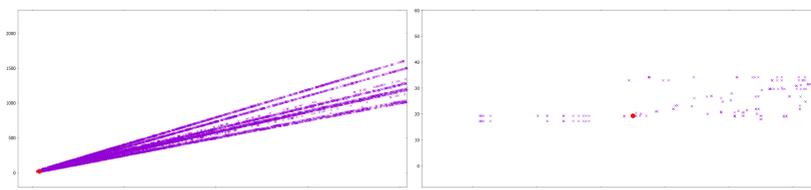


Рис. 10. Результаты всевозможных двумерных планов для некоторой конфигурации в осях (T_{sum}^2, \maxDist) , $M = 7$

Если оптимальное решение $\pi_*^2 = (\pi_1(k_1), \pi_2(k_2))$ таково, что $T_{sum}(\pi_1(k_1)) \gg T_{sum}(\pi_2(k_2))$, т.е. $T_{sum}(\pi_*^2) = T_{sum}(\pi_1(k_1))$, то может случиться так, что перестановка целей внутри второго плана конечно приведёт к изменению времени его исполнения, но новое время всё ещё не превысит время исполнения плана первого перехватчика и потому время исполнения двумерного плана не изменится.

Замечание 1. Отметим, что в случае сделанных выше двух экспериментов все планы лежат в ярко-выраженном конусе. Исследование его может стать основой последующих работ.

Итак, во многих случаях сохранение первой цели даёт хороший результат. Границы применимости видны из приведённой выше статистики. Если средняя ошибка в конкретной практической задаче в 4% приемлема, значит можно сокращать перебор за счёт правила СПЦ.

Замечание 2. Хорошие результаты при сохранении первой цели заставляют задуматься о том, не будут ли они приемлемы при сохранении двух первых целей. Что сократит перебор ещё существеннее. Ясно однако, что сохранение первых двух целей в случае, когда целей всего 4, вряд ли приведёт к успеху, а когда целей 10, напротив, очень даже может.

Для 9 – 14 целей были проделаны аналогичные эксперименты при сохранении первых двух целей. Средняя и средняя фактические ошибки составляли около 10% и 15% соответственно.

Хотя фактическая ошибка увеличилась незначительно, средняя возросла в 2,5 раза, что в какой-то практической задаче всё ещё будет приемлемо, а в какой-то – нет. Ясно, что эффективность сохранения первых двух целей будет понемногу увеличиваться при росте количества целей. Однако, в силу ограничений в возможностях в численных опытах и невозможности сбора всей статистики для 15 и более целей, пришлось отказаться от дальнейших исследований в эту сторону.

3.3. Серия правил о сохранении удачных нитей

Рассмотрим время исполнения оптимального одномерного плана, $T_{sum}(\pi_*) = t_1^* + t_2^* + \dots + t_M^*$, где t_1^* – время перелёта из нуля к первой цели, затем t_2^* – время перелёта от первой ко второй и так далее. Построим вектор длительностей перелётов $\Delta \mathbf{t}^* = \Delta \mathbf{t}^*(\pi_*) = (t_1^*, \dots, t_M^*) \in \mathbb{R}^M$. Среди его компонентов найдём наименьшую. Идеино, если компонента t_j^* – наименьшая, это означает, что в ходе исполнения плана общая конфигурация так сложилась, что цели с номерами $j - 1$ и j оказались в какой-то момент близки друг с другом и потому, перехватив $(j - 1)$ -ую, перехватчику было удобно перехватывать j -ую цель.

Эту пару будем называть удачной нитью длины два, точнее первой удачной нитью длины два. Вторая по малости компонента $\Delta \mathbf{t}^*$ отвечает какой-то другой паре целей, её назовём второй удачной нитью длины два и так далее. По тому же принципу получают удачные нити длины три и более. Длины три – тройка целей в оптимальном плане, которая была последовательно перехвачена быстрее остальных троек.

Тогда естественно исследовать, будут ли эти удачные нити сохраняться при переходе от одного к двум перехватчикам. Если окажется, что вероятность сохранения удачной нити приемлема, то при проведении полного перебора можно будет учитывать только те планы, в которых нить сохраняется.

Например, если удачная нить длины два – $(2, 1)$, а целей всего 5, то нужно рассматривать только те двумерные планы, в которых между целями 2 и 1 нет никаких других. Фактически, это позволяет считать две цели 2 и 1 как единое целое, что сильно сокращает перебор.

Замечание 3. Первая компонента t_1^* не берётся в расчёт, так как она показывает не близость каких-то двух целей в какой-то момент времени, а близость первой цели и начала координат. Тогда «сохранить» такую нить значит, что нужно посещать начало координат и первую цель π_1 без каких-либо целей между ними, т.е. из начала координат надо лететь сразу же к цели π_1 , говоря по-простому, нужно следовать правилу СПЦ.

Замечание 4. Если удачная нить длины три – $(2, 1, 3)$, то при переборе нужно учитывать не только планы, в которых есть последовательность 213, но и любая её перестановка. Удачная нить $(2, 1, 3)$ означает, что цели 2, 1, 3 в какой-то момент были близки и потому их удобно перехватывать вместе как единое целое, порядок неважен.

6	8	2	4	1	7	3	5
11,37	5,14	3,32	1,40	26,54	77,43	15,74	462,83

Таблица 1. Длительности перелета между целями в оптимальном плане для одного перехватчика

$\pi_1(2)$	5	7				
$\pi_2(6)$	8	2	4	3	1	6

Таблица 2. Оптимальный двумерный план

Рассмотрим пример: для некоторой конфигурации, $M = 8$, в таблице 1 в первой строке записан оптимальный одномерный план π_* , а во второй – вектор длительностей перелётов $\Delta \mathbf{t}^*(\pi_*)$. В таблице 2 записан оптимальный двумерный план π_*^2 для той же начальной конфигурации.

Первая удачная нить длины два – (2, 4), вторая – (8, 2), и т.д. Первая удачная нить длины три – (8, 2, 4), вторая – (6, 8, 2) и т.д.

По второй таблице видим, что первая нить длины два сохранилась, вторая тоже. Первая нить длины три сохранилась, вторая – нет.

Итого, можно сформулировать серию правил конструирования двумерного плана π^2 , при которых в плане должна сохраняться n -ая удачная нить длины k .

Правило (1; 2). Пусть $\pi_* = \{\pi_1, \dots, \pi_M\}$. Пусть π_j – меньшая из компонент вектора длин перелётов $\Delta \mathbf{t}^*(\pi_*)$. Тогда номера целей π_{j-1}, π_j образуют первую удачную нить длины два. Тогда будем строить двумерный план $\pi^2 = (\pi_1(k_1); \pi_2(k_2))$, $k_1 + k_2 = M$, так, чтоб в нём эта нить сохранялась.

Правило (2; 2). Аналогично правилу (1; 2) будем конструировать $\pi^2 = (\pi_1(k_1); \pi_2(k_2))$, $k_1 + k_2 = M$, так, чтоб сохранялась вторая удачная нить длины два.

Правило (3; 2). Сохраняется третья удачная нить длины два.

Правило (1; 3). Сохраняется первая удачная нить длины три.

Правило (2; 3). Сохраняется вторая удачная нить длины три.

Приведём данные статистического анализа по данным пяти правилам.



Рис. 11. Статистика правила (1; 2)



Рис. 12. Статистика правила (2; 2)

Результаты правила (1; 2) и правила (2; 2) косвенно подтверждают исходную гипотезу о том, что сохранение первой удачной нити длины два важнее второй. Результаты при сохранении второй нити хуже, чем при сохранении первой. Тем не менее, нельзя сказать, что они хуже существенно. Средние ошибки выросли не более чем на 4%.



Рис. 13. Статистика правила (3; 2)

Судя по рис. 13, результаты стали хуже, но ухудшились они ещё меньше, чем при переходе от правила (1; 2) к правилу (2; 2). Приведём статистику для сохранения первой нити длины три.

Сохранение трёх целей существенно сокращает перебор, а результаты при этом ухудшаются. Тем не менее, средняя ошибка всё ещё не превышает 10%.



Рис. 14. Статистика правила (1; 3)

Приведём статистику для сохранения второй нити длины три.



Рис. 15. Статистика правила (2; 3)

При сохранении второй удачной нити средние ошибки для 9 и 10 целей превысили 10%, фактические средние подобрались к 19%.

На всех графиках ошибок заметен дрейф показателя в сторону уменьшения при росте числа целей. Это означает, что применение правил тем меньше вносит ошибку, чем больше целей.

Отдельно прокомментируем первый график в каждой из пяти приведённых групп. Процент совпадения субоптимального и оптимального планов далёк от ста, для правил (1; 3), (2; 3) он приближается к 40%. Если интерпретировать этот процент как «вероятность правильного ответа», то результат конечно неудовлетворителен, но дело в том, что так интерпретировать этот график неверно. Фактически, означенный процент – это вероятность получить при использовании соответствующего правила нулевую ошибку, т.е. идеальный результат.

4. Итоговый алгоритм

Разумеется, при использовании статистически более успешных правил страдает быстродействие, верно и обратное, выигрыш в скорости влечёт за собой потерю точности. Потому естественно представить два антогонистических алгоритма, алгоритм с упором на точность и алгоритм с упором на скорость:

В случае, когда недопустима средняя ошибка, большая 4%, единственно возможным к использованию правилом является правило (1; 2) – правило сохранения первой удачной нити длины два.

В случае же, когда точность не так критична, и нужно получить больший выигрыш в скорости, разумно использовать правило (1; 3) – о сохранении первой удачной нити длины три.

Отметим, что правило СПЦ даёт почти те же результаты, что правило (1; 2), с небольшим выигрышем по скорости, но и небольшой утратой в точности, из-за чего выбор был отдан всё же правилу (1; 2).

Правила (2; 2) и (3; 2) в сравнении с (1; 2) не дают выигрыша в скорости и проигрывают в точности. Что и до всех численных экспериментов диктовалось логикой, однако всё же было проверено и экспериментально. То же самое стоит сказать о правиле (2; 3) в сравнении с (1; 3).

Алгоритм 1. (точность):

1. Пусть фиксирована некоторая начальная конфигурация K задачи 2 с M целями, $5 \leq M \leq 14$, пусть для задачи 1 с той же начальной конфигурацией известен оптимальный план π_* .

2. Найдём вектор длительностей перелётов $\Delta \mathbf{t}^*(\pi_*)$. Найдём l_2^1 – первую удачную нить длины два.

3. Образует множество поиска $\tilde{\Pi}_M^2 \subset \Pi_M^2$ из тех лишь двумерных планов, что сохраняют нить l_2^1 .

4. Наконец, конструируемый двумерный план $\tilde{\pi}^2$ таков, что

$$(8) \quad \tilde{\pi}^2 \in \arg \min_{\pi^2 \in \tilde{\Pi}_M^2} T_{sum}^2(\pi^2).$$

Поиск данного минимума осуществляется перебором, выигрыш в скорости обуславливается $|\tilde{\Pi}_M^2| < |\Pi_M^2|$.

Алгоритм 2. (скорость):

1. Пусть фиксирована некоторая начальная конфигурация K задачи 2 с M целями, $5 \leq M \leq 14$, пусть для задачи 1 с той же начальной конфигурацией известен оптимальный план π_* .

2. Найдём вектор длительностей перелётов $\Delta \mathbf{t}^*(\pi_*)$. Найдём l_3^1 – первую удачную нить длины три.

3. Образует множество поиска $\tilde{\Pi}_M^2 \subset \Pi_M^2$ из тех лишь двумерных планов, что сохраняют нить l_3^1 .

Наконец, конструируемый двумерный план $\tilde{\pi}^2$ таков, что

$$(9) \quad \tilde{\pi}^2 \in \arg \min_{\pi^2 \in \tilde{\Pi}_M^2} T_{sum}^2(\pi^2).$$

Поиск данного минимума осуществляется перебором, выигрыш в скорости обуславливается $|\tilde{\Pi}_M^2| < |\Pi_M^2|$.

5. Заключение

В работе была рассмотрена задача о перераспределении целей (раздел 2.4) как задача-сужение динамической задачи коммивояжёра для двух перехватчиков. Для её решения в ходе работы были предложены шесть эвристических правил.

Каждое из этих правил было подвергнуто статистическому анализу, были оценены такие показатели как средняя ошибка, наибольшая ошибка, вероятность получения нулевой ошибки, а так же средняя ошибка среди тех случаев, в которых ошибка была ненулевой (фактическая средняя ошибка).

Статистическое моделирование, проведённое для 9 – 14 целей, подтвердило целесообразность использования сформулированных эвристических правил. Позволило подтвердить изначальную гипотезу о том, что тем к меньшей ошибке приводит их использование, чем больше целей необходимо обойти. Тем самым, получены основания полагать, что использование данных правил не теряет эффективности и при большем, чем 14 числе целей.

Проведённые эксперименты обнаружили как минимум две закономерности, которые требуют дальнейшего объяснения и могут стать основами для будущих работ. Во-первых, это рассинхронность статистических показателей для правила СПЦ в случае чётного и нечётного числа целей, во-вторых – нахождение всех двумерных планов в ярко-выраженном конусе, видимом на рисунках 9, 10, 11. В будущем возможна работа в целях нахождения строгого математического обоснования существованию данных конусов.

Кроме того, существенный интерес представляет одновременное использование сформулированных правил между собой и оценка эффективности данного подхода. Наконец, качественно более трудным для дальнейшего выглядит изучение задачи ДЗК с другим критерием оптимизации, а именно не с суммарно затраченным временем, а суммарно пройденным перехватчиками расстоянием.

Литература

1. ГАЛЯЕВ А.А., ЯХНО В.П., ЛЫСЕНКО П.В., БЕРЛИН Л.М., БУЗИКОВ М.Э. Оптимизация плана перехвата прямолинейно движущихся целей // Автоматика и телемеханика. – 2023. – Т. 10. – С. 18–36.
2. СИХАРУЛИДЗЕ Г.Г. Об одном обобщении задачи коммивояжера. I // Автомат. и телемех. – 1971. – Т. 8. – С. 116–123.
3. BUZIKOV M.E., GALYAEV A.A. Minimum-time lateral interception of a moving target by a Dubins car // Automatica. – 2022. – Vol. 135.
4. MENGER K. Das botenproblem // Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums 2. – 1932. – Vol. 39. – P.11–12.
5. LAWLER E.L., LENSTRA J.K., RINNOOY KAN A.H.G., SHMOYS D.B. The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization // 1985. – P.1–476.
6. HELVIG C., ROBINS G., ZELIKOVSKY A. The moving-target traveling salesman problem // Journal of Algorithms – 2003. – Vol. 49. – P.153–174.
7. STIEBER A., FÜGENSCHUH A. Dealing with time in the multiple traveling salespersons problem with moving targets // Central European Journal of Operations Research – 2020. – Vol. 30. – P.991–1017.
8. CHOUBEY N.S. Moving target travelling salesman problem using genetic algorithm // Int. J. Comput. Appl. – 2013. – V. 70. – P. 30–34.
9. ISAIAN P., SHIMA T. Motion planning algorithms for the Dubins travelling salesperson problem // Automatica. – 2015. – Vol. 53. – P.247–255.
10. STIEBER A. The multiple traveling salesperson problem with moving targets // Cottbus Mathematical Preprints. – 2022.

11. AHRENS B. The tour construction framework for the dynamic Travelling Salesman Problem // SoutheastCon, IEEE. – 2015. – P.1–8.
12. SMITH C.D. Assessment of genetic algorithm based assignment strategies for unmanned systems using the multiple traveling salesman problem with moving targets // Thesis (M.S.), Department of Civil and Mechanical Engineering, University of Missouri. – 2021.

ON REDISTRIBUTION OF TARGETS BETWEEN
INTERCEPTORS IN MOVING TARGETS TRAVELING
SALESMAN PROBLEM

Andrey Galyaev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,
Doctor of Sciences, corresponding member of RAS
(galaev@ipu.ru).

Pavel Dolgushin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,
technician (dolpad@ipu.ru).

Abstract: The paper considers a moving targets traveling salesman problem (MTTSP) with rectilinearly moving targets. Within the framework of the general formulation, a private subtask is considered – task on the redistribution of targets between two traveling salesmen (interceptors). Assuming that the optimal plan for bypassing targets for one interceptor is known, the task is to find the optimal plan for each of the two with a given initial target configuration. For this purpose, an algorithm for redistributing targets is proposed, a statistical analysis is carried out and the results of its work are presented.

Keywords: MTTSP, combinatorial optimization, target redistribution problem.

517.977
22.161.83

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...

Поступила в редакцию ...

Дата опубликования ...