МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Тукубаев З.Б.
(Международный Казахско-Турецкий университет имени Ясауи, г.Туркестан, Казахстан)
zuhr@pochta.ru.,zuhr08@rambler.ru

В статье делается анализ методов и алгоритмов оценки погрешности квантования и дискретизации непрерывных сигналов.
In the article it is done analysis of methods and algorithms assessment of accuracy and reproduction of ceaseless signals.

Ключевые слова: квантование, дискретизация, информационные модели объектов и процессов, критерий оценки, точность воспроизведения, воспроизводящая функция,

В настоящее время исследование и проектирование современной техники и технологии производится только на основе применения автоматизированных систем научных исследований (АСНИ) и систем автоматизации проектирования (САПР)[1, 7-21].

В информационно-измерительных системах (ИИС) АСНИ при измерении непрерывных процессов производится дискретизация и квантование непрерывных сигналов, которые кодируются и записываются в носители информации. После дальнейшей обработки и аппроксимации строятся модели процессов и обьектов, в более обобщенной форме – информационные модели (ИМ) обьектов и процессов.

При квантовании по времени (дискретизация) в моменты времени t_i получают отсчетные значения $x(t_i)$ с интервалами Δt_i ; при восстановлении непрерывного сигнала используется некоторая воспроизводящая функция $V(t)$, которая строится как взвешенная сумма некоторого ряда функции $f(t - t_k)$:

$$V(t) = \sum_k a_k f(t - t_k) \qquad [2,66\text{-}74].$$

Возникает задача оптимизации следующего типа; при уменьшении Δt_i увеличивается точность воспроизведения. Но, при этом, быстродействие устройства квантования может уменьшаться до нуля, обеспечивая бесконечно большую избыточность дискретных данных. Следовательно, необходимо найти такой шаг дискретизации $\Delta t_i \to \min$, который обеспечивает требуемую точность восстановления при минимальной избыточности дискретных данных.

При этом, критериями оценки точности воспроизведения могут быть – максимальный, среднеквадратичный, интегральный, вероятностный, а также по мощности погрешности и информационный.

Значения текущей погрешности $\xi(t)$ определяется как разность между значениями сигнала $x(t)$ и воспроизводящей функции $V(t)$:

$$\xi(t) = x(t) - V(t).$$

Выбор критерия оценки погрешности дискретизации и восстановления производится получателем информации в зависисмости от целевого назначения дискретного сигнала, аппаратурной и программной реализации.

На интервале дискретизации $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ отклоненеие $V(t)$ от $x(t)$ оценивается следующими критериями:

1) Критерий найбольшеге отклонения в линейном метрическом пространстве (по метрике Чебышева).

$$\xi_v = \max |\xi(t)| = \max |x(t) - V(t)|$$

$t \in \Delta t_i$ $\qquad$ $t \in \Delta t_i$

Этот критерии целесообразно использовать, когда известны априорные сведения о сигналах в форме условий Липшица

$$\left|x(t) - x(t')\right| \le \ell \left|t - t'\right|$$ или

$$\left|x^n(t) - x^n(t')\right| \le \ell \left|t - t\right|,$$ где ℓ - некоторая константа, а $x^n(t)$ - n –я производная функции $x(t)$.

2) Среднеквадратический критерий в гильбертовом пространстве:

$$\overline{\xi^2} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t_i}\int_{\Delta t_i} \xi^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t_i}\int_{\Delta t_i} \left|x(t) - V(t)\right|^2 dt}\,.$$

При этом,

$$(x, v) = \frac{1}{\Delta t_i}\int_{\Delta t_i} x(t) V(t) dt\,.$$

Часто используют критерий вида:

$$\overline{\xi^2} = \sqrt{\int_{\Delta t_i} \xi^2(t) dt}\,.$$ Этот критерий используется для функции интегрируемых в квадрате, т.е.

$$\int_a x^2 dt \prec \infty \ (-\infty \le a \prec b \prec \infty)\,.$$

При неравномерном шаге дискретизации использование критерия нецелесообразно из-за усложнения аппаратуры.

3) Интегральный критерий имеет вид:

$$\overline{\xi} = \int_{\Delta t_i} \xi(t) dt\,.$$

4) Вероятностный критерий имеет вид:

$$P(\xi(t) \prec \xi_0) = P_0\,.$$

Где ξ_0 - допустимое значение погрешности; P_0 - допустимая вероятность того, что погрешность не превышает ξ_0.

5) Весовая оценка погрешности :

$$\overline{\xi^2} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t_i}\int_{\Delta t_i} P(t)\xi^2(t)dt}$$, где $P(t)$ - весовая функция.

6) Критерий мощности погрешности квантования [3,63-67] .

Во многих случаях непрерывные сигналы являются немарковскими и с неограниченными спектрами. При квантовании таких сигналов неизбежна погрешность, величина которой определяется допустимой мощностью погрешности- ε^2 . При практических расчетах количество весовых коэффициентов и слагаемых определяется из соотношения:

$$\left|1 - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} C^2[i]\right| \le \varepsilon^2$$, где $C[i]$ - весовые коэффициенты алгоритма квантования совпадают с коэффициентами Фурье.

7) Информационный критерий оценки погрешности квантования [4,6] :

Информационная погрешность определяется как энтропия погрешности - $\Delta H(X)$.

Величину энтропии погрешности можно определить из выражения:

$$\Delta H(X) = H(X) - H_d(X),$$

$$\Delta H(X) = -\frac{1}{2}\log(1 - \varepsilon^2)$$

8) Среднеквадратическое отклонение погрешности:

$$\sigma_E^2 = D[E(t_i)] = M\{[E(t_i) - m_E]^2\}$$

9) Среднеквадратическое значение погрешности :

$$\eta_E^2 = M[E^2(t_i)] = \sigma_E^2 + m_E^2$$, где

$$m_E = M[E(t_i)].$$

При воспроизведении исходного сигнала $x(t)$ по дискретным значениям $x(t_i)$ выбирается обобщенный многочлен: $V'(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(t)$, значения которого в точках отсчета t_i совпадают со значениями функции $x(t)$.

В задачах дискретизации и восстановления сигналов используются класс полных ортонормальных систем [5,57-63]: ряды Фурье, Котельникова, полиномы Чебышева,Лежандра,степенные, функции Лагерра, Лежандра,Чебышева,Уолша,Эрмита,Хаара,гипергеометрические и др.

1) Комплексные гармонические функции.

Для $T = [-1,+1]$, $\omega(t) = 1$, где T – интервал времени, $\omega(t)$ – весовая функция, комплексные гармонические функции $\{\varepsilon^{j\pi nt};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, ортогональны и разложение в ряд Фурье на отрезке $[-1,+1]$ с периодом 2 имеет вид: $x(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{j(\pi kt)}$ при

$$\alpha_k = \int_{-1}^{+1} x(t) e^{-j(\pi kt)} dt .$$

2) Полиномы Лежандра.

Для $T = [-1,+1]$, $\omega(t) = 1$, к последовательности $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$ получены нормированные полиномы:

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \varphi_2(t) = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right), \varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(t),$$ где

$\{P_n(t)\}$ – .полиномы Лежандра, вычисляется по формуле:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \bullet \frac{d^n}{dt^n}\left(t^2 - 1\right)^n,$$

$$nP_n(t) = (2n-1)tP_{n-1}(t) - (n-1)P_{n-2}(t).$$

Все n нулей полинома $P_n(t)$ вещественны и лежат внутри интервала $[-1,+1]$.

3) Полиномы Чебышева.

Для $T = [-1,+1], \omega(t) = \left[1 - t^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ полиномы $\varphi_n(t) = 2^n (2\pi)^{-\frac{1}{2}} T_n(t); n = 0,1,2,...$ образуют ортогональную систему. T_{n-} полиномы Чебышева задаются следующим образом:

$$T_0(t) = 1; T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \bullet Cos\left(n \cdot arc\left(Cos\left(t\right)\right)\right); n \geq 1.$$

Для $n \geq 3$ $T_n(t)$ вычисляется по рекуррентной формуле: $T_n(t) = tT_{n-1}(t) - \frac{1}{4}T_{n-2}(t)$.

4) Ряды и функции Котельникова.

По теореме отсчетов Котельникова непрерывный белый шум $x(t)$ с ограниченным спектром частотой ω_c можно точно выразить через дискретный белый шум $x[n\Delta t]$ с параметрами $\left(0,\sigma^2\right)$ и можно представить в виде ряда Котельникова: $x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] f_n(t)$, где

$$f_n(t) = \frac{Sin\left[\omega_c (t - n\Delta t)\right]}{\omega_c (t - n\Delta t)}, x[n] = x(n\Delta t)$$

Окончательно воспроизводящая функция имеет вид:

$x'[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_0[k] x[n-k]$. Коэффициенты $C_0[k]$ совпадают с коэффициентами Фурье в разложении функции $R_0(j\omega)$ на интервале $(-\omega_c, \omega_c)$

При ограниченном количестве членов суммы :

$$x'[n] \approx x^*[n] = \sum_{k=1}^{N} C_0[k]\,x[n-k],$$ где

$N = 2P+1,\ C_k = C_0[k-P-1]$.

5) Полиномы Лаггера.

Для $T = [0, \infty],\ \omega(t) = e^{-t}$ полиномы

$\varphi_n(t) = \frac{1}{n!} L_n(t),\ n = 0,1,2,...$ образуют

ортонормальную систему.

$L_{nn}(t) = e^{t} \frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right)$ – полиномы Лаггера.

$$L_{nn}(t) = (2n-1-t)L_{n-1}(t) - (n-1)^2 L_{n-2}(t).$$

Функции Лаггера имеют вид: $\psi_n(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{n!} L_n(t)$.

Они ортогональны на $[0, \infty]$ с единичным весом. Их можно получить применением процедуры Грамма-Шмидта к последовательности $\left\{ t^n e^{-\frac{t}{2}},\ n = 0,1,2,... \right\}$.

При помощи функции Лаггера строится трансверсальные фильтры, на выходе которых можно получить импульсные реакции любой требуемой формы.

6) Функции Лежандра имеют вид:

$\pi_n(t) = [2P(2n+1)]^{\frac{1}{2}} e^{-pt} P_n\left(1 - 2e^{-pt}\right)$ и

образуют ортонормальную систему на $[0, \infty]$ с единичным весом, где з – произвольный действительный положительный параметр. Фунции Лежандра можно получить из полиномов Лежандра подстановкой

$\tau = 1 - 2e^{-2pt}$; при этом интервал $[-1,1]$ для τ преобразуется в интервал. $[0,\infty]$.

7) Функции Чебышева.

Из полиномов Чебышева преобразованием $\tau = 1 - 2e^{-2pt}$ получаем функции Чебышева $\rho_n(t) = 2^n\left(\frac{p}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} T_n(1 - 2e^{-2pt})$, которые ортонормальны на $[0,\infty]$ с весом

$$\omega(t) = \left(e^{-2pt} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

8) Функции Эрмита.

Для $T = [-\infty,\infty]$, $\omega(t) = e^{-t^2}$ полиномы $\varphi_n(t) = \left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} H_n(t)$, $n = 0,1,2,...$ образуют ортонормальную систему. Полиномы Эрмита имеют вид:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2}\right)$$ или

$$H_n(t) = 2tH_{n-1}(t) - 2(n-1)H_{n-2}(t).$$

Функции Эрмита $\psi_n(t) = \left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)$ ортонормальны с единичным весом на $[-\infty,\infty]$.

9) Функции Уолша.

Для $T = [0,1]$, $\omega(t) = 1$ можно построить полную ортонормальную систему функции. Функции Уолша имеют вид:

$\varphi_0(t) = 1, 0 \le t \le 1;$

$$\varphi_1(t) = \left\{\frac{1;\ 0 \le t \le \frac{1}{2}}{-1;\ \frac{1}{2} \prec t \le 1}\right\}$$

$$\varphi_2^{(1)}(t) = \left\{\frac{1;\ 0 \le t \prec \frac{1}{4} \ldots \prec t \le 1;}{-1;\ \frac{1}{2} \prec t \ldots \frac{3}{4}}\right\}$$

$$\varphi_{m+1}^{(2k)}(t) = \begin{cases} \varphi_m^{(k)}(2t); & 0 \le t \prec \frac{1}{2}; \\ (-1)^k \varphi_m^{(k)}(2t-1); & \frac{1}{2} \prec t \le 1; \end{cases},$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$ и $k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{m-1}$

Функции Уолша широко используются в вычислительной технике для создания двоичных логических схем.

1. ШИБАНОВ В.С. и др. *Средства автоматизации управления в системах связи, -М.,* изд.”Радио и связь”, 1990 г.-232 с.
2. ТЕМНИКОВ Ф.Е. и др. *Теоретические основы информационной техники*. –М., изд. “Энергия”, 1979 г.,-512 с.
3. БЫКОВ В.В. *Цифровое моделирование в статистической радиотехнике*. –М., изд. “Советское радио”, 1971 г., -328 с.
4. ТУКУБАЕВ З.Б. *Методы оценки качества имитационного моделирования*, НТ сб. “Вестник МКТУ”, Г. Туркестан, вып.2, 2007 г.
5. ФРЕНКС Л. *Теория сигналов*. –М., изд. “Советское радио”, 1974 г. - 344 с.
6. ТУКУБАЕВ З.Б. *Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов.* НТ сб. “Вестник МКТУ”, г.Туркестан, вып.2, 2007 г.