УДК 519.865 + 519.95
ББК 22.165

ИГРЫ С ОБМЕНОМ НЕДОСТОВЕРНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Горелов М. А. [1]
(Вычислительный центр РАН, Москва)

Обсуждается возможность формализации некоторых вопросов, связанных с семантикой информации, которой обмениваются игроки в процессе принятия решений.

Ключевые слова: Иерархические игры, информационные расширения, семантика.

Введение

Поводом к написанию данной работы послужила дискуссия с рецензентом статьи [8], оставшимся мне неизвестным. Анализ возникших вопросов показал, что недопонимание возникает из-за того, что по привычке используются некоторые понятия, не имеющие четкого определения.

Такая ситуация в общем-то нормальна. Начиная исследовать новый круг объектов, вполне естественно строить наиболее простые модели. А по мере усложнения рассматриваемых вопросов возникает необходимость в детализации, и, следовательно, усложнении этих моделей. Нечто подобное происходит и в данном случае.

Ниже обсуждаются, в основном, вопросы, связанные с истинностью информации, которой обмениваются игроки. Понятно, что вопрос об истинности информации нельзя рассматривать в отрыве от ее смысла.

[1] *Михаил Александрович Горелов, кандидат физико-математических наук, (griefer@ccas.ru).*

Приведенные примеры показывают, что при попытках формализации этих понятий появляются довольно неожиданные трудности, а явно или неявно использовавшиеся ранее способы не вполне удовлетворительны.

1. Информационные расширения

Будем рассматривать следующую модель конфликта.

Игрой двух лиц с неопределенным фактором (или просто игрой) будем называть набор $\Gamma=\langle U,V,A,g,h\rangle$, где U, V, A – множества, g – функция, определенная на декартовом произведении $U\times V$ и принимающая действительные значения, а h – функция из множества $U\times V\times A$ в множество действительных чисел.

Множества U и V интерпретируется как множества управлений (стратегий) первого и второго игроков соответственно. Множество A имеет смысл множества возможных значений неопределенного фактора. Интересы первого игрока описываются стремлением к максимизации значения функции g, а второй игрок стремится максимизировать функцию h.

В дальнейшем конфликт будет рассматриваться с позиций первого игрока (оперирующей стороны в терминологии [4]). Соответственно игра Γ – это субъективное описание с точки зрения этого игрока. Множество A и зависимость функции h от неопределенного фактора $\alpha\in A$ моделируют неточные представления первого игрока о целях партнера.

Возможна несколько иная интерпретация тех же конструкций. Можно считать, что $\alpha\in A$ – это некий «природный» неопределенный фактор, значение которого становится известным второму игроку до выбора им своего управление. А первый игрок, выбирая свое управление, не знает этого неопределенного фактора, имея лишь информацию о том, что это значение принадлежит множеству A.

Описанная модель принадлежит к так называемому классу игр в нормальной форме. Последнее означает, что игроки выбирают свои управления независимо, не имея информации о выборе партнера.

Конфликты, предполагающие обмены информацией в процессе выработки решений тоже могут быть смоделированы в рамках игр в нормальной форме. Для этого удобно понятие квазиинформационного расширения, предложенное Н. С. Кукушкиным [9]. На случай игр с неопределенными факторами это определение обобщается следующим образом.

Определение 1. Игра $\Gamma_*=\langle U_*,V_*,A,g_*,h_*\rangle$ является квазиинформационным расширением игры $\Gamma=\langle U,V,A,g,h\rangle$, если задан набор $\langle \pi,c,d\rangle$ функций $\pi: U_*\times V_*\times A\to U\times V$, $c: U\to U_*$, $d: V\to V_*$, удовлетворяющий следующим двум аксиомам:

а) для любых $u_*\in U_*$, $v_*\in V_*$, $\alpha\in A$ выполняются равенства $g_*(u_*,v_*)=g(\pi(u_*,v_*,\alpha))$ и $h_*(u_*,v_*,\alpha)=h(\pi(u_*,v_*,\alpha),\alpha)$;

б) для любых $u\in U$, $v_*\in V_*$, $\alpha\in A$ найдется такое $w\in V$, что $\pi(c(u),v_*,\alpha)=(u,w)$ и аналогично для любых $v\in V$, $u_*\in U_*$, $\alpha\in A$ найдется такое $\omega\in V$, что $\pi(u_*,d(v),\alpha)=(\omega,v)$.

Содержательно стратегии $u_*\in U_*$ и $v_*\in V_*$ могут интерпретироваться как некоторые способы выработки решений на основе обмена информацией. Отображение π показывает, какие «физические» управления $u\in U$ и $v\in V$ будут выбраны, если каждый из игроков зафиксирует определенный способ выбора управлений. Первая аксиома обозначает, что выигрыши игроков зависят лишь от этих «физических» управлений и не зависят от способов, которыми они были выбраны. Вторая аксиома говорит о том, что первый игрок может фиксировать *любое* управление $u\in U$ и решить выбирать его независимо от того, какую информацию он получит (правилами игры Γ_* это не запрещено), и аналогично для второго игрока.

Замечание. Когда речь идет об отдельной игре, термины «управление» и «стратегия» употребляются в данной работе как синонимы. Когда приходится говорить о паре игр: игре и ее квазиинформационном расширении, удобно термин «управление» относить к исходной игре, а термин «стратегия» – к расширению.

Определение 2. Квазиинформационное расширение, в котором стратегии каждого игрока проинтерпретированы, как способы реагировать на определенную информацию о поведении партнеров, называется информационным расширением.

Это определение не является формальным, но им иногда бывает удобно пользоваться.

Приведем несколько простейших примеров информационных расширений.

Пример 0. Всякая игра Г является своим информационным расширением. В данном случае можно считать, что отображение $\pi: U\times V\times A\to U\times V$ на самом деле не зависит от $\alpha\in A$ и тождественно на $U\times V$, а $c{:}U\to U$ и $d{:}V\to V$ – просто тождественные отображения.

Пример 1. Допустим, первый игрок в момент выбора своего управления будет иметь информацию о выборе партнера. Это предполагает, что второй игрок выберет свое управление раньше первого. Но если моделировать такую ситуацию с помощью игры в нормальной форме, то следует считать, что стратегии выбираются игроками одновременно. Выход из этой коллизии дает следующий трюк. Первый игрок одновременно с партнером и независимо от него выбирает свою стратегию как функцию информации, которую он получит в дальнейшем. А по получении информации он просто вычисляет значение выбранной функции и находит свое управление.

Формально это выглядит так. Здесь и далее будем обозначать формулой $\Phi(X,Y)$ множество всех функций из X в Y. Пусть $\Gamma_V=\langle U_V,V_V,A,g_V,h_V\rangle$, где $U_V=\Phi(V,U)$, $V_V=V$, $g_V(u_V,v_V)=g(u_V(v_V),v_V)$, $h_V(u_V,v_V,\alpha)=h(u_V(v_V),v_V,\alpha)$. Данная игра является квазиинформационным расширением, моделирующим ситуацию, описанную в предыдущем абзаце. Отображение π в данном случае задается условием $\pi(u_V,v_V)=(u_V(v_V),v_V)$. В качестве c в данном примере можно взять отображение, которое элементу $u\in U$ ставит в соответствие функцию $c(u)$ из множества $\Phi(V,U)$, тождественно равную u. А d можно считать тожественным отображением. Аксиомы из определения 1 в данном примере проверяются непостердственно.

Пример 2. Допустим, первый игрок к моменту выбору своего управления получит информацию о действительном значении неопределенного фактора $\alpha\in A$. Эту ситуацию можно моделировать игрой $\Gamma_A=\langle U_A,V_A,A,g_A,h_A\rangle$ в которой $U_A=\Phi(A,U)$, $V_A=V$, $g_A(u_A,v_A)=g(u_A(\alpha),v_A)$, $h_A(u_A,v_A,\alpha)=h(u_A(\alpha),v_A,\alpha)$. Эта игра является квазиинформационным расширением игры Г. Соответствующие отображения строятся аналогично примеру 1.

Пример 3. Если первый игрок к моменту выбора будет иметь полную информацию и о выборе противника и о неопределенном факторе, то конфликт моделируется информационным расширением $\Gamma_{VA}=\langle U_{VA},V_{VA},A,g_{VA},h_{VA}\rangle$, где $U_{VA}=\Phi(V\times A,U)$, $V_{VA}=V$, а функции выигрыша определяются условиями $g_{VA}(u_{VA},v_{VA})=g(u_{VA}(v_{VA},\alpha),v_{VA})$, $h_{VA}(u_{VA},v_{VA},\alpha)=h(u_{VA}(v_{VA},\alpha),v_{VA},\alpha)$.

Интересно отметить, что игра Γ_{VA} является информационным расширением игры Γ_V. А именно, она получается из игы Γ_V тем способом, который описан в примере 2, то есть $\Gamma_{VA}=(\Gamma_V)_A$. Это следует из существования естественного изоморфизма между множествами $\Phi(A,\Phi(V,U))$ и $\Phi(A\times V,U)$. Содержательно этот факт означает, что все равно, получит ли первый игрок сначала информацию о выборе противника, а потом информацию о неопределенном факторе, или же он получит всю эту информацию сразу.

Аналогично, игра Γ_{VA} является квазиинформационным расширением игры Γ_A.

До сих пор рассматривались примеры, в которых первый игрок получал достоверную информацию, то есть либо он сам добывал ее, либо получал ее от партнера, но существовал некий механизм, заставляющий второго игрока передавать истинную информацию. Такого рода модели активно изучались в теории иерархических игр [5–7,9].

Можно рассматривать конфликты, в которых второй игрок может передавать не обязательно правдивую информацию. Для их моделирования можно предложить следующую общую конструкцию.

Пусть отображения $\langle \pi, c, d \rangle$ задают квазиинформационное расширение $\Gamma_*=\langle U_*,V_*,A,g_*,h_*\rangle$ игры $\Gamma=\langle U,V,A,g,h\rangle$. Построим новое квазиинформационное расширение $\Gamma_{*?}=\langle U_{*?},V_{*?},A,g_{*?},h_{*?}\rangle$ той же игры следующим образом.

Поскольку $\pi: U_*\times V_*\times A\to U\times V$, существуют и единственны такие отображения $\pi_1: U_*\times V_*\times A\to U$ и $\pi_2: U_*\times V_*\times A\to V$, что $\pi(u_*,v_*,\alpha)=(\pi_1(u_*,v_*,\alpha),\pi_2(u_*,v_*,\alpha))$ для всех u_*, v_* и α. Положим $U_{*?}=U_*$, $V_{*?}=V_*\times V_*$. Отображения $\pi_?$, $c_?$, $d_?$ определим условиями $\pi_?(u_{*?},(v_{*?},w_{*?}),\alpha)=(\pi_1(u_{*?},w_{*?},\alpha),\pi_2(u_{*?},v_{*?},\alpha))$ для всех $u_{*?},v_{*?},w_{*?}$ и $c_?(u)=c(u)$, $d_?(v)=(d(v),d(v))$ для любых u и v. Функции $g_{*?},h_{*?}$ определим так, чтобы выполнялась аксиома а) из определения 1.

Интерпретируется эта конструкция следующим образом. В игре $\Gamma_{*?}$ происходит обмен той же по смыслу информацией, что и в игре Γ_*. Но в игре Γ_* передаваемая информация заведомо достоверна, а в игре $\Gamma_{*?}$ второй игрок может передавать и ложные сведения. Проще всего это понять на примерах.

Пример 0?. Как отмечалось выше, всякая игра является квазиинформационным расширением самой себя. Поэтому предложенную конструкцию можно применить и в этом случае. Получим игру $\Gamma_?$ в которой первый игрок выбирает управление $u\in U$, второй – пару управлений $v\in V$ и $w\in V$, а выигрыши игроков вычисляются по формулам $g_?(u,(v,w),\alpha)=g(u,v,\alpha)$ и $h_?(u,(v,w),\alpha)=h(u,v,\alpha)$. Видно, что выигрыши не зависят от w, поэтому полученная игра практически не отличается от исходной игры Γ, что вполне можно было ожидать, исходя из содержательного смысла.

Пример 1?. Рассмотрим расширение Γ_V из примера 1. В этом случае второй игрок выбирает, во-первых, свое физическое управление $v\in V$, а во-вторых, сообщение $w\in V$ об этом выборе, которое он передаст партнеру. Первый игрок выбирает свое управление $u_{V?}(w)$ в зависимости от полученного сообщения, а выигрыши игроков в игре $\Gamma_{V?}$ определяются условиями $g_{V?}(u_{V?},(v,w))=g(u_{V?}(w),v)$ и $h_{V?}(u_{V?},(v,w),\alpha)=h(u_{V?}(w),v,\alpha)$.

Пример 2?. Аналог $\Gamma_{A?}$ игры Γ_A выглядит следующим образом. Второй игрок выбирает свое «физическое» управление v и сообщение $\beta\in A$ об известном ему неопределенном параметре α. А первый игрок выбирает свое управление в зависимости от полученного сообщения β. Детали такие же, как в предыдущем примере.

Пример 3?. Конструкции для игры Γ_{VA} из примера 3 строятся аналогично. Но здесь имеется одна особенность. Как отмечалось выше, игра Γ_{VA} изоморфна играм $(\Gamma_V)_A$ и $(\Gamma_A)_V$. Поэтому наряду с игрой $\Gamma_{VA?}$, в которой первый игрок получает непроверенную информацию и об управлении противника и о неопределенном факторе, можно рассмотреть игру $(\Gamma_V)_{A?}$, в которой игрок 1 получает истинную информацию о v и недостоверную об α, и игру $(\Gamma_A)_{V?}$, в которой информация об α правдива, а о v – нет. Разумеется, можно рассмотреть и игры $(\Gamma_{V?})_A$ и $(\Gamma_{A?})_V$, но они, как нетрудно видеть, изоморфны играм $(\Gamma_A)_{V?}$ и $(\Gamma_V)_{A?}$ соответственно.

2. Обобщенный принцип максимального гарантированного результата

Данный слегка устаревший термин используется для того, чтобы подчеркнуть следующее. В ранних работах по теории игр максимальным гарантированным результатом первого игрока называлась величина

$$\max_{u\in U}\min_{v\in V} g(u,v).$$

Ю. Б. Гермейер предложил несколько иной принцип оптимальности для игр с фиксированным порядком ходов (см. [4]). О нем и пойдет речь ниже.

В [5] предложен и обоснован ряд методологических принципов исследования операций, из которых нас будут интересовать два.

1. Принимая решение в условиях неопределенности, игрок должен быть осторожен, то есть ориентироваться на наихудшие значения неопределенных факторов.

2. При этом он должен учитывать всю имеющуюся у него информацию.

Этих двух принципов достаточно, чтобы получить принцип рационального поведения первого игрока в рассматриваемой нами игре, если он обладает правом первого хода.

В таком случае неопределенность для первого игрока сводится к неизвестному выбору партнера. Но по условию задачи ему известно множество управлений V. Кроме того, ему известно, что он имеет дело с рациональным партнером, и имеется информация о его интересах, «закодированная» множеством неопределенных факторов A и функцией h.

Зная это, он может рассуждать следующим образом: «Получив информацию о выбранной мною стратегии, противник встанет перед задачей выбора своего управления, которая, по существу, является задачей оптимизации. Поскольку он рационален, то он выберет управление, при котором оптимизируемая функция имеет достаточно большое значение. На это мне и следует рассчитывать». Формализуя эти рассуждения, придем к следующему определению.

Определение 3. Число γ называется гарантированным результатом в игре $\Gamma=\langle U,V,A,g,h\rangle$, если существует стратегия $u\in U$ и для любого $\alpha\in A$ существует такое число λ, что выполняются условия

а) существует $v\in V$ для которого $h(u,v,\alpha)\geq\lambda$ (такие стратегии v называют рациональными откликами второго игрока на стратегию u при данном α);

б) Для любого $v\in V$ либо $g(u,v)\geq\gamma$, либо $h(u,v,\alpha)<\lambda$.

Верхняя грань $R(\Gamma)$ всех гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом в игре Γ.

Условие а) означает, что при любом выборе первого игрока у его партнера найдется рациональный ответ. Условие б) соответствует тому, что результат γ можно получить гарантированно, если выбор противника, либо приносит первому игроку выигрыш γ, либо не рационален.

Число λ в данном определении, разумеется, зависит от α, что в дальнейшем иногда будет подчеркиваться в обозначениях.

Традиционно эти же методологические принципы формализуются несколько иначе. Продемонстрируем, что предложенный способ формализации эквивалентен традиционному. Поскольку при традиционном подходе принцип оптимальности для игры Г и каждого ее информационного расширения определяется заново, сформулировать общую теорему затруднительно. Мы ограничимся рассмотрением одного случая, на котором видны все идеи.

Ограничимся случаем, когда множество A состоит из одной точки, то есть функция h от α, по сути, не зависит. Рассмотрим информационное расширение Γ_V (по традиции такую игру называют игрой Γ_2).

Чтобы определить максимальный гарантированный результат, сначала определяют множество рациональных ответов $B(u_V)$ второго игрока на стратегию u_V игрока 1. Если максимум

(1) $\max\limits_{v\in V} h(u_V(v),v)$

достигается, то полагают

$$B(u_V)=\left\{v\in V: h(u_V(v),v)=\max_{w\in V} h(u_V(w),w)\right\}.$$

В противном случае это множество определяют по-разному [3,6], но наиболее распространенный способ такой. Если стратегия u_V такова, что максимум (1) не достигается, то задают положительное число $\delta(u_V)$ и полагают

$$B(u_V)=\left\{v\in V: h(u_V(v),v)\geq \sup_{w\in V} h(u_V(w),w)-\delta(u_V)\right\}.$$

Максимальным гарантированным результатом называют число

$$R'(\Gamma)=\sup_{u_V\in U_V}\inf_{v\in V} g(u_V(v),v).$$

Лемма 1. Если множества U и V наделены топологией и компактны, а функции g и h непрерывны, то $R'(\Gamma)=R(\Gamma)$.

Доказательство. Легко доказывается неравенство $R'(\Gamma)\leq R(\Gamma)$. В самом деле, фиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и выберем стратегию u_V так, что $\inf\limits_{v\in V} g(u_V(v),v)>R'(\Gamma)-\varepsilon$. Непосредственно проверяется, что для $\gamma=R'(\Gamma)-\varepsilon$, стратегии u_V и

$\lambda = \sup\limits_{v\in V} h(u_V(v), v) - \delta(u_V)$ (здесь полагаем, что если максимум (1) достигается, то $\delta(u_V)=0$) выполняются условия а) и б) из определения 3, то есть число $R'(\Gamma)-\varepsilon$ является гарантированным результатом. В силу произвольности ε отсюда получаем нужное неравенство.

Докажем, что $R'(\Gamma)\geq R(\Gamma)$. Пусть γ, u_V и λ выбраны так, что выполняются условия а) и б) из определения 3.

Пусть стратегия u_V такова, что максимум (1) не достигается. Определим стратегию $\omega_V\in U_V$ следующим образом. Выберем последовательность v^1, v^2,… элементов множества V так, что

$$\lim_{k\to\infty} h(u_V(v^k), v^k) = \sup_{v\in V} h(u_V(v), v).$$

В силу сделанных предположений о компактности такую последовательность можно выбрать так, что она сама сходится к некоторому $v^0\in V$, а последовательность $u_V(v^2)$, $u_V(v^2)$,… сходится к $u^0\in U$. Положим

$$\omega(v) = \begin{cases} u^0, \text{ если } v = v^0, \\ u(v), \text{ если } v \neq v^0. \end{cases}$$

В силу непрерывности функций выигрыша, для тройки γ, ω_V и λ условия а) и б) выполняются и при этом максимум $\max\limits_{v\in V} h(\omega_V(v), v)$ достигается.

Поэтому с самого начала можно ограничиться рассмотрением только таких стратегий u_V, для которых максимум (1) достигается. Заметим, что если условие б) выполняется для какого-то λ, то оно будет выполняться и для больших чисел. Поэтому можно, не ограничивая общности, считать, что $\lambda = \max\limits_{v\in V} h(u_V(v), v)$.

Но тогда для любого $v\in B(u_V)$ неравенство $h(u_V(v),v)<\lambda$ не выполняется, а значит выполняется неравенство $g(u_V(v),v)\geq\gamma$. Но тогда должно быть $\gamma\leq R'(\Gamma)$. В силу произвольности γ получаем нужное неравенство.

Лемма доказана.

Весьма важен следующий простой результат.

Лемма 2. Если Γ_* – квазиинформационное расширение игры Γ, то $R(\Gamma_*) \geq R(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть γ – гарантированный результат, и для тройки γ, u, $\lambda(\alpha)$ выполняются условия а) и б) определения 3. Рассмотрим тройку γ, $c(u)$, $\lambda(\alpha)$. Если пусть $v \in V$ таково, что выполняется условие а). Тогда $h_*(c(u),d(v),\alpha)=h(u,v,\alpha) \geq \lambda(\alpha)$. Пусть теперь $v_* \in V_*$ – произвольная стратегия второго игрока в игре Γ_*, и $\pi(c(u),v_*,\alpha)=(u,v)$. Тогда в силу свойства б) либо $g_*(c(u),v_*)=g(u,v) \geq \gamma$, либо $h_*(c(u),v_*,\alpha)=h(u,v,\alpha)<\lambda(\alpha)$.

Таким образом, тройка γ, $c(u)$, $\lambda(\alpha)$ удовлетворяет условиям а) и б) определения 3, отнесенного уже к игре Γ_*. Это доказывает, что γ – гарантированный результат в игре Γ_*. Отсюда следует утверждение леммы.

3. Достоверность передаваемой информации

Если информационное расширение таково, что достоверность передаваемой информации не гарантируется правилами игры, то естественно ставить вопрос об истинности передаваемых сообщений при рациональных действиях игроков. Видимо, впервые такого рода вопрос был поставлен В.Н. Бурковым [1] и позднее активно исследовался в теории активных систем [2,11].

Данный вопрос не выражается в рамках формальных моделей, рассмотренных выше. Поэтому эти модели требуют некоторого уточнения. Сделаем их для частного случая информационного расширения из примера 2?.

В этом примере второй игрок может передавать партнеру сообщение о значении неопределенного фактора. То есть, по сути, в модели должно быть задано некоторое множество S возможных сообщений, из которых второй игрок и выбирает сообщение, передаваемое игроку 1. Обычно такие сообщения – это тексты на некотором естественном или искусственном языке. Не будем детализировать описание этого языка. Заметим только, что сообщения будут иметь семантику. И смысл некоторых сообщений будет соответствовать истинному значению неопределенного фактора, а смысл других – нет.

То есть семантика выбранного языка задает точечно-множественное отображение $T{:}A\to S$, смысл которого таков. Если действительное значение неопределенного фактора равно α, то сообщения из множества $T(\alpha)$ истинны, а все прочие – ложны. Вполне допустимо, что каждому значению α может соответствовать несколько истинных сообщений. Поэтому используются точечно-множественные отображения.

До сих пор в основном рассматривались модели, в которых $S{=}A$ а отображение T определялось условием $T(\alpha)=\{\alpha\}$. Это, разумеется, идеализация, так как, если, например, неопределенные факторы – это состояния погоды, влияющие на выигрыш игрока, то передать «погоду» нельзя. Можно передать лишь сообщение о погоде, а это объект совсем другой природы. Но поскольку это не приводило к неверным выводам, такая идеализация вполне оправдана.

Описанное в предыдущем абзаце отображение T обладает следующим свойством.

Условие B. Существует инъективная функция $t{:}A\to S$ такая, что $t(\alpha)\in T(\alpha)$ для любого $\alpha\in A$.

Итак, имеются игра $\Gamma=\langle U,V,A,g,h\rangle$ и ее информационное расширение $\Gamma_*=\langle U_*,V_*,A,g_*,h_*\rangle$, задаваемое отображениями $\langle \pi,c,d\rangle$, такие, что $V_*=V\times S$, $U_*=\Phi(S,U)$, $\pi(u_*,v_*,\alpha)=(u_*(s),v)$ (здесь $v_*=(v,s)$), отображение c ставит в соответствие элементу $u\in U$ функцию $u_*{:}S\to U$, тождественно равную u, $d(v)=(v,s^0)$, где s^0 – произвольный фиксированный элемент множества S, а функции g_* и h_* определены так, что выполняется условие а) определения 1. Кроме того, задано отображение $T{:}A\to S$. Хочется знать, будет ли при рациональном выборе стратегии u_* и рациональном выборе стратегии $v_*=(v,s)$ выполняться включение $s\in T(\alpha)$?

Для игр с фиксированным порядком ходов ответ дается следующей теоремой.

Теорема 1. Допустим, отображение T удовлетворяет условию B. Пусть стратегия u_* гарантирует первому игроку получение выигрыша γ. Тогда существует такая стратегия ω_*, гарантирующая первому игроку тот же выигрыш γ, что при любом α среди рациональных откликов второго игрока на стратегию ω_* непременно найдется такая стратегия (v,t), что $t\in T(\alpha)$.

Доказательство. По определению 3 для любого α найдутся число $\lambda(\alpha)$ и такая стратегия $(v(\alpha),s(\alpha))$, что

$h(u_*(s(\alpha)),v(\alpha),\alpha)\geq\lambda(\alpha)$.

Обозначим $s^{-1}(\sigma)=\{\alpha\in A\text{: } s(\alpha)=\sigma\}$ полный прообраз элемента $\sigma\in S$ при отображении s, а $t(s^{-1}(\sigma))=\{\tau\in S\text{: } \tau=t(\alpha),\ \alpha\in s^{-1}(\sigma)\}$ – полный образ множества $s^{-1}(\sigma)$ при отображении t. В силу инъективности отображения t множества $t(s^{-1}(\sigma^1))$ и $t(s^{-1}(\sigma^2))$ не пересекаются при $\sigma^1\neq\sigma^2$. Поэтому существует такая функция ω_*, что $\omega_*(t(\alpha))=u_*(s(\alpha))$ для любого $\alpha\in A$. Это условие определяет функцию ω_* только для $\sigma\in\{\tau\in S\text{: } \tau=t(\alpha),\ \alpha\in A\}$. Для остальных σ положим $\omega_*(\sigma)=u_*(\sigma)$. Покажем, что стратегия ω_* – искомая.

Очевидно, что $h(\omega_*(t(\alpha))),v(\alpha),\alpha)=h(u_*(s(\alpha)),v(\alpha),\alpha)\geq\lambda(\alpha)$, то есть $(v(\alpha),t(\alpha))$ – рациональный отклик второго игрока на стратегию ω_*, отвечающий неопределенному фактору α.

Пусть теперь (w,σ) произвольная стратегия второго игрока, для которой $g(\omega_*(\sigma),w)<\gamma$. Если $\sigma=t(\beta)$ для некоторого $\beta\in A$, то тогда $g(u_*(s(\beta)),w)=g(\omega_*(t(\beta)),w)=g(\omega_*(\sigma),w)<\gamma$. В силу выбора стратегии u_* тогда $h(u_*(s(\beta)),w,\alpha)<\lambda(\alpha)$ и, следовательно, $h(\omega_*(\sigma),w,\alpha)=h(\omega_*(t(\beta)),w,\alpha)=h(u_*(s(\beta)),w,\alpha)<\lambda(\alpha)$. Если же $\sigma\notin\{\tau\in S\text{: } \tau=t(\beta),\ \beta\in A\}$, то $g(u_*(\sigma),w)=g(\omega_*(\sigma),w)<\gamma$. Следовательно, $h(\omega_*(\sigma),w,\alpha)=h(u_*(\sigma),w,\alpha)<\lambda(\alpha)$. В обоих случаях получили, что стратегия (w,σ) не является рациональным откликом второго игрока на стратегию ω_*. Значит, стратегия ω_* гарантирует первому игроку выигрыш γ.

Как установлено, $(v(\alpha),t(\alpha))$ является рациональным откликом на стратегию ω_*, и в силу определения функции t выполняется включение $t(\alpha)\in T(\alpha)$. Теорема доказана.

Остановимся на содержательной интерпретации конструкций, использованных при доказательстве теоремы. Как только первый игрок выберет стратегию u_* и сообщит ее партнеру, у сообщения $s(\alpha)$ появится некий внутренний смысл. А именно, выбирая сообщение $s(\alpha)$, второй игрок, по сути, сообщает, что в множестве $\Sigma=\{u\in U\colon u=u_*(s),\ s\in S\}$ наиболее предпочтительным для него является управление $u_*(s(\alpha))$. Если стремиться к тому, чтобы второму игроку было выгодно сообщать правду, то нужно, не меняя множества Σ, выбрать стратегию ω_* так, чтобы для некоторого сообщения $t\in T(\alpha)$ выбиралось то же самое управление $\omega_*(t)=u_*(s(\alpha))$. То есть, нужно подходящим образом закодировать этот внутренний смысл фразой из множества S.

Разумеется, для того, чтобы такая кодировка была возможной, выбранный язык должен быть достаточно выразительным. За это и отвечает условие В.

Заметим, что в подавляющем большинстве рассматривавшихся ранее постановок задач общение происходило на некоторых искусственных языках. Действительно, почти всегда квазиинформационное расширение задавалось при постановке задачи (даже если авторы модели не пользовались этим термином). Но если задано, например, расширение Γ_A (или $\Gamma_{A?}$), то на соответствующем языке можно обмениваться информацией только о значениях неопределенных факторов, но нельзя поговорить о выбранных вторым игроком управлениях или на какие-то отвлеченные темы. Это в известной степени отражает сложившуюся практику, когда общение между игроками происходит путем заполнения стандартных бланков (а в последнее время все чаще в этих бланках нужно просто расставить «галочки»). Поэтому, считать, что условие В выполняется автоматически, не правильно.

Если множество S конечно, то критерий выполнения условия В дает теорема Холла о трансверсалях [13]. Если S бесконечно, то это условие становится менее обременительным, Но в этом случае возникает возможность появления патологических решений, свидетельствующая о неадекватности постановки (об этом кое-что сказано в разделе 5 ниже).

Видимо, условие В является наиболее слабым из тех, которые не используют информацию о функциях выигрыша. Впрочем, это условие пока не кажется настолько важным, чтобы доказывать его необходимость. Понять, что не удастся совсем отказаться от условий такого типа, сохранив вывод теоремы 1, можно на совсем простых примерах, скажем, рассмотрев такое отображение T, что множество $T(\alpha)$ состоит из одного элемента, не зависящего от α.

4. Бесполезная информация

Можно указать один важный случай, когда обмен информацией, достоверность которой не гарантируется правилами игры, не приносит ощутимой выгоды.

Рассмотрим игру $\Gamma=\langle U,V,A,g,h\rangle$ в которой множество A состоит из одного элемента. Для упрощения формул в дальнейшем зависимость от α указывать не будем, не меняя обозначений. Для игр указанного типа справедлив следующий результат.

Теорема 2. Пусть отображения $\langle\pi,c,d\rangle$ задают квазиинформационное расширение $\Gamma_*=\langle U_*,V_*,A,g_*,h_*\rangle$ игры Г. Тогда для соответствующего расширения $\Gamma_{*?}$ справедливо равенство $R(\Gamma)=R(\Gamma_{*?})$.

Доказательство. Неравенство $R(\Gamma)\le R(\Gamma_{*?})$ следует из леммы 2. Докажем неравенство $R(\Gamma)\ge R(\Gamma_{*?})$.

Пусть стратегия $u_{*?}=u_*$ в игре $\Gamma_{*?}$ гарантирует первому игроку получение выигрыша γ. Тогда найдутся стратегия $v_{*?}=(v_*,w_*)$ и число λ удовлетворяющие определению 3. В частности $h_{*?}(u_{*?},v_{*?})=h(\pi_1(u_*,w_*),\pi_2(u_*,v_*))\ge\lambda$. Положим $u=\pi_1(u_*,w_*)$, $v=\pi_2(u_*,v_*)$. Тогда, очевидно, $h(u,v)\ge\lambda$.

Пусть теперь стратегия v' второго игрока в игре Г удовлетворяет условию $g(u,v')<\gamma$. Обозначим $v_{*?}'=(d(v'),w_*)$. Тогда $g_{*?}(u_{*?},v_{*?}')=g(\pi_1(u_*,w_*),\pi_2(u_*,d(v'))=g(u,v')<\gamma$. Так как стратегия $u_{*?}$ гарантирует первому игроку получение выигрыша γ, отсюда следует, что $h_{*?}(u_{*?},v_{*?}')<\lambda$. Но тогда

$$h(u,v')=h(\pi_1(u_*,w_*),\pi_2(u_*,d(v'))=h_{*?}(u_{*?},v_{*?}')<\lambda .$$

Это означает, что стратегии u, v и число λ удовлетворяют условию определения 3, то есть стратегия u гарантирует первому игроку выигрыш γ в игре Г. Поскольку в качестве γ можно было выбрать любое число, меньшее $R(\Gamma_{*?})$, неравенство $R(\Gamma)\geq R(\Gamma_{*?})$, а с ним и теорема доказаны.

5. Примеры

Но иногда даже недостоверная информация может быть полезной, как показывает следующий

Пример 4. Рассмотрим игру $\Gamma=\langle U,V,A,g,h\rangle$, в которой $U=V=A=\{0,1\}$, $g(u,v)=v$, $h(u,v,\alpha)=v-2v(u-\alpha)^2$ и ее расширение $\Gamma_{A?}$, описанное в примере 2?.

В игре Г, какое бы управление u не выбрал первый игрок, второму будет выгодно выбрать $v=0$, если окажется, что $u\neq\alpha$. Поэтому, первый игрок может гарантированно получить только нулевой выигрыш.

А в игре $\Gamma_{A?}$ первый игрок может выбрать стратегию $u_{A?}(\beta)=\beta$. Тогда единственным рациональным ответом второго игрока будет $(1,\alpha)$. Поэтому первый игрок получит гарантированно получит выигрыш, равный 1.

При наличии неопределенного фактора к увеличению выигрыша может привести и обмен информацией о выбранном управлении, как показывает

Пример 5. Пусть игра Г – та же, что и в предыдущем примере. Рассмотрим ее информационное расширение $\Gamma_{V?}$, описанное в примере 1?.

Рассмотрим стратегию $u_{V?}(w)=w$. Если $\alpha=1$, то единственным рациональным ответом на нее будет выбор (1,1). А если $\alpha=0$, то второму игроку выгодно выбрать стратегию (1,0). В обоих случаях первый игрок гарантированно получает 1.

Обсудим вопрос об истинности передаваемой информации в естественном предположении, что отображение T задано условием $T(\alpha)=\{\alpha\}$.

Понятно, что при описанной стратегии первого игрока его партнеру будет выгодно солгать, если окажется α=0. Кроме описанной выше существует еще только одна стратегия первого игрока, гарантирующая ему выигрыш 1, а именно $u_{V?}(w)=1-w$. Но при такой стратегии второму игроку будет выгодно солгать, если окажется, что α=1.

Впрочем, нетрудно сообразить, что в данном случае игроки пользуются эзоповым языком, передавая информацию о неопределенном факторе при помощи сообщений об управлениях. Поэтому вопрос об истинности сообщений становится, пожалуй, бессодержательным. К использованию иносказаний игроков вынуждает неудачный выбор языка общения (в данном случае информационного расширения $\Gamma_{V?}$).

Сказанное в предыдущем абзаце совершенно естественно, но чтобы формализовать эти соображения, нужно более тонкое описание семантики языка, чем использовано выше.

В данном простом примере понятно, что расширение $\Gamma_{A?}$ «гораздо лучше», чем расширение $\Gamma_{V?}$. Но уже довольно давно известны примеры, где все далеко не так очевидно (см., например, параграф 7.3 из [7]). Поэтому постановка задачи о рациональном выборе языка общения является весьма актуальной. Но при этом, видимо, придется довольно глубоко погрузиться в математическую лингвистику.

Кстати, выше намечен и один из подходов к решению этой задачи. Можно обмениваться не информацией о выборе второго игрока и неопределенном факторе. Лучше, если второй игрок будет передавать информацию о желательном для него выборе первого игрока. Здесь должны получится задачи, аналогичные рассмотренным в [8].

Пример 5 объясняет, между прочим, почему теорема 1 доказана в меньшей общности, чем другие результаты данной работы. Без дополнительных предположений соответствующий результат может стать попросту неверным.

Отметим, что если бы выбранный язык был более выразительным, то можно было бы воспользоваться идеями из доказательства теоремы 1 и получить оптимальную стратегию, обеспечивающую передачу истинной информации. Например, положим в расширении, описанном в третьем разделе $S=V\times V$ и $T(1)=\{(1,0),(1,1)\}$, $T(0)=\{(0,0),(0,1)\}$. Тогда стратегия $u_*(s)=s^2$, где $s=(s^1,s^2)$, гарантирует первому игроку выигрыш 1, так как единственным рациональным откликом на эту стратегию будет выбор $(1,(1,\alpha))$. Этот отклик предполагает передачу истинной информации. Правда проблем с осмысленностью такого понимания истины это не снимает.

В следующей игре те же проблемы проявляются по-иному.

Пример 6. Рассмотрим игру $\Gamma=\langle U,V,A,g,h\rangle$, в которой

$U=[0,1]\times[0,1]$, $V=[0,1]$, $A=[0,1]\times[0,1]$,

$g(u,v)=v$, $h(u,v,\alpha)=v-v((u^1-\alpha^1)^2+(u^2-\alpha^2)^2)$,

где $u=(u^1,u^2)$ и $\alpha=(\alpha^1,\alpha^2)$.

Найдем максимальный гарантированный результат первого игрока в информационном расширении Γ_V из примера 1.

Фиксируем произвольное положительное ε. Отрезок $[1-\varepsilon,1]$ имеет мощность континуума, так же как и квадрат A. Поэтому существует взаимно однозначное отображение $\psi:A\to[1-\varepsilon,1]$. Рассмотрим стратегию u_V? определенную условием

$$u_V(v)=\begin{cases}\psi^{-1}(v), \text{ если } v\in[1-\varepsilon,1],\\ (0,0) \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Выбрав управление $v=\psi(\alpha)$, второй игрок получит выигрыш больший или равный $1-\varepsilon$. А больше 1 он получить не может. Следовательно, такой выбор будет рациональным ответом на стратегию u_V. При этом первый игрок получит выигрыш $1-\varepsilon$.

Следовательно, максимальный гарантированный результат первого игрока в данной игре равен 1 и обеспечивается использованием стратегий указанного вида.

Вроде бы, решение найдено. Но отображение ψ устроено так [10], что его можно рассматривать скорее как математический курьез. Во всяком случае, ни о каком практическом применении подобных стратегий не может идти речи.

Причина появления этой патологии заключается в том, что второй игрок эзоповым языком передает партнеру информацию о неопределенном факторе. (Кстати, правилами игры достоверность этой информации не гарантируется.)

В данном конкретном примере ситуация немного смягчается тем, что такая ε-оптимальная стратегия не единственна. Для того, чтобы второму игроку было выгодно выбирать управление v близкое к 1, достаточно, чтобы u было «примерно равно» α, а потому можно эзоповым языком передавать лишь конечный объем информации. При этом ε-оптимальные стратегии будут выглядеть попроще. Но в более сложных моделях такая аппроксимация оказывается невозможной (соответствующие примеры есть, например, в параграфе 7.3 из [7]).

Гораздо более радикальный и естественный способ возникающих проблем состоит в том, чтобы перейти от рассмотрения расширения Γ_V к изучению игры $\Gamma_{VA?}$, в которой первый игрок получает достоверную информацию об управлении противника и еще не обязательно истинную информацию о неопределенном факторе. Тогда стратегия $u_{VA?}(v,\beta)=\beta$ гарантирует первому игроку выигрыш в точности равный 1, так как единственным рациональным ответом второго игрока на эту стратегию будет выбор $(1,\alpha)$ (при этом второй игрок получает 1).

Таким образом, здесь опять встает вопрос о рациональном выборе языка общения.

6. Заключение

Выбранный способ формализации понятия истинности передаваемой информации вряд ли можно назвать новым. По сути, были просто явно сформулированы предположения, уже использовавшиеся в более ранних моделях [1,2,5–7,11]. Эти предположения сводятся к тому, что информация может быть либо истинной, либо ложной (третьего не дано).

Как показывают приведенные примеры, это предположение может оказаться слишком грубым. Впрочем, для специалистов по лингвистике последний вывод не является новым [12].

Приведенные доказательства чрезвычайно просты. Они основаны, скорее, не на математических идеях, а на простой житейской логике. Это дает основание предполагать, что те же идеи будут работать не только для рассмотренных выше моделей, которые намеренно выбирались максимально простыми.

Литература

1. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем*. М.: Наука, 1977. –255 с.
2. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы.* М.: Синтег, 1999. – 128 с.
3. ВАСИН А.А., МОРОЗОВ В.В. *Теория игр и модели математической экономики*. М.:МАКС Пресс, 2005. – 272 с.
4. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций.* М.: Наука, 1971. – 383 с.
5. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами*. М.: Наука, 1976. – 327 с.
6. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.
7. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления.* М.: Радио и связь, 1991. –288 с.
8. ГОРЕЛОВ М.А. *Модель институционального управления* / Управление большими системами. Вып. 35. М.: ИПУ РАН, 2011. С. 68–93.
9. КУКУШКИН Н.С., МОРОЗОВ В.В. *Теория неантагонистических игр*. М.: МГУ, 1984. – 104 с.
10. НАТАНСОН И.П. *Теория функций вещественной переменной*. М.: Гостехиздат, 1950. – 399 с.
11. НОВИКОВ Д. А. *Теория управления организационными системами.* – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.
12. УСПЕНСКИЙ В.А. *Математическое и гуманитарное: преодоление барьера*. М.:МЦНМО, 2011. – 48 с.
13. ХОЛЛ М. *Комбинаторика*. М.: Мир, 1970. – 424 с.

ARTICLE TITLE: GAMES WITH DOUBTFUL INFORMATION TRANSFER

Mikhail Gorelov, Computer Center of RAS, Moscow, Cand.Sc., (griefer@ccas.ru).

Abstract: A possibility of formalization of some questions related to semantics of information which players transfer in the decision making process is treated.

Keywords: hierarchical games, informational extension, semantics.