

## ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМНОЙ МОДЕЛИ

### МАГНИТОПЛАЗМЕННОГО ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО УСКОРИТЕЛЯ

Михайлов А. А.<sup>1</sup>, Михайлова С. А.<sup>2</sup>

(Южно-Российский государственный политехнический университет, Новочеркасск)

В статье рассмотрены проблемы построения фрактальной модели магнитоплазменного электродинамического ускорителя. Моделирование такой сложной системы определяется как процесс вычисления обобщенного решения уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова, описывающих реальные физические процессы в эрдитарных (*hereditarity*) системах. Исследованы решения данного уравнения, получаемые после обобщения на дробные производные Римана-Лиувилля.

Ключевые слова: магнитоплазменный электродинамический ускоритель (ЭДУ), эрдитарная (*hereditarity*) модель системы, уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова, дробные производные Римана-Лиувилля.

#### Общий анализ объекта исследования

Современные системы высокоскоростного разгона на базе магнитоплазменных электродинамических ускорителей (ЭДУ) [1] представляют собой сложную динамическую многоуровневую систему [2] функционально связанных подсистем, состояния которых характеризуются большим количеством технологических параметров. Примером данных систем является магнитоплазменный электродинамический ускоритель (ЭДУ) с управляемым разгоном объекта управления (рис. 1), который состоит из импульсного источника энергии (ИИЭ), устройство предварительного ускорения (УПУ), рельсотрона (РК) с движущимся плазменным поршнем (ПП) и толкаемым им телом [11].

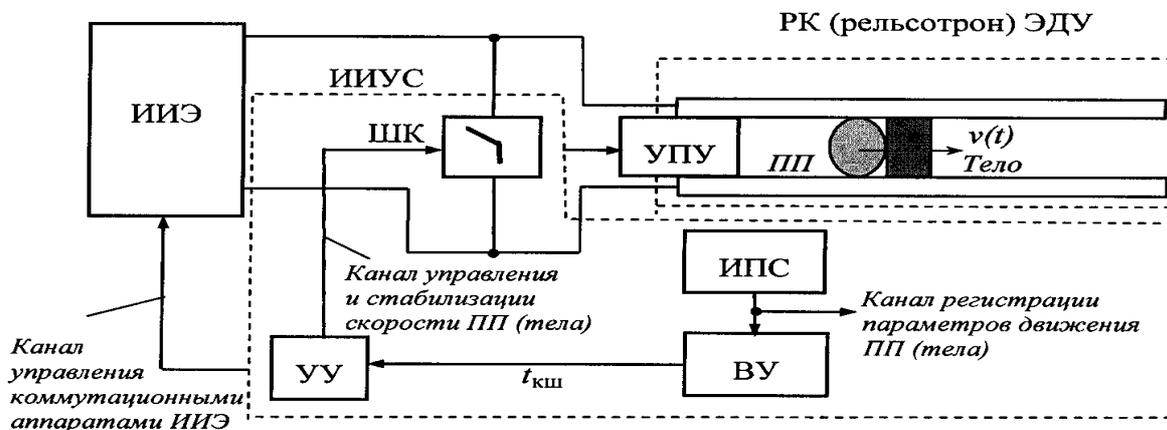


Рис. 1. Структура ИИУС магнитоплазменного ЭДУ с управляемым разгоном

ЭДУ включает информационно-измерительную и управляющую системы (ИИУС), система автоматического управления содержит шунтирующий ключ (ШК), измерительный преобразователь скорости (ИПС), вычислительное устройство (ВУ), устройство управления (УУ) с каналом управления РК и каналом управления коммутаторами ИИЭ. Управление разгоном ПП в ЭДУ заключается в том, что по направляющим РК (рельсам) протекает электрический ток от ИИЭ через подвижную проводящую перемычку в виде ПП, который начально является частью цепи. Созданное током  $I$ , идущим через рельсы, магнитное поле  $B$  между ними, перпендикулярно току, проходящему через ПП и смежный рельс взаимо-

<sup>1</sup> Анатолий Александрович Михайлов, доктор технических наук, доцент (*mih01@mail.ru*).

<sup>2</sup> Светлана Анатольевна Михайлова, ассистент (*wetochka@bk.ru*)

действует с током в ПП и порождает электромагнитную силу Лоренца  $F$ , разгоняющую электропроводный ПП вдоль рельсов. Ограничение скорости ПП на заданном уровне осуществляется за счет прерывания в определенный момент процесса передачи энергии от ИИЭ к РК путем шунтирования входа рельсо-трона с помощью ШК, срабатывающего по сигналу УУ.

Современный инженерный подход для описания состояния динамических систем обычно использует оценки для гауссовского распределения, что определяет возможность применения гарантированного (робастного) подхода при формировании модели движения плазмы в ЭДУ в виде системы  $N$  обыкновенных дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = f(t, \bar{z}(t), u, \bar{\chi})$$

с начальными условиями:

$$\bar{z}(t_0) = \bar{z}_{0, \text{ном}} + \Delta\bar{z}_0,$$

где  $\bar{z}(t)$  – вектор состояния,  $u$  – управление,  $\bar{\chi} = \bar{\chi}_{\text{ном}} + \Delta\bar{\chi}$  – вектор возмущаемых параметров,  $\bar{\chi}_{\text{ном}}$  и  $\Delta\bar{\chi}$  – векторы номинальных значений и возмущений параметров процесса ускорения,  $\bar{z}_{0, \text{ном}}$  – вектор номинальных начальных условий,  $\Delta\bar{z}_0$  – вектор их возмущений.

Однако обычно сумма случайных величин сходится не к гауссовским, а к классу устойчивых распределений «Леви – Парето» с тяжелыми хвостами (фрактальными распределениями, со степенными распределениями или паретианами), выборочные средние которых неустойчивы и малоинформативны [18]. Поэтому подмена распределений «Леви – Парето» при формировании модели динамических систем нормальным законом распределения приводит к тому, что модель в виде винеровского процесса, соответствующее нормальному закону распределения, остается непрерывной, в то время модель, например, в виде процесса Коши, соответствующая распределению Коши из класса распределений «Леви – Парето», время от времени терпит разрывы. В связи с этим приходится использовать математическую модель [21], включающую параметры (координаты) системы, определяющие ее состояние, и закон пространственно-временной эволюции состояний в общем виде, который на основе знаний о состоянии в начальный момент времени  $t_0$  в точке пространства  $x_0$  определяет состояние системы в любой момент времени  $t > t_0$ . Причем ПП в модели системы задается фрактальной структурой (в том числе и динамической) [12], что определяет переход к эрдитарной (*hereditarity*) модели системы [5], для которой при заданной топологии множества состояний часть состояний от их общего числа необратимо теряется в процессе эволюции и становятся недоступными для системы.

Целью статьи является формирование модели ЭДУ в виде эрдитарной модели с «остаточной» памятью, описывающей скрытый порядок в системах данного класса.

### Выбор концептуальной модели системы

В процессе функционирования динамическая система с полной памятью проходит через все состояния непрерывным образом без потерь и представляется интегралом свертки

$$J(t) = \int_0^t k(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

который преобразует входной сигнал  $f(t)$  в выходной сигнал  $J(t)$  с помощью импульсной функции (функции памяти)  $k(t)$ . Если

$$k(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \geq 0, \\ 0 & \text{для } t < 0 \end{cases}$$

ступенчатая функция, то выражение (1) будет интегралом первого порядка.

Система с марковским процессом (с полным отсутствием памяти), заданная вероятности перехода  $P(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1})$  от состояния  $x_{i-1}$  к состоянию  $x_i$ , которая определяется уравнением Чепмена–Колмогорова–Смолуховского (ЧКС) [4], в процессе эволюции теряет все свои состояния кроме одного с бесконечно большой плотностью. При этом  $k(t) = \delta(t)$  – функция Дирака, а преобразование (1) в виде

$$f(t) = \int_0^t \delta(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (2)$$

определяет начальное состояние системы, что можно интерпретировать как интегрирование нулевого порядка. Причем все последующие состояния в системе через плотность вероятности перехода связаны с предыдущими через одно текущее состояние в каждый момент времени  $t$ .

Для эредитарных систем [5], занимающих промежуточное место между марковскими системами с полным отсутствием памяти и простыми системами с полной памятью, функция памяти для интеграла свертки (1) интерполируется дробной функцией  $k(t) = k_\alpha(t)$  между  $\delta$ - функцией (интегрирование нулевого порядка) и ступенчатой функцией (интегрирование первого порядка). Причем модель эредитарной системы определяется топологией множества состояний системы, задаваемой его размерностью, и функцией плотности вероятности перехода.

### Оценка размерности множества состояний системы

Для исследования структуры множества  $S$  состояний системы  $\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$  ( $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ) мощности  $I = |X|$  воспользуемся ступенчатой функцией

$$\eta(x_1 < x < x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [x_1, x_2], \\ 0, & \text{если } x \text{ вне } [x_1, x_2], \end{cases} \quad (3)$$

лапласовский образ которой с параметром преобразования Лапласа  $p$  равен

$$\eta(x_1 < x < x_2) \rightarrow \frac{1}{p} \exp[-px_1] \{1 - \exp[-p(x_2 - x_1)]\},$$

а для ступенчатой функции (3) на  $k$ -й стадии имеет вид

$$\eta(x_k^{(n)} < x < x_{k+1}^{(n)}) \rightarrow \frac{1}{p} \exp[-px_k^{(n)}] \{1 - \exp[-p\Delta_n]\},$$

где  $\Delta_n = x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}$ .

Если повторить этот процесс для  $(n+1)$ -го этапа, то получим

$$\begin{aligned} & \eta(x_k^{(n)} < x < x_k^{(n)} + \Delta_{n+1}) + \eta(x_k^{(n)} + \Delta_n - \Delta_{n+1} < x < x_k^{(n)} + \Delta_n) \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{p} \exp(-px_k^{(n)}) [1 - \exp(-p\Delta_n)] + \frac{1}{p} \exp(-px_k^{(n)}) \exp[-p(\Delta_n - \Delta_{n+1})] \times \\ & \times [1 - \exp(-p\Delta_{n+1})] = \frac{1 - \exp(-p\Delta_{n+1})}{p_{(n+1)}} \left[ 1 + e^{-p(\Delta_n - \Delta_{n+1})} \exp(-px_k^{(n)}) \right]. \end{aligned}$$

Используя связь  $x_k^{(n)} = x_{k+1}^{(n+1)}$  и вновь повторяя эту процедуру, имеем

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \eta(x_k^{(n+1)} < x < x_{k+1}^{(n+1)}) \rightarrow \frac{1}{p} [1 - \exp(-p\Delta_{n+1})] \prod_{k=1}^n \{1 + \exp[-p(\Delta_{k-1} - \Delta_k)]\}. \quad (4)$$

Воспользовавшись при определении  $\Delta_n$  для функции  $f(x)$  (с образом Лапласа  $F(p)$ ) последовательным делением с коэффициентом деления  $\xi$  мощности множества состояний  $l$ , имеем  $\Delta_n = \xi^n l$ , а из (2) для совокупности ступенчатых функций

$$J(x) = \frac{1}{(2\xi)^N l} \int_0^l dx \sum_{m=1}^{2^N} \eta(x_m^{(N)} < x < x_{m+1}^{(N)}) f(x),$$

для которого, используя (4), имеем

$$J(x) \rightarrow \Phi(p) = \frac{1 - \exp(-pl\xi^N)}{pl\xi^N} Q_N(pl(1-\xi)) F(p), \quad (5)$$

где

$$Q_N(z) = 2^{-N} \prod_{n=0}^{N-1} [1 + \exp(-z\xi^n)] \text{ с } z = pl(1-\xi). \quad (6)$$

Для относительно больших  $N$  ( $N \gg 1$ ),  $|pl\xi^N| \ll 1$  из (5) следует

$$\Phi(p) = Q_N(z) F(p). \quad (7)$$

Из выражения (6) следует

$$Q_N(z) = \frac{[1 + \exp(-z\xi^{N-1})]}{2} Q_{N-1}(z),$$

причем  $Q_N(z)$ , определенное выражением (6), удовлетворяет также уравнению [17]:

$$Q_N(z/\xi) \cong 1/2 Q_{N-1}(z). \quad (8)$$

При  $N \rightarrow \infty$  существует предел  $Q_N(z)$ . Используя неравенство  $0 < |\exp(-pl\xi^n(1-\xi))| < 1$ , можно принять, что для любого  $pl$  ( $0 < |pl| < \infty$ )

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(z) = \bar{Q}(z) < 1.$$

Поэтому в пределе уравнение (8) преобразуется к виду

$$\bar{Q}(z/\xi) = 1/2 \bar{Q}(z),$$

решение которого [17] имеет вид  $\bar{Q}(z) = A_\nu z^{-\nu}$ , откуда  $A_\nu (z/\xi)^{-\nu} = \frac{1}{2} A_\nu z^{-\nu}$  и после логарифмирования имеем  $\nu = \ln 2 / \ln(1/\xi)$  (9) – размерность множества состояний [17].

Причем если параметры  $\xi_i$  случайные и имеют вид  $\xi_i = \xi + \delta_i$  со случайными отклонениями  $\delta_i$  от среднего  $\xi$ , то  $\xi = n^{-1} \sum_i \xi_i$ ,  $|\xi - \xi_i| = |\delta_i| \ll \xi < 1$ , то [17] в формулах необходимо сделать замену  $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ ,

где  $\bar{\xi} = \left( \exp \left[ \frac{\langle \delta \rangle}{\xi} - \frac{\langle \delta^2 \rangle}{2\xi^2} + \dots \right] \right) \xi$ ,  $\langle \delta^s \rangle = n^{-1} \sum_i \delta_i^s$  ( $s=1, 2, \dots, m$ ) – средние значения множества  $\{\delta_i\}^t$ .

При этом минимальное значение предельного интервала состояния  $\Delta_i = \Delta \times \xi^i$  при оценивании размерности  $\Delta$  множества  $S$  состояний  $\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$  не превышает заданное значение погрешности  $\delta_i$  оценивания параметра  $\xi$ .

### Определение условий для функции плотности вероятности перехода

Чтобы найти закономерность в поведении системы необходимо знать функцию перехода для двух ближайших состояний

$$J(t) = \int_0^t k_\alpha(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Данное выражение можно аналогично (7) преобразовать к виду

$$\Phi(p) = P_N(z) F(p), \quad (10)$$

где  $P_N(z)$  – функция переходов по предшествующим состояниям.

Определим структуру переходной функции  $P(t, x, S)$  ( $t \geq 0, S \in B$ ) на произвольном фазовом пространстве  $(E, B)$ , т.е. вероятность того, что объект с состоянием  $x$ , через время  $t$  попадает в множество  $S$ , и для нее выполнены условия [10]:

а. При фиксированном  $t$  и  $x$  функция  $P(t, x, S)$  является мерой на  $\sigma$ -алгебре  $B$ .

б. При фиксированном  $t$  и  $S$   $P(t, x, S)$  есть  $B$ -измеримая функция точки  $x$ .

в.  $P(t, x, E) \leq 1$ .

г.  $P(0, x, E \setminus x) = 0$ .

д.  $P(s+t, x, S) = \int_E P(s, x, dy) P(t, y, S)$  ( $s, t \geq 0$ )

Переходная функция определяет стандартный процесс, т.е. стационарный процесс  $X$  с мерой на  $\sigma$ -алгебре  $B$  (не обязательно конечная), такая что:

а. если  $\mu(S) = 0$ , то  $E \setminus S$  всюду плотно в  $E$ ;

б. для всех  $t > 0, S \in B$   $P(t, x, S) = \int_\Gamma W(t, x, y) \mu(dy)$ , причем при  $t > 0$  функция  $W(t, x, y)$  непрерывна по

$x$  и ограничена и для любых  $x, y \in E$   $W(t, x, y) = W(t, y, x)$ .

Если  $W(t, x, y)$  – переходная плотность, то формула

$$P(t, x, S) = \begin{cases} \int_S W(t, x, y) dy & \text{при } t > 0 \\ \chi_S(x) & \text{при } t = 0 \end{cases} \quad (x \in E, S \in B)$$

определяет переходную функцию. Причем переходная функция  $P(t, x, E)$  – невозрастающая функция от  $t$  и имеет предел  $P(+0, x, E)$ , который для нормальной переходной функции равен 1 при  $x \in E$ .

Для марковского процесса  $\xi(t, \omega), t \in T$  условная вероятность

$$P(x_{(N)} | x_{(N-1)}, \dots, x_1) \equiv P(x_{(N)} | x_{(N-1)}),$$

т.е. при фиксированном состоянии процесса в настоящий момент времени  $t_{n-1}$  будущее для момента времени  $t_n$  не зависит от прошлого в моменты  $t_{n-2}, \dots, t_1$ .

Непрерывный марковский процесс с дискретным временем представляет последовательность непрерывных случайных величин, для которого существует производная условной функции распределения (переходная плотность вероятности)

$$\frac{\partial P\{\xi(t_n) \leq x_n | \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}\}}{\partial x_n} = W(x_n | x_{n-1}),$$

которая удовлетворяет условиям неотрицательности  $W(x_n | x_{n-1}) \geq 0$  и нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} W(x_n | x_{n-1}) dx_n = 1$ .

При этом цепочка состояний, описывающих эволюцию непрерывного марковского процесса, на множестве состояний в дискретные моменты времени

$$A = \{x_0 \in S_0, \dots, x_m \in S_m\} \quad (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = c, S_1, \dots, S_m \in B)$$

задается через его двумерный закон распределения

$$\begin{aligned} p(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}) &= P(x_{(N)} | x_{(N-1)}, \dots, x_{(1)}) p(x_{(1)}, \dots, x_{(N-1)}) = P(x_{(N)} | x_{(N-1)}) p(x_{(1)}, \dots, x_{(N-1)}) = \dots = \\ &= P(x_{(N)} | x_{(N-1)}) P(x_{(N-1)} | x_{(N-2)}) \dots P(x_{(2)} | x_{(1)}) p(x_{(1)}), \end{aligned}$$

т.е. при начальной плотности  $p(x_1)$  и переходной вероятности  $P(x_i | x_{i-1})$  можно определить многомерную плотность вероятности вектора  $\{x_1 \dots x_n\}$  [8, 10]:

$$p(x_1, \dots, x_n) = p(x_1) \prod_{i=2}^n P(x_i | x_{i-1}).$$

Исследуем свойства переходной вероятности  $P(x_i | x_{i-1})$  при фиксированном  $t$  и  $x$  функции  $P(t, x, S)$

$$\prod_{i=2}^n P(x_i | x_{i-1}),$$

где  $S_k = \{x_k^{(n)} < x < x_k^{(n)} + \Delta_{n+1}\}$ ,  $\Delta_i = \Delta \times \xi^i$  – состояния, задающие эволюцию непрерывного марковского процесса, на множестве его состояний в дискретные моменты времени. Рассмотрим один из сомножителей данного произведения и учтем, что функции  $P(x_i | x_{i-1})$  подобны друг другу, а поскольку  $p(x_1) = P(x_1 | x_0) p(x_0)$ , то

$$P(x_1 | x_0) = \frac{p(x_1)}{p(x_0)}. \quad (11)$$

Функция  $P(x_i | x_{i-1})$  при различных значениях  $i$  соответствует различным уровням рассмотрения исследуемой системы и является масштабно-инвариантной, поскольку функции  $P(x_i | x_{i-1})$  подобны друг другу, т. е. если  $P(x_1 | x_0)$  зависит не от  $x_1$  и  $x_0$  в отдельности, а только от их безразмерной комбинации  $\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$ :

$$P(x_1 | x_0) = P\left(\frac{x_1}{x_0}\right). \quad (12)$$

Используя 11 и 12, получаем

$$\frac{p(x_1)}{p(x_0)} = P\left(\frac{x_1}{x_0}\right). \quad (13)$$

Из (13) при  $x_0=1$  имеем  $\frac{p(x_1)}{p(1)} = P(x_1)$ , а при  $x_1=1$  получаем  $\frac{p(1)}{p(x_0)} = P\left(\frac{1}{x_0}\right)$ , и в результате

$$P(x_1) P(1/x_0) = P\left(\frac{x_1}{x_0}\right). \quad (13')$$

Прологарифмировав (13') и осуществив преобразование  $\ln P(x_1) = U(z_1)$ ,  $z_1 = \ln x_1$ ,  $z_0 = \ln x_0$  получим

$$U(z_1) + U(-z_0) = U(z_1 - z_0). \quad (14)$$

Продифференцировав (14) по  $z_1$  и переходя к пределу  $z_0 \rightarrow z_1$ , получаем

$$U'(z) = U'(0) = \text{const},$$

что возможно, если только функция  $U(z)$  линейна:

$$U(z) = a + bz \text{ или } \ln P(x) = a + b \ln x,$$

откуда для постоянных положительных  $A = e^a = x_0^\alpha$  и  $\alpha = -b$  выражение для переходной вероятности

$$P(x_1 | x_0) = p(x_1) / p(x_0) = \frac{x_0^\alpha}{x_1^\alpha}. \quad (15)$$

Полученный результат подтверждает известное положение, что гиперболическое распределение удовлетворяет условию масштабной инвариантности (12).

Из выражения (15) следует, что

$$\alpha = \frac{\ln P(x_i|x_{i-1})}{\ln x_{i-1} - \ln x_i} = \frac{\ln P(x_i|x_{i-1})}{\ln(z\xi^{i-1}) - \ln(z\xi^i)} = \ln P(\xi)/\ln(1/\xi).$$

Усреднив параметр  $\alpha$  по совместной плотности распределения двух соседних состояний системы и учтя, что  $P(x_i|x_{i-1})=p(x_i)/p(x_{i-1})$  получаем

$$\bar{\alpha} = \bar{v} \{ \text{int}(x_i, x_{i-1}) - H(x_i) \} / \ln 2, \quad (16)$$

где  $H(x_i)$ —дифференциальная энтропия  $i$ -го состояния системы,  $\text{int}(x_i, x_{i-1})$ —интеграция между  $x_i$  и  $x_{i-1}$  состояниями системы [14].

Применив преобразование Лапласа к (15) и учтя из (6), что  $z=pl(1-\xi)$ , из (10) имеем

$$\Phi(p) \cong A_\alpha (1-\xi)^{-\alpha} (pl)^{-\alpha} F(p),$$

что соответствует представлению  $J(t)$  в форме дробного интеграла [3, 15, 17, 20] (Приложение 1)

$$J(t) = A_\alpha [t(1-\xi)]^{-\alpha} [\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{A_\alpha}{(1-\xi)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-u)^{\alpha-1} f(ut) du, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \tau < t.$$

Таким образом, порядок производной  $\bar{\alpha}$  определяется связностью множества состояний, которая задается размерностью топологии множества состояний  $\bar{v}$ , а также энтропией  $H(x_i)$  состояния  $x_i$  системы и значением интеграции  $\text{int}(x_i, x_{i-1})$  между состояниями системы  $x_i$  и  $x_{i-1}$ .

### Анализ полученных результатов

Марковская модель, определяющая переходы системы на мультифрактальных множествах ее состояний вдоль траектории разгона ПП, согласно проведенным в работе исследованиям, определяется фрактальной размерностью (9), учитывающей ее временную и пространственную память, и математическим аппаратом обобщенных дробных производных Римана-Лиувилля (Приложение 1), путем замены в уравнении Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК) целочисленных производных на обобщенные производные дробного порядка задаваемых параметром  $\alpha$  по выражению (16).

Примеры решения задачи формирования уравнения ФПК, описывающих эредитарные системы, приведены в приложении 2. Эти решения сводятся к определению порядка  $\alpha$  дифференциального оператора, который характеризует топологию множества состояний системы, обусловленной параметрами среды. При этом размерность множества состояний, определяемая долей сохранившихся состояний множества состояний, сходится к показателю диферинтегралов  $\nu$  ( $0 < \nu < 1$ ) и охватывает случаи полностью замкнутой ( $\nu=1$ ) и марковской ( $\nu=0$ ) систем, когда все состояния вырождаются в одно (два) с бесконечно большой плотностью.

Переход к производной дробного порядка по времени позволяет учитывать эффекты памяти системы [3], процессы в которой классифицируются как процессы с «остаточной» памятью [3, 17], часть которых сохраняется, а другая часть соответствует необратимым потерям. Так расщепление дифференциального оператора  $\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  на произведение диферинтегралов половинного порядка

$\left(\partial^{1/2}/\partial t^{1/2} - \sqrt{a} \partial/\partial x\right) \left(\partial^{1/2}/\partial t^{1/2} + \sqrt{a} \partial/\partial x\right)$  интерпретируется как два эквивалентных решения [3]. Одно из них соответствует влиянию в прямом направлении ( $x>0$ ), а второе решение соответствует обратному влиянию ( $x<0$ ). Для полубесконечного пространства плотность состояний для прямого процесса становится преобладающей и поэтому половина состояний теряется.

Анализ выражения (9) показывает, параметр  $\xi$ , определяющий топологию множества состояний, задает интервал регистрации контролируемого параметра через неопределенность (погрешность) его измерения и равен интервалу оценивания вероятности перехода в уравнении ФПК, т. е. интервалу управления, что согласуется с принципами цели и двойственности для системы измерения и управления [19].

## ВЫВОДЫ

1. Эредитарная модель системы высокоскоростного разгона на базе магнитоплазменного ЭДУ при фрактальной модели ПП определяется топологией множества ее состояний, часть которых необратимо теряется в процессе ее эволюции и становятся недоступными для системы, и законом пространственно-временной эволюции состояний, который на основе знаний о состоянии в начальный момент времени  $t_0$  в точке пространства  $x_0$  определяет состояние системы в момент времени  $t>t_0$ .

2. Особенности топологии множества состояний системы высокоскоростного разгона на базе магнитоплазменных ЭДУ определяют введение в уравнение ФПК, определяющее функцию плотности распределения вероятности перехода, дробной меры для учета априорной неопределенности в моделях данных систем.

3. Уравнение с производной половинного порядка определяется как решение, соответствующее влиянию в системе в прямом направлении ( $x>0$ ), а система, которая описывается данным уравнением, содержит каналы, входящие в состав ветвящейся структуры, порождаемой внешней средой.

4. Порядок дробной производной  $\bar{\alpha}$  в уравнении ФПК определяется связностью множества состояний, которая задается его размерностью  $\bar{\nu}$ , характеризующейся топологией множества состояний (долей сохранившихся каналов), а также энтропией  $H(x_i)$  состояния  $x_i$  системы и интеграцией  $\text{int}(x_i, x_{i-1})$  между  $x_i$  и  $x_{i-1}$  состояниями системы.

5. Необходимость учета связности множества состояний при определении порядка производной  $\alpha$  модели эредитарной системы, определяет выбор итерационного подхода при имитационном моделировании системы.

Приложение 1

### Общий анализ дробных операторов

О. Гельдер [15] показал, что если функция  $f(x)$  не дифференцируема, то может существовать предел  $f^{(\alpha)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f / \Delta x^\alpha$ , который является производной с дробной размерностью  $\alpha$  (показатель

Гёльдера  $\alpha$ ). При этом функция  $f(x)$  должна удовлетворять условию Гёльдера с показателем  $\alpha$  на отрезке  $[a, b]$ , для которой существуют действительное число  $A > 0$  такое, что

$$|f(x_1)f(x_2)| \leq A |x_1x_2|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x_1x_2 \in [a, b].$$

Обобщение формулы Коши на нецелые порядки интегро-дифференциальных операторов определяет дифференциалы дробного порядка [3, 15, 17, 20]:

$$I_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \quad \text{и} \quad D_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau,$$

где  $\beta, a \in \mathbf{R}$ ,  $n-1 < \beta < n$ ,  $I_{a,t}^\beta$  – интегральный оператор порядка  $\beta$ ,  $D_{a,t}^\beta$  – дифференциальный оператор порядка  $\beta$ .

Дробный дифференциал удовлетворяет правилу композиции [20]

$$D_{0x}^\alpha D_{0x}^\beta y(x) = D_{0x}^{\alpha+\beta} y(x), \quad (\text{П1.1})$$

где  $D_{0x}^\alpha$ ,  $D_{0x}^\beta$  и  $D_{0x}^{\alpha+\beta}$  – операторы дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\alpha+\beta$ , действующие на интервале от 0 до  $x$ . С помощью (П1.1) целочисленная производная представляется в виде двух дробных производных

$$\frac{dy(x)}{dx} = D_{0x}^\alpha D_{0x}^{1-\alpha} y(x).$$

## Приложение 2

### Учет дробного порядка в обобщенном уравнении Фокера–Планка – Колмогорова

Обобщенное уравнение ФПК дробного порядка получается на основе уравнения ЧКС для условной плотности вероятности  $W(y_1 t_1 | y_2 t_2)$  имеет вид [6]

$$W(y_1 | y_2; t + \Delta t) = \int dy_3 W(y_1 | y_3; t) W(y_3 | y_2; \Delta t). \quad (\text{П2.1})$$

Для вывода обобщенного уравнения ФПК исходим из выражения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y) \frac{\partial^\alpha W(y | y_1, t)}{\partial t^\alpha} dy, \quad (\text{П2.2})$$

где  $0 < \alpha \leq 1$ , производная дробного порядка определена соотношением [20]

$$\frac{\partial^\alpha W(y | y_1, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{W(y | y_1, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (\text{П2.3})$$

где  $\Gamma(z)$  – гамма-функция Эйлера.

Учтя соотношения (П2.2), (П2.3) уравнение ЧКС (П2.1) приводится к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y) \frac{\partial^\alpha W(y | y_1, t)}{\partial t^\alpha} dy = \int dy_2 dy_3 dt_2 Q(y) W(y_2 | y_1, t_2) W^{(\alpha)}(y_2 | y_3; t - t_2), \quad (\text{П2.4})$$

где введена функция  $W^{(\alpha)}(y_2 | y_3; t - t_2) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{W(y | y_1; z - t_2)}{(t-z)^\alpha} dz$ .

Воспользуемся разложением функции  $Q(y)$  в обобщенный ряд Тейлора [9]

$$Q(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y - y_2)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)} \frac{\partial^{\beta+n}}{\partial y^{\beta+n}} Q(y) \Big|_{y=y_2},$$

где  $0 < \beta \leq 1$ . В результате уравнение (П2.2) можно привести к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y) \frac{\partial^\alpha W(y | y_1; t)}{\partial t^\alpha} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int dy_2 dt_2 \frac{Q^{(n+\beta)}(y_2)}{\Gamma(n+\beta+1)} A_{n+\beta}^\alpha(y_2; t - t_2) W(y_2 | y_1; t_2),$$

где  $A_{n+\beta}^\alpha(y_2; t-t_2) = \int dy(y-y_2)^{n+\beta} W^{(\alpha)}(y_2|y; t-t_2)$  (П2.5) – обобщенные моменты. При  $\alpha=1$  и  $\beta=1$  (П2.5) переходит в обычное выражение для момента. Проинтегрировав (П2.5) по частям, получим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$\frac{\partial^2 W(y|y_1, t)}{\partial t^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\beta+1)} \frac{\partial^{n+\beta}}{\partial y^{n+\beta}} \int dt_2 [A_{n+\beta}^\alpha(y; t-t_2) W(y|y_1; t_2)]. \quad (\text{П2.6})$$

Уравнение (П2.6) представляет собой обобщенное уравнение ФПК дробного порядка и определяет класс стохастических процессов с обобщенными моментами

$$A_{n+\beta}^\alpha(y_2; t-t_2) = A_{n+\beta}^\alpha \delta(t-t_2).$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial^\alpha W(y|y_1; t)}{\partial t^\alpha} = -\frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} (A_\beta^\alpha W(y|y_1; t)) + \frac{1}{\Gamma(2+\beta)} \frac{\partial^{1+\beta}}{\partial y^{1+\beta}} (A_{1+\beta}^\alpha W(y|y_1; t)), \quad (\text{П2.7})$$

которое при  $\alpha=1$  и  $\beta=1$  переходит в уравнение ФПК [6].

I. Решение задачи Коши, состоящей из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^\alpha f(x, t)}{\partial t^\alpha} - D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

при  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $t > 0$ ,  $|x| < \infty$  и с начальным условием к уравнению (П2.1) в виде

$$\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} f(x, 0) = A(x),$$

после прямого и обратного преобразования Фурье по переменной  $x$  известно [20]

$$f(x, t) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(ik(x-x')) A(x') E_{\alpha, \alpha}(-Dk^2 t^\alpha), \quad (\text{П2.8})$$

где  $E_{\alpha, \beta}(-z^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$  – функция Миттаг-Леффлера [20].

Для  $A(x) = \delta(x)$  для  $\alpha=1$  и  $E_{1,1}(-z) = \exp(-z)$  решение (П2.8) имеет известный вид

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (\text{П2.9})$$

В случае, например  $\alpha=1/2$ ,  $1/4$  функция  $E_{\alpha, \alpha}(-z^\alpha)$  принимает вид

$$E_{1/2, 1/2}(-\sqrt{z}) = \pi^{-1/2} - \sqrt{z} \exp(z) [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{z})],$$

$$E_{1/4, 1/4}(-z^{1/4}) = \frac{1}{\Gamma(1/4)} {}_1F_1(1; 1/4; z) + \frac{\sqrt{z}}{\Gamma(3/4)} {}_1F_1(1; 3/4; z) - z^{3/4} \exp(z) [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{z})] - \frac{z^{1/4}}{\sqrt{\pi}}.$$

II. Для решения уравнения (6) при начальном условии  $f(x, t=0) = f(x, 0)$  преобразуем его к виду [13]

$$\frac{\partial^\alpha f(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{f(x, 0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} - D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{П2.10})$$

Второе слагаемое в (П2.10) результат действия дробной производной на начальное условие. После преобразования Фурье по  $x$  и Лапласа по  $t$  имеем

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-ikx) f(k, 0) E_{\alpha, 1}(-Dk^2 t^\alpha)$$

Для  $f(x, t=0) = \delta(x)$  имеем

$$f(x, t) = \int_0^{\infty} dk \cos(kx) E_{\alpha,1}(-Dk^2 t^\alpha) \quad (П2.11)$$

При  $\alpha=1$  решения (П2.7) и (П2.9) совпадают, а для  $\alpha=1/2, 1/4$  функции Миттаг-Леффлера имеют вид:

$$E_{1/2,1}(-z^{1/2}) = \exp(z)[1 - \operatorname{erf}(\sqrt{z})], \quad E_{1/4,1}(-z^{1/4}) = \exp(z) \left[ 1 + \operatorname{erf}(\sqrt{z}) - \frac{\gamma(1/4, z)}{\Gamma(1/4)} - \frac{\gamma(3/4, z)}{\Gamma(3/4)} \right],$$

где  $\gamma(a; z)$  – неполная Гамма-функция.

### III. Решение задачи

$$\partial^\alpha f(x, t) / \partial t^\alpha - D \partial^\alpha f(x, t) / \partial x^\alpha = 0$$

для ограниченной области  $0 < x \leq l$ , с краевыми условиями  $f(x, 0) = \varphi(x)$ ,

$$-\partial f(x, t) / \partial x + h_0 f(x, t) = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и} \quad \partial f(x, t) / \partial x + h_1 f(x, t) = 0 \quad \text{при } x = l,$$

полученная методом разделения переменных [7] имеет вид

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left( \cos(\lambda_n x) + \frac{h_0}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x) \right) E_{\alpha,1}(-\lambda_n D t^\alpha), \quad (П2.12)$$

где  $C_n = \frac{2\lambda_n^2}{l(\lambda_n^2 + h_0^2) + h_0 + h_1} \frac{\lambda_n^2 + h_0^2}{\lambda_n^2 + h_1^2} \int_0^l \varphi(x) \left[ \cos(\lambda_n x) + \frac{h_0}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x) \right] dx$ , а  $\lambda_n$  корни уравнения

$$\operatorname{tg}(\lambda l) = \frac{\lambda(h_0 + h_n)}{\lambda^2 - h_0 h_1}.$$

Решение (П2.12) при  $\alpha=1$  совпадает с известным решением, а для  $\alpha=1/2$ , имеет вид

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left( \cos(\lambda_n x) + \frac{h_0}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x) \right) \exp(-\lambda_n^4 A^2 t^2 [1 - \operatorname{erf}(\lambda_n^2 A t)]).$$

Решение уравнения (П2.11) при  $t \rightarrow \infty$  имеет степенной характер [16]

$$\exp(z)[1 - \operatorname{erf}(\sqrt{z})] = \exp(z) \operatorname{erfc}(\sqrt{z}) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot z}} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{(2z)^m} \right]$$

и отличается от экспоненциального асимптотического решения (П2.9).

### Литература

1. АЗАНОВ И. Б., АЛЕКСАНДРОВ В. А., ОБЫДЕННИКОВ С. С., ТЮТИН В. К., ХРУСТАЛЕВ М. М., ЮДАС В. И. *Управление скоростью разгона макрочастиц в рельсовых ускорителях*//IEEE Transactions on Magnetics, vol. 33, № 1, January 1997.
2. АНОСОВ Д. В. *Динамическая система*//Математическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия. 1979.
3. БАБЕНКО Ю. И. *Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков.* – Л.: Химия.–1986.

4. ВОЛКОВ И. К., ЗУЕВ С. М., ЦВЕТКОВА Г. М. *Случайные процессы. Учеб. для вузов*/Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко.–М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана.–1999.
5. ВОЛЬТЕРРА В. *Теория функционалов и интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука.–1982.
6. ГАРДНЕР К. В. *Стохастические методы в естественных науках.* – М.: Мир.–1986.–528 с.
7. ГЕККИЕВА С. Х. *Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени*//Доклады Адыгской АН.–1994.–Т.1, № 1.–С. 17–18.
8. ГОРОДЕЦКИЙ А. Я. *Информационные системы. Вероятностные модели и статистические решения. Учеб. пособие.* СПб: Изд-во СПбГПУ, 2003.
9. ГРАДШТЕЙН И. С., РЫЖИК И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений.* Физико-математической литературы. – М.: 1963.–1108 с.
10. ДЫНКИН Е. Б. *Марковские процессы.* – М.: Физматгиз.–1963.
11. КИРИЕВСКИЙ Е. В. *Методы и средства измерительного преобразования скорости движения плазмы для информационно-измерительных и управляющих систем электродинамических ускорителей*//Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – Новочеркасск – 2009.
12. КОБЕЛЕВ Я. Л. *Феноменологические модели описания больших систем с фрактальными структурами*//Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Екатеринбург – 2001.
13. КОЧУБЕЙ А. Н. *Диффузия дробного порядка*//Дифференциальные уравнения.–1990.–Т.26, № 4.–С. 660–670.
14. МИХАЙЛОВ А. А., МИХАЙЛОВА С. А. *Оценка структурной интеграции информационно – измерительных систем*//Известия высших учебных заведений. Северо–Кавказский регион. Технические науки.–2007.–№6.–С. 22–26.
15. НАХУШЕВ А.М. *Элементы дробного исчисления и их применение*// Нальчик. Изд-во КБНЦ РАН.–2000.
16. НАХУШЕВ А. М. *Уравнения математической биологии*//М.: Высш. шк. –1995.–301 с.
17. НИГМАТУЛИН Р. И. *Дробный интеграл и его физическая интерпретация* //ТМФ.–1992.–Т.90, №3.–С. 354–368
18. НИКИТИН А.П., ЧЕРНАВСКАЯ О.Д., ЧЕРНАВСКИЙ Д.С. *Распределение Парето в динамических системах, находящихся в шумовом поле*//Труды института общей физики РАН им. А.М. Прохорова. Том 65, 2009. –С. 107 – 123.
19. ПЕРЕГУДОВ Ф.И., ТАРАСЕНКО Ф.П. *Введение в системный анализ. Учебное пособие для ВУЗов.* – М.: Высшая школа, 1989. – 367 с.
20. САМКО С. Г., КИЛБАС Ф. Ф., МАРИЧЕВ О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения.* Минск: Наука и техника.–1987.–688 с.
21. ЧЕРНАВСКИЙ Д.С., НИКИТИН А.П., ЧЕРНАВСКАЯ О.Д. *О механизмах возникновения распределения Парето в сложных системах*/Препринт ФИАН № 7, 2007.–17 с.