УДК 519.711.2
ББК 32.817

СРАВНЕНИЕ СПОСОБОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА В ОКРЕСТНОСТИ ГРАНИЦЫ ДОПУСТИМОЙ ОБЛАСТИ

Салангин А.А.[1]
(Псковский государственный политехнический институт, Псков)

В работе рассмотрены два способа решения задач оптимизации в системном проектировании, основанные на методе сближения параметрических множителей и методе возможных направлений; доказано преимущество первого. Предложен и обоснован алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений, основанный на методе ортогонализации векторов, который слабо чувствителен к погрешностям вычислений.

Ключевые слова: системное проектирование, метод, оптимизация, ортогонализация..

Введение

Пусть функционирование системы характеризуется критериальной функцией $F(x)$ в пространстве изменения переменных $x_i, \quad i = 1, ..., n$. Задача параметрического синтеза в общем виде формулируется как задача нахождения такого вектора x^{opt}, который минимизирует функцию $F(x)$ в области ограничений $G(x)$:

$$\begin{cases} F(x) \to min \\ G(x) \leqslant G_0. \end{cases} \quad (1)$$

Вариационный подход к решению таких задач заключается в минимизации функции Лагранжа. В практических задачах системного проектирования обычно $f_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i} < 0,\ g_i = \dfrac{\partial G}{\partial x_i} > 0$ и

[1] *Алексей Александрович Салангин, кандидат технических наук, доцент,(alsalan@yandex.ru).*

минимум F достигается на границе допустимости области, т. е. при $G(x) = \ G_0$[1]. Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид

$$f_i + \lambda g_i = 0, \quad i = 1, ..., n$$
$$G(x) = G_0,$$

где λ - множитель Лагранжа.

Кроме этого, в задачах проектирования функция ограничений чаще всего представлена алгоритмически, компоненты x могут иногда только возрастать и принимать дискретные значения (например, при планировании испытаний). Поэтому традиционные итерационные методы поисковой оптимизации (градиентный, сопряженных направлений и др.) малопригодны.

В работах [1,2] предложены пути преодоления указанных трудностей при следующих предположениях:

– известны приближенные аналитические выражения для градиентов функций F, G;

– есть возможность определять значения функции G для конкретных значений вектора x_i , например, статистическим моделированием.

Эти предположения можно принять на этапе эскизно-технического проектирования.

Если в качестве нулевого приближения x^0 к решению задачи принимается значение характеристик систем, определяемое с использованием приближенной зависимости $G(x)$ от параметров, то решение задачи (1) можно свести к последовательности задач по его итерационному уточнению $x^{k+1} = x^k + \varepsilon^k, \quad k = 0, 1...$ Поправки ε^k находят из условий

(2) $$\begin{cases} -\Delta F = F^k - F^{k+1} \to max \\ \Delta G = G^{k+1} - G^k = \delta G = G_0 - G^k \end{cases}$$

с учетом величин второго порядка малости

(3) $$\begin{cases} -\Delta F = -(f, \varepsilon)^k - \dfrac{1}{2}(\varepsilon, V\varepsilon)^k \\ \Delta G = (g, \varepsilon)^k + \dfrac{1}{2}(\varepsilon, W\varepsilon)^k, \end{cases}$$

где V, W - матрицы вторых производных критериальной функции и функции ограничений с компонентами $v_{ij},\ \omega_{ij}$, соответственно.

Тогда необходимые условия минимума функции Лагранжа для k-го этапа приближения

(4) $\quad (f + V\varepsilon + \lambda(g + W\varepsilon))_i = 0, \quad i = 1, ..., n;\ \Delta G = \delta G$

Алгоритм решения системы (4) зависит от способа нахождения множителя Лагранжа. Ниже предлагаются два варианта такого выбора: первый основан на методе сближения параметрических множителей, второй - на методе возможных направлений с использованием линейного представления для $\Delta G = (g, \varepsilon)$.

1. Метод сближения параметрических множителей

В методе сближения параметрических множителей [1] вводятся понятия:

- параметрического множителя, определяемого как $\lambda_i = -\dfrac{f_i}{g_i}$;
- λ- магистрали как линии, на которой несколько параметрических множителей равны между собой;
- G- магистрали как линии вдоль которой $G(x) = G_0$.

При сходимости итерационного процесса (2)и(3) в предельной точке все параметрические множители должны быть равны между собой, а магистрали – пересекаться.

Предположив, что с помощью некоторого алгоритма мы вышли на границу допустимой области, разложим параметрические множители вблизи x_i^k в ряд, ограничиваясь (в силу малости ε) линейным приближением

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \sum_{j=1}^{n} \frac{d\lambda_i^k}{dx_j} \varepsilon_j.$$

Определим из условия $\lambda_i^{k+1} = \lambda$ сдвиг вдоль границы допустимой области , где в линейном приближении

$$\Delta G = \sum_i g_i \varepsilon_i = 0. \tag{5}$$

Так как $\dfrac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} = -\lambda_i a_{ij}$, где $a_{ij} = -\dfrac{\upsilon_{ij}}{f_i} + \dfrac{\omega_{ij}}{g_i}$, то имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j = \ \frac{\lambda_i - \lambda}{\lambda_i}.$$

Следовательно, вектор поправок ε можно определить, решая систему алгебраических уравнений

$$A\varepsilon = d(\lambda), \tag{6}$$

где a_{ij}-компоненты матрицы A; $d_i = \dfrac{\lambda_i - \lambda}{\lambda_i}$-компоненты вектора правой части.

Рассмотрим случай, когда матрица A диагональная (например, в задаче о статистической оценке показателя функционирования [1]). Тогда имеем

$$\lambda_i^k - \lambda_i^k a_{ii}^k \varepsilon_i = \lambda, \tag{7}$$

$$\varepsilon_i = \ (\lambda_i - \lambda)\frac{b_i}{g_i}, \quad b_i = \frac{g_i}{\lambda_i a_{ii}}. \tag{8}$$

В линейном приближении с учетом (5)

$$\sum_i g_i \varepsilon_i = \sum_i (\lambda_i - \lambda) b_i = 0.$$

Отсюда следует

$$\lambda = \frac{\sum_i \lambda_i b_i}{\sum_i b_i}. \tag{9}$$

С учетом квадратичных членов найденное значение λ следует изменить на $\lambda^{'} = \lambda - \theta$, где θ малая поправка. Тогда $\varepsilon_i^{'} = (\lambda_i - \lambda + \theta)\dfrac{b_i}{g_i} = \varepsilon_i + \theta\dfrac{b_i}{g_i}$ и с учетом (5) $(g, \varepsilon^{'}) = (g, \varepsilon) + \theta \sum_i b_i = \theta \sum_i b_i$. Из условия $\Delta G = 0$ с учетом (3) находим $\theta \sum_i b_i + \dfrac{1}{2} \sum_i \omega_{ii} \varepsilon_i^2 = 0$.

Далее, используя (9),имеем $\theta \sum_i \lambda_i b_i = -\dfrac{\lambda}{2} \sum_i \omega_{ii} \varepsilon_i^2$. Тогда

$$-\Delta F = \sum_i \lambda_i g_i \varepsilon_i + \theta \sum_i \lambda_i b_i - \frac{1}{2} \sum_i \upsilon_{ii} \varepsilon_i^2 =$$

(10)
$$= \sum_i \lambda_i (\lambda_i - \lambda) b_i - \frac{1}{2} \sum_i (\lambda \omega_{ii} + \upsilon_{ii}) \varepsilon_i^2.$$

Первое слагаемое в (10) преобразуем к виду

$$\sum_i \lambda_i (\lambda_i - \lambda) b_i = \sum_i (\lambda_i - \lambda)^2 b_i.$$

Так как разница $\lambda_i - \lambda$ в соответствии с (7) пропорциональна ε, то во втором слагаемом (10) проведем замену $\lambda \to \lambda_i$ и учтем, что $\lambda_i \omega_{ii} + \upsilon_{ii} = \lambda_i g_i a_{ii} = \dfrac{g_i^2}{b_i}$.

В итоге получим

(11)
$$-\Delta F = \frac{1}{2} \sum_i (\lambda_i - \lambda)^2 b_i; \ \varepsilon_i = \ (\lambda_i - \lambda) \frac{b_i}{g_i}; \ \lambda = \frac{\sum_i \lambda_i b_i}{\sum_i b_i}; \ b_i = \frac{g_i}{\lambda_i a_{ii}}.$$

2. Метод возможных направлений

В методе возможных направлений компоненты вектора поправок ε выбираются пропорциональными проекции антиградиента критериальной функции на поверхность границы. Тогда величина поправки $\varepsilon_i = -t f_i - r g_i$, где t - длина шага вдоль антиградиента к критериальной функции. Положим значение коэффициента *r* пропорциональным *t*, т. е. $r = t\lambda^*$, где λ^*- параметр, тогда $\varepsilon_i^* = t g_i (\lambda_i - \lambda^*)$.

Вдоль границы допустимой области в линейном приближении

(12)
$$\Delta G = \sum_i g_i \varepsilon_i^* = \sum_i g_i^2 (\lambda_i - \lambda^*) = 0.$$

Тогда

(13)
$$\lambda^* = \frac{\sum_i \lambda_i g_i^2}{\sum_i g_i^2}.$$

Учет квадратичных членов производится аналогично рассмотренному выше методу сближения параметрических множителей. Пусть

$$\lambda' = \lambda^* - \theta; \quad \varepsilon_i' = tg_i(\lambda_i - \lambda') = \varepsilon_i^* + t\theta g_i.$$

Тогда условие $\Delta G = 0$ записывается в виде

$$t\theta \sum_i g_i^2 + \frac{1}{2}\sum_i \omega_{ii}(\varepsilon_i^*)^2 = 0.$$

Выражение для $-\Delta F^*$ преобразуется к виду

$$-\Delta F^* = \sum_i \lambda_i g_i \varepsilon_i^* + t\theta \sum_i \lambda_i g_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i \upsilon_{ii}(\varepsilon_i^*)^2 =$$
$$= t\sum_i (\lambda_i - \lambda^*)^2 g_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i (\lambda^* \omega_{ii} + \upsilon_{ii})(\varepsilon_i^*)^2.$$

Замена $\lambda^* \to \lambda_i$ дает

(14) $$-\Delta F^* = C^* t - D^* \frac{t^2}{2},$$

где $C^* = \sum_i (\lambda_i - \lambda^*)^2 g_i^2; \quad D^* = \sum_i (\lambda_i - \lambda^*)^2 \frac{g_i^4}{b_i}$.
Значение b_i определено в (8). Из (14)следует, что максимальное значение $(-\Delta F^*)$ достигается при $t = \frac{C^*}{D^*}$:

(15) $$max(-\Delta F^*) = \frac{(C^*)^2}{2D^*}.$$

3. Сравнение методов

Пусть $B = \sum_i (\lambda_i - \lambda)^2 b_i,\ B^* = \sum_i (\lambda_i - \lambda^*)^2 b_i$. Из (11,14,15) находим

$$T = \frac{(-\Delta F^*)}{(-\Delta F)} \leqslant \frac{(C^*)^2}{D^* B} = \frac{(C^*)^2}{D^* B^*}\frac{B^*}{B}.$$

Используя неравенство Коши $(C^*)^2 \leqslant D^* B^*$,имеем $T \leqslant \frac{B_*}{B}$.

Представив $\lambda_i - \lambda^*$ в виде $\lambda_i - \lambda^* = (\lambda_i - \lambda) + (\lambda - \lambda^*)$, получим

$$B^* = B + (\lambda - \lambda^*)^2 \sum_i b_i + 2(\lambda - \lambda^*) \sum_i (\lambda_i - \lambda) b_i.$$

В силу (5) и (8) последнее слагаемое равно нулю, следовательно, разница между B^* и B пропорциональна $(\lambda - \lambda^*)^2$ и, поскольку $min\lambda_i < \lambda, \lambda^* < max\lambda_i$, то $|B^* - B| < (max\lambda_i - min\lambda_i)^2 \sum_i b_i$. Так как при выходе на границу допустимой области реализована (частично) процедура сближения параметрических множителей можно принять $B = B^*$, а значит $T \leqslant 1$.

Отсюда следует, что в итерационной процедуре нахождения оптимального распределения в рамках квадратичного приближения метод сближения параметрических множителей эффективнее метода возможных направлений.

4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом А-ортогонализации

В задачах параметрической оптимизации решение уравнений Лагранжа находят с использованием итерационной процедуры, реализация которой требует нахождения поправок путем решения систем линейных уравнений (6). Известно , что теоретически метод ортогонализации применительно к таким системам должен обеспечить более точные результаты, чем метод Гаусса[3]. В большинстве случаев методы ортогонализации строятся на процедуре Шмидта, которая на практике чувствительна к вычислительным погрешностям. В работе [4] предложен устойчивый прямой процесс ортогонализации векторов, где доказано, что по заданному вектору $a \in E^n$ в системе ортонормированных векторов $e_k \in E^n,\ k = 1, \ldots, n$ можно построить систему ортогональных векторов P_k по формулам:

(16)

$$\begin{cases} P_1 = a; \\ P_k = \left[\sum_{i=k}^n (a, e_i)^2\right] e_{k-1} - (a, e_{k-1}) \sum_{i=k}^n (a, e_i) e_i,\ k = 2, \ldots, n, \end{cases}$$

где $(a, e_i) = a_i$—i-ая компонента вектора a в базисе векторов e.

Используем формулы (16) для построения прямого метода нахождения решения системы (6).

Пусть матрица коэффициентов A симметрическая и решение будем искать в виде

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S_i, \tag{17}$$

где S_i – базисные векторы, α_i – постоянные коэффициенты. Подставив (17) в (4), находим

$$r_n = r_0 + \alpha_1 AS_1 + \alpha_2 AS_2 + \ldots + \alpha_n AS_n \tag{18}$$

где $r_0 = A\varepsilon_0 - d$, $r_n = A\varepsilon_n - d$–начальная и n–ая невязки. Умножая скалярно (18) на S_i и, используя условие полноты системы базисных векторов $(r_n, S_i) = 0$, получим систему уравнений $D\alpha = p$ для нахождения коэффициентов α_i, в которой (AS_i, S_j)– элементы матрицы D, $-(r_0, S_i)$– элементы вектора p; $i, j = 1, \ldots, n$. Если в качестве базисных векторов S_i взять A-ортогональные векторы, то матрица D будет иметь только dиоганальные элементы.

Для построения системы A-ортогональных векторов S_i предложим следующий алгоритм:

1) Положим $a = r_0$ и по формулам (16) найдем систему ортогональных векторов P_k в естественном ортонормированном базисе. Полученная система после нормировки ($\|P\| = \sqrt{\sum_i p_i^2}$) образует ортонормированный базис $(y_1, \ldots, y_n)$.

2) Примем $S_1 = y_1$. Вычислим вектор $a = AS_1$, найдем его координаты (a, y_i) в базисе $(y_1, \ldots, y_n)$ и, используя (16),получим после нормировки новый ортонормированный базис $(x_1, \ldots, x_n)$.

3) Примем $S_2 = x_n$, тогда $(AS_1, S_2) = (S_1, S_2) = 0$.

4) Вычислим вектор $a = AS_2$, найдем его координаты в базисе $(x_1, \ldots z_n)$, затем, используя (16), получим новый ортонормированный базис $(u_1, \ldots, u_n)$.

5) Продолжая этот процесс, получаем систему $(S_1, \ldots, S_n)$ А-ортогональных векторов $(AS_i, S_j) = 0, \quad i \neq j$. Кроме этого $(S_1, S_i) = 0, \ i = 2, \ldots, n-1$.

В итоге найдем решение исходной системы (6)в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha_1 S_1 + \alpha_n S_n,$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{(r_0, S_1)}{(AS_1, S_1)}, \quad \alpha_n = -\frac{(r_0, S_n)}{(AS_n, S_n}), \quad \alpha_i = 0, \ i = 2, \ldots, n-1.$$

Можно положить $\varepsilon_0 = 0, \quad S_1 = r_0 = -d$, тогда

$$\varepsilon = \frac{(d, d)}{(Ad, d)} d + \frac{(d, S_n)}{(AS_n, S_n)} S_n.$$

Решение системы (6) с матрицей А общего вида будем искать также в виде (17). Пусть имеется некоторый базис, составленный из векторов $V \in E^n$. Умножив скалярно (18) на V_i и, используя условие $(r_n, V_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$ получим систему уравнений $D\alpha = p$ для нахождения коэффициентов α_i, в которой (AS_i, V_j)– элементы матрицы D, $-(r_0, V_i)$– элементы вектора p; $i, j = 1, \ldots, n$.. Выберем векторы S и V двойственными (А-биортогональными),т. е.$(AS_i, V_j) = 0, \quad i \neq j$,, тогда матрица D будет диагональной.

Предложим алгоритм построения двойственных векторов S и V на основе описанного выше процесса А-ортогонализации. Используя соотношение $(AS_i, V_j) = (S_i, A^T V_j)$, где A^T — транспонированная матрица, построим векторы S_i, ортогональные к векторам $A^T V_j$, а векторы V_j, ортогональные векторам AS_i.

Этот процесс может быть представлен поэтапно:

1) Полагаем $V_1 = S_1 = r_0$;

2) Вычисляем вектор $A^T V_1$ и находим, используя алгоритм А-ортогонализации, вектор S_2, ортогональный векторам $A^T V_1$ и S_1;

3) Вычисляем вектор AS_1 и находим, используя алгоритм A-ортогонализации, вектор V_2, ортогональный векторам AS_1 и V_1;

4) Вычисляем вектор $A^T V_2$ и находим аналогично вектор S_3, ортогональный векторам $A^T V_1$, $A^T V_2$ и S_1;

5) Вычисляем вектор AS_2 и находим аналогично вектор V_3, ортогональный векторам AS_1, AS_2 и V_1 и т.д.

Построенные таким образом векторы S_i и V_i удовлетворяют соотношениям биортогональности $(AS_i, V_j) = 0,\ i \neq j$. Кроме этого, $(V_1, V_i) = (r_0, V_i) = \ 0,\ i = 2, \ldots, n-1$. Если $A = A^T$, то рассмотренный алгоритм порождает векторы $V_i = S_i$.

В итоге находим решение исходной системы (6)в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha_1 S_1 + \alpha_n S_n, \tag{19}$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{(r_0, V_1)}{(AV_1, V_1)}, \quad \alpha_n = -\frac{(r_0, V_n)}{(AS_n, V_n)}, \quad i = 2, \ldots, n-1.$$

При $\varepsilon_0 = 0,\ \ S_1 = V_1 = r_0 = -d$ получим

$$\varepsilon = \frac{(d,d)}{(Ad,d)} d + \frac{(d, V_n)}{(AS_n, V_n)} S_n.$$

Машинная реализация предложенного алгоритма показала его устойчивость к погрешностям вычислений.

Литература

1. САЛАНГИН А.А. *Методология системного анализа проектируемых технических комплексов :моногр.*/А.А.Салангин.- Псков:ППИ,2009.-280с.
2. СМИРНОВ Ю. М. *Системный подход к проектированию сложных систем.*/Ю. М.Смирнов , А.А.Салангин // Вестник Херсонского национального технического университета. - 2006.- Вып.2.- С. 466 - 472.

3. ВОЕВОДИН В. В.*Численные методы алгебры : теория и алгоритмы*/В. В.Воеводин.-М.:Наука,1966
4. ДЕМИРЧЯН К. С.*Устойчивый метод организации векторов для расчета электрических цепей*/К.С.Демирчян,Ю.В.Ракитский//Известия АНСССР: Энергетика и транспорт.-№4.-1981.-С.72-77.

COMPARISON OF PARAMETRIC SYNTHESIS METHODS IN THE FIELD OF THE FEASIBLE REGION'S BORDER

Aleksey Salangin, Pskov State Politechnic Institute, Pskov, Cand.Sc., assistant professor, (alsalan@yandex.ru).

Abstract: There has been suggested two types of procedure methods of optimization in system engineering, based on approaching method of multiplicative parameters and method of possible directions; the advantage of the first one has been proved. There has been offered and established the solution algorithm of the system of linear algebraic equations, based on vector orthogonalization method, which is weakly sensitive to error of computation.

Keywords: system engineering, orthogonalization, optimization, method..