УДК 519.715 + 681.514
ББК 22.1

АНИЗОТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ВХОДНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Кустов А.Ю.[1],
(ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В созданной с 90-х гг. анизотропийной теории управления в качестве входных возмущений, действующих на линейную систему, принимается последовательность гауссовских случайных векторов с нулевым математическим ожиданием и заданной средней анизотропией. В данной работе введены понятия средней анизотропии последовательности с ненулевым математическим ожиданием и анизотропийной нормы системы, на вход которой поступает данная последовательность. Рассмотрена задача анизотропийного анализа в частотной области и показано отличие от способа вычисления анизотропийной нормы в частотной области при нулевом математическом ожидании.

Ключевые слова: Анизотропийная теория управления, средняя анизотропия, анизотропийная норма, гауссовские случайные вектора, частотная область.

1. Введение

В период 1994–2008 годов. в России для линейных дискретных стационарных систем была создана теория оптимального стохастического управления [1],[2], позволяющая строить управление, минимизирующее специально определенную норму замкнутой системы (анизотропийную

[1] *Кустов Аркадий Юрьевич, м.н.с., (arkadiykustov@gmail.com).*

норму системы). В период с 2008 по 2012 годы в работах [3] для систем указанного выше типа была создана теория стохастического субоптимального робастного управления, позволяющая строить управление, обеспечивающее ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы. В настоящее время эти математические теории находят свое применение в различных задачах управления и фильтрации.

Созданные теории в известной степени лежат между классическими теориями $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-оптимальных (субоптимальных) управлений. Основными ключевыми понятиями созданных теорий являются анизотропия случайного вектора и средняя анизотропия сигнала, представляющего собой последовательность случайных векторов. Анизотропия вектора характеризует "цветность" сигнала как меру отличия его плотности распределения от эталонной плотности, за которую принимается плотность нормального распределения с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей. С основами анизотропийной теории можно ознакомиться в [4].

В построенной ранее анизотропийной теории предполагается, что на вход объекта управления поступает сигнал определенной "цветности" и нулевым математическим ожиданием. Однако в реальных технических системах на вход объекта может поступать сигнал с ненулевым математическим ожиданием. Поэтому представляет интерес создание анизотропийной теории управления в случае ненулевого среднего векторов входной последовательности. В данной статье приводится решение задачи анизотропийного анализа, состоящей в получении формул для вычисления анизотропии случайного вектора и средней анизотропии последовательности случайных векторов, а также вывод формул для вычисления в частотной области анизотропийной нормы системы в случае ненулевого математического ожидания случайного сигнала. Некоторые результаты были уже опубликованы в [5].

2. Анизотропия вектора, средняя анизотропия последовательности

Для описания степени различия между случайными векторами в теории информации используется понятие относительной энтропии. Применяя ее, приведем определение анизотропии случайного вектора и средней анизотропии последовательности случайных векторов.

Пусть W - m-мерный гауссовский случайный вектор с ненулевым матожиданием μ и ковариационной матрицей S с плотностью распределения вероятности

$$f(x) = ((2\pi)^m |S|)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T S^{-1}(x-\mu)\right), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Согласно определению анизотропия вектора W равна минимуму расстояния Кульбака-Лейблера (относительной энтропии) f относительно плотности распределения вероятности $p_{m,\lambda}$ гауссовского случайного вектора с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m [1]:

$$\mathbf{A}(W) \triangleq \min_{\lambda>0} \mathbf{E}_f \ln \frac{f(x)}{p_{m,\lambda}(x)} = -\frac{1}{2} \ln \det\left(\frac{mS}{\mathrm{tr}S + |\mu|^2}\right).$$

В силу свойств логарифма $\mathbf{A}(W) > 0 \ \forall \mu \neq 0$. Относительная энтропия может трактоваться как "расстояние" между плотностью f и эталонной плотностью $p_{m,\lambda}$, а анизотропия – как "расстояние" между плотностью f и множеством эталонных плотностей $\{p_{m,\lambda} : \ \lambda > 0\}$.

Средняя анизотропия стационарной эргодической последовательности $W = \{w_k\}$ введена в [1] как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

где $W_{0:N-1}$ – расширенный вектор последовательности, определяемый как

$$W_{0:N-1} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Правило вычисления средней анизотропии последовательности случайных векторов с ненулевыми математическими ожиданиями дает следующая теорема [5]:

Теорема 1. *Пусть последовательность* $W = \{w_k\}$ *генерируется из гауссовского белого шума* $\{v_k\}$ *формирующим фильтром*

$$G \sim \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bv_k + \nu, \\ w_k = Cx_k + Dv_k + \mu\,, \end{cases}$$

с асимптотически устойчивой матрицей $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *(*$\rho(A) = \max|\lambda(A)| < 1$*), невырожденной матрицей* $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *и векторами* μ *и* ν*, такими, что* $|\mu| < \infty$*,* $|\nu| < \infty$*. Тогда средняя анизотропия* $\overline{\mathbf{A}}(W)$ *последовательности* W *равна*

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m(\Sigma+\Xi)}{\mathrm{tr}\Sigma + |\mathcal{M}|^2}\right),$$

где Σ *и* Ξ *связаны с решениями* P *и* R *уравнений Ляпунова и Риккати формулами*

$$\begin{array}{ll} \Sigma = CPC^T + DD^T, & \Xi = CRC^T, \\ P = APA^T + BB^T, & R = ARA^T - \Lambda(\Sigma+\Xi)^{-1}\Lambda^T, \\ & \Lambda = BD^T + A(P+R)C^T, \end{array}$$

а вектор $\mathcal{M}$ *равен*

$$\mathcal{M} = \mu + C(I_n - A)^{-1}\nu.$$

Доказательство. В силу определения средней анизотропии справедливо

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}}(W) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathbf{A}(W_{0:N-1}) \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln\det\left(\frac{mN\Sigma_{0:N-1}}{\mathrm{tr}\Sigma_{0:N-1} + |\mu_{0:N-1}|^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ln\frac{\lim\limits_{N\to\infty}|\Sigma_{0:N-1}|^{1/N}}{\left(\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{mN}\left(\mathrm{tr}\Sigma_{0:N-1} + |\mu_{0:N-1}|^2\right)\right)^m}, \end{aligned}$$

где $\Sigma_{0:N-1} = \mathrm{cov}(W_{0:N-1})$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathrm{tr}\Sigma_{0:N-1} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{tr}\Sigma_k = \lim_{N\to\infty}\mathrm{tr}\Sigma_N \\ &= \mathrm{tr}(DD^T + \sum_{k=0}^{\infty} CA^kB(CA^kB)^T) = \mathrm{tr}\Sigma\end{aligned}$$

и

$$\lim_{N\to\infty} |\Sigma_{0:N-1}|^{1/N} = |\Sigma + \Xi|,$$

а $\mu_{0:N-1} = \mathbf{E}W_{0:N-1}$, причем

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}|\mu_{0:N-1}|^2 &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|\mathbf{E}w_k|^2 = \lim_{N\to\infty}|\mathbf{E}w_N|^2 \\ &= |\mu + C\nu + CA\nu + CA^2\nu + \ldots|^2 = |\mathcal{M}|^2.\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулу для средней анизотропии, завершим доказательство.

■

Пример 1. Пусть формирующий фильтр образован матрицами

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.8 \\ 0.8 & -1.4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix},$$

а векторы ν и μ, определяющие матожидания векторов $\{w_k\}$, равны

$$\nu = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

Согласно Теореме 1, имеем

$$\Sigma \simeq \begin{bmatrix} 9.82 & 2.71 \\ 2.71 & 5.61 \end{bmatrix}, \quad \Xi \simeq \begin{bmatrix} -4.38 & 0.94 \\ 0.94 & -2.08 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M} \simeq \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.34 \end{bmatrix},$$

и, следовательно,

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m(\Sigma+\Xi)}{\mathrm{tr}\Sigma + |\mathcal{M}|^2}\right) \simeq 1.164.$$

•

3. Анизотропийная норма

Обычно одной из целей управления является минимизация функционала качества, который обычно выбирают как некоторую норму передаточной функции замкнутой системы. В анизотропийной теории управления в качестве такого функционала выступает супремум отношения стохастической мощностной нормы выхода к аналогичной норме входа. Приведем определение анизотропийной нормы системы.

Пусть $y = \{y_k\}$ – последовательность m-мерных векторов. Стохастической мощностной нормой сигнала y будем называть число

$$\|y\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|y_k|^2}.$$

Пусть $F(z)$ – матричная передаточная функция некоторой устойчивой системы. Определим основные нормы систем:

1. $\|F\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\mathrm{tr}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \widehat{F}^*(\omega)\widehat{F}(\omega)d\omega}$ – $\mathcal{H}_2$-норма системы F, $\widehat{F}(\omega) = \lim\limits_{r\to 1-0} F(r\mathrm{e}^{j\omega})$;

2. $\|F\|_\infty = \sup\limits_{\omega\in[-\pi;\pi]} \sigma_{\max}(\widehat{F}(\omega))$ – $\mathcal{H}_\infty$-норма системы F, $\sigma_{\max}(\widehat{F}) = \sqrt{\lambda_{\max}(\widehat{F}^T\widehat{F})}$.

Пусть $F(z)$ – матричная передаточная функция замкнутой системы со входом $\{w_k\}$ (последовательность гауссовских векторов с ненулевым средним) и выходом $\{z_k\}$. Определим среднеквадратичный коэффициент усиления как

$$Q(F, W) \triangleq \frac{\|z\|_{\mathcal{P}}}{\|w\|_{\mathcal{P}}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|z_k|^2}{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|w_k|^2}}.$$

Пусть система, описывающая объект управления, замкнутый регулятором, имеет вид

$$F \sim \begin{cases} x^o_{k+1} = A_{cl}x^o_k + B_{cl}w_k, \\ z_k = C_{cl}x^o_k + D_{cl}w_k, \end{cases}$$

где $x^o_k \in \mathbb{R}^n$ – состояние объекта, $\{w_k\}$ – входное возмущение, $z_k \in \mathbb{R}^p$ – выход. Матричная передаточная функция системы равна $F(z) = D_{cl} + C_{cl}(zI_n - A_{cl})^{-1}B_{cl}$, $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Для выходов системы F и формирующего фильтра G с представлениями

$$F \sim \begin{cases} x^o_{k+1} = A_{cl}x^o_k + B_{cl}w_k, \\ z_k = C_{cl}x^o_k + D_{cl}w_k, \end{cases} \qquad G \sim \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bv_k + \nu, \\ w_k = Cx_k + Dv_k + \mu, \end{cases}$$

справедливы следующие утверждения. Для формирующего фильтра G стохастическая мощностная норма выхода $\{w_k\}$ равна

$$\|w\|^2_{\mathcal{P}} = \lim_{k\to\infty} \left(\mathrm{tr}\,\mathrm{cov}(w_k) + |\mathbf{E}w_k|^2\right) = \|G_0\|^2_2 + |\mathcal{M}|^2.$$

Аналогично, для системы F стохастическая мощностная норма выхода $\{z_k\}$ равна

$$\|z\|^2_{\mathcal{P}} = \lim_{k\to\infty} \left(\mathrm{tr}\,\mathrm{cov}(z_k) + |\mathbf{E}z_k|^2\right) = \|FG_0\|^2_2 + |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2,$$

где при разложении $w_k = w_{0,k} + w_{E,k}$ для векторов $w_{0,k}$ (с нулевым средним и ненулевой ковариационной матрицей) и $w_{E,k}$ (с ненулевым средним и нулевой ковариационной матрицей) введены генерирующие фильтры

$$G_0 \sim \begin{cases} x_{0,k+1} = Ax_{0,k} + Bv_k, \\ w_{0,k} = Cx_{0,k} + Dv_k, \end{cases} \qquad G_E \sim \begin{cases} x_{E,k+1} = Ax_{E,k} + \nu, \\ w_{E,k} = Cx_{E,k} + \mu. \end{cases}$$

При этом матрица $\mathcal{F}$ определяется как

$$\mathcal{F} \doteq F(1) = T_{zw}(1) = D_{cl} + C_{cl}(I_n - A_{cl})^{-1}B_{cl}.$$

Будем считать природу "игроком", целью которого является генерация наихудшего в некотором смысле входного сигнала, и предположим, что "стратегия" природы основана на полном знании о нашей системе, то есть верхние подсистемы фильтра и объекта управления тождественны, что приводит к условиям

$$A = A_{cl} + B_{cl}C, \quad B = B_{cl}D$$

для матриц A и B, и к условию

$$\nu = B_{cl}\mu$$

для вектора ν. В связи с этим вектор $\mathcal{M}$ равен

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = T_{w\mu}(1)\mu &= (I_m + C(I_n - A)^{-1}B_{cl})\mu \\ &= (I_m + C(I_n - A_{cl} - B_{cl}C)^{-1}B_{cl})\mu.\end{aligned}$$

В дальнейшем будем считать, что известен не вектор μ (и соответственно ν), а вектор $\mathcal{M}$. При таком предположении зависимость $\mathcal{M}$ от матрицы C формирующего фильтра "пропадает".

Итак, среднеквадратичный коэффициент усиления равен

$$Q(F, W) = \sqrt{\frac{\|FG_0\|_2^2 + |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}} = \sqrt{\frac{\|FG_0\|_2^2 + |T_{zw}(1)T_{w\mu}(1)\mu|^2}{\|G_0\|_2^2 + |T_{w\mu}(1)\mu|^2}}.$$

Анизотропийная норма системы определена как

(1) $$|\!|\!|F|\!|\!|_a \triangleq \sup_{W:\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} Q(F, W),$$

и равна максимальному коэффициенту усиления по всем возможным формирующим фильтрам с уровнем средней анизотропии не более a.

Пример 2. Рассмотрим замкнутую систему

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{cl}x_k + B_{cl}w_k, \\ z_k = C_{cl}x_k + D_{cl}w_k, \end{cases}$$

с матрицами

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} -0.662 & -0.952 \\ 0.087 & 0.962 \end{bmatrix},\ B_{cl} = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ 0.4 & -0.3 \end{bmatrix},$$
$$C_{cl} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\ D_{cl} = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть на вход описанной системы подается окрашенная последовательность со следующими устойчивой матрицей A формирующего фильтра и ненулевым вектором μ:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & -1.27 \\ 0.43 & 1.2 \end{bmatrix},\ \mu = \begin{bmatrix} 0.05 \\ -0.01 \end{bmatrix}.$$

Согласно выражениям

$$A = A_{cl} + B_{cl}C, \quad B = B_{cl}, \quad \nu = B_{cl}\mu,$$

определим матрицы B, C, D и вектор ν следующим образом:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -0.65 \\ 0.19 & -1.66 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \nu = \begin{bmatrix} 0.052 \\ 0.023 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\|G_0\|_2^2 = 1.487$, $\|FG_0\|_2^2 = 11.386$, $|\mathcal{M}|^2 = 0.046$, $|\mathcal{FM}|^2 = 0.693$ и, следовательно, среднеквадратичный коэффициент усиления равен

$$Q(F,W) = \sqrt{\frac{\|FG_0\|_2^2 + |\mathcal{FM}|^2}{\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}} = 2.807.$$

•

4. Анизотропийная норма: частотная область

Вычисление анизотропийной нормы непосредственно по определению (1) затруднительно, поэтому целесообразен переход в частотную область. Для этого необходимо ввести дополнительные функции, которые являются частотными аналогами средней анизотропии и среднеквадратичного коэффициента усиления.

Пусть $\mathbb{S}(\omega)$ – спектральная плотность формирующего фильтра G_0,

$$\mathbb{S}(\omega) = \widehat{G}_0^*(\omega)\widehat{G}_0(\omega), \quad \widehat{G}_0(\omega) \doteq G(e^{j\omega}).$$

Введем следующие функции параметра $q \in [0; \|F\|_\infty^{-2})$:

(2) $$\Phi(q) = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr} S(q, \Lambda(\omega))d\omega\,,$$

(3) $$\Psi(q) = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det S(q, \Lambda(\omega))d\omega\,,$$

(4) $$A(q) = \frac{m}{2}\left(\ln\left(\Phi(q) + \frac{1}{m}|\mathcal{M}|^2\right) - \Psi(q)\right)\,,$$

(5) $$N(q) = \sqrt{\frac{\Phi(q) - 1 + \frac{q}{m}|\mathcal{FM}|^2}{q\Phi(q) + \frac{q}{m}|\mathcal{M}|^2}}\,.$$

Покажем, что для $S(q,\Lambda(\omega)) = (I_m - q\widehat{F}^*(\omega)\widehat{F}(\omega))^{-1}$ введенные функции $A(q)$ и $N(q)$ равны соответственно $\overline{\mathbf{A}}(W)$ и $Q(F,W)$, и что спектральная плотность, обеспечивающая супремум среднеквадратичного коэффициента усиления, принадлежит множеству $\mathbb{S}(\omega) \in \left\{\sigma(I_m - q\Lambda(\omega))^{-1} \mid \sigma > 0,\ q \in [0; \|F\|_\infty^{-2})\right\}$, $\Lambda(\omega) = \widehat{F}^*(\omega)\widehat{F}(\omega)$.

Равенство $A(q) = \overline{\mathbf{A}}(W)$ верно для любой $S(q,\Lambda(\omega)) = \mathbb{S}(\omega) = \widehat{G}_0^*(\omega)\widehat{G}_0(\omega)$, так как в этом случае $m\Phi(q) = \|G_0\|_2^2$ и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
A(q) &= \frac{m}{2}\left(\ln\left(\Phi(q) + \frac{1}{m}|\mathcal{M}|^2\right) - \Psi(q)\right) \\
&= \frac{m}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{2\pi m}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{tr} S(q,\Lambda(\omega))d\omega + \frac{1}{m}|\mathcal{M}|^2\right)\right. \\
&- \left.\frac{1}{2\pi m}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\det S(q,\Lambda(\omega))d\omega\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi}\left(\ln\det S(q,\Lambda(\omega)) - m\ln\left(\frac{\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}{m}\right)\right)d\omega \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\det\frac{m\widehat{G}_0^*(\omega)\widehat{G}_0(\omega)}{\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}d\omega = \overline{\mathbf{A}}(W).
\end{aligned}
$$

Теперь рассмотрим функцию $N^2(q)$:

$$
N^2(q) = \frac{\Phi(q) - 1 + \frac{q}{m}|\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{q\Phi(q) + \frac{q}{m}|\mathcal{M}|^2} = \frac{\frac{1}{q}\|G_0\|_2^2 - \frac{m}{q} + |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2},
$$

что совпадает с $Q^2(F,W)$ при $q\|FG_0\|_2^2 = \|G_0\|_2^2 - m$. Это условие представимо в виде

$$
\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{tr}\left(\Lambda(\omega)S(q,\Lambda(\omega)) - \frac{1}{q}S(q,\Lambda(\omega)) + \frac{1}{q}I_m\right)d\omega = 0.
$$

Если $S(q,\Lambda(\omega)) = (I_m - q\Lambda(\omega))^{-1}$, то

$$
\Lambda(\omega)S(q,\Lambda(\omega)) = \frac{1}{q}S(q,\Lambda(\omega)) - \frac{1}{q}I_m.
$$

Таким образом, для фильтров со спектральной плотностью вида

(6) $$S(q, \Lambda(\omega)) = (I_m - q\Lambda(\omega))^{-1}$$

выполняется равенство $N(q) = Q(F, W)$.

Покажем, что супремум в выражении (1) достигается именно на спектральных плотностях $\mathbb{S}(\omega) = S(q, \Lambda(\omega))$. Учитывая, что при умножении векторов w_k последовательности на произвольное ненулевое число α ($w_k' = \alpha w_k$) уровень средней анизотропии и значение среднеквадратичного коэффициента усиления не изменятся:

$$\overline{\mathbf{A}}(W') = \overline{\mathbf{A}}(\alpha W) = \overline{\mathbf{A}}(W), \quad Q(F, W') = Q(F, \alpha W) = Q(F, W),$$

причем нормы соответствующих фильтров и матожиданий связаны соотношениями

$$\|G_0'\|_2^2 = \|\alpha G_0\|_2^2 = \alpha^2 \|G_0\|_2^2, \quad |\mathcal{M}'|^2 = |\alpha\mathcal{M}|^2 = \alpha^2 |\mathcal{M}|^2,$$

то без потери общности можно положить

$$\|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2 = 1.$$

При этом формулы для средней анизотропии и среднеквадратичного коэффициента усиления можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{A}}(W) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\det\left(mS(q, \Lambda(\omega)\right) d\omega, \\
Q^2(F, W) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr}\left(\Lambda(\omega) S(q, \Lambda(\omega)\right) d\omega + |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2,
\end{aligned}$$

а задача вычисления анизотропийной нормы сводится к задаче нахождения супремума $Q(F, W)$ при двух ограничениях:

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = \sup_W \left\{ Q(F, W) \mid \overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a, \ \|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2 = 1 \right\}.$$

Для приведенной задачи оптимизации с ограничениями функция

Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned}
L(S) &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{tr}(\Lambda(\omega)S(q,\Lambda(\omega)))d\omega \\
&+ \lambda\left(-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\det(mS(q,\Lambda(\omega)))d\omega - a\right) \\
&+ \rho\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{tr}(S(q,\Lambda(\omega)))d\omega + |\mathcal{M}|^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

Целевая функция L выпукла по S, а в силу выпуклости функции $\ln\det(\cdot)$ ограничения также выпуклые, значит, можно применить теорему Каруша-Куна-Таккера, которая даст решение

$$S(q,\Lambda(\omega)) = \sigma(I_m - q\Lambda(\omega))^{-1},$$

где

$$\sigma \doteq \frac{\lambda}{2\rho}, \quad q \doteq \frac{1}{\rho} \in [0; \|F\|_\infty^{-2}).$$

Коэффициенты λ и ρ находятся из уравнений

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = a \quad \text{и} \quad \|G_0\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2 = 1.$$

Таким образом, поставленная задача решена, и формула для нахождения анизотропийной нормы в частотной области имеет вид

(7)

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a \triangleq \sup_W \left\{Q(F,W)|\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a\right\} = \sup_{q\in[0;\|F\|_\infty^{-2})} \{N(q)|A(q) \leqslant a\}.$$

Полученные результаты собраны в виде теоремы:

Теорема 2. *Для асимптотически устойчивой системы F, на вход которой поступает внешнее входное возмущение в виде последовательности гауссовских случайных векторов с ненулевым математическим ожиданием и ограничением на уровень средней анизотропии, анизотропийная норма в частотной области вычисляется по формуле*

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = \sup_{q\in[0;\|F\|_\infty^{-2})} \{N(q)|A(q) \leqslant a\},$$

где функции $A(q)$ и $N(q)$ определены через (4), (5).

5. Особенности вычисления анизотропийной нормы в частотной области

Для нахождения значения q_*, на котором достигается супремум среднеквадратичного коэффициента усиления, в случае нулевого матожидания можно было воспользоваться численным методом, использующем свойства выпуклости и монотонности функций $A(q)$ и $N(q)$ (например, методом Ньютона). При этом формула для анизотропийной нормы принимает вид

$$|||F|||_a = N(A^{-1}(a)), \quad A^{-1}(a) = \{q : \ A(q) = a\},$$

причем последнее множество в силу монотонности функции $A(q)$ состоит из одного элемента, и решение задачи единственно. Покажем, что при ненулевом матожидании $\mathcal{M} \neq 0$ функция $A(q)$ теряет свойство монотонности.

Поскольку

$$\frac{\partial S(q,\omega)}{\partial q} = \frac{1}{q}S^2(q,\omega) - \frac{1}{q}S(q,\omega),$$

то

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(q) &\doteq \frac{d\Phi(q)}{dq} = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr}\left(\frac{1}{q}S^2(q,\omega) - \frac{1}{q}S(q,\omega)\right) d\omega, \\ \dot{\Psi}(q) &\doteq \frac{d\Psi(q)}{dq} = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr}\left(\frac{1}{q}S(q,\omega) - \frac{1}{q}I_m\right) d\omega \end{aligned}$$

и

$$\dot{A}(q) \doteq \frac{dA(q)}{dq} = \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{\Phi}(q)}{\Phi(q) + \frac{1}{m}|\mathcal{M}|^2} - \dot{\Psi}(q)\right).$$

Функция $A(q)$ стремится к бесконечности при $q \to \|F\|_\infty^{-2} - 0$. Покажем, что при $q \to 0+0$ функция $A(q)$ убывает. В силу

$$\begin{aligned} \lim_{q\to 0+0} S(q) &= \lim_{q\to 0+0}(I_m - q\Lambda(\omega))^{-1} \simeq I_m + q\Lambda(\omega), \\ \lim_{q\to 0+0} S^2(q) &= \lim_{q\to 0+0}(I_m - q\Lambda(\omega))^{-2} \simeq I_m + 2q\Lambda(\omega) \end{aligned}$$

имеем

$$\lim_{q\to 0+0}\dot{\Phi}(q) = \lim_{q\to 0+0}\frac{1}{2\pi m}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{tr}\left(\frac{1}{q}S^2(q,\omega) - \frac{1}{q}S(q,\omega)\right)d\omega$$

$$\simeq \frac{1}{2\pi m}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{tr}\left(\frac{1}{q}I_m + 2\Lambda(\omega) - \frac{1}{q}I_m - \Lambda(\omega)\right)d\omega = \frac{1}{m}\|F\|_2^2,$$

$$\lim_{q\to 0+0}\dot{\Psi}(q) = \lim_{q\to 0+0}\frac{1}{2\pi m}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{tr}\left(\frac{1}{q}S(q,\omega) - \frac{1}{q}I_m\right)d\omega$$

$$\simeq \frac{1}{2\pi m}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{tr}\left(\frac{1}{q}I_m + \Lambda(\omega) - \frac{1}{q}I_m\right)d\omega = \frac{1}{m}\|F\|_2^2,$$

и, следовательно,

$$\lim_{q\to 0+0}\dot{A}(q) = \lim_{q\to 0+0}\frac{m}{2}\left(\frac{\dot{\Phi}(q)}{\Phi(q) + \frac{1}{m}|\mathcal{M}|^2} - \dot{\Psi}(q)\right) \simeq \frac{\alpha - 1}{m}\|F\|_2^2\,,$$

где

$$\alpha = \left(1 + \frac{1}{m}|\mathcal{M}|^2\right)^{-1} < 1 \quad \forall\, \mathcal{M} \neq 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{q\to 0+0}\dot{A}(q) < 0, \qquad \lim_{q\to \|F\|_\infty^{-2}-0}\dot{A}(q) > 0,$$

что означает, что функция $A(q)$ является немонотонной. В связи с этим уравнение $A(q) = a$ будет иметь несколько решений.

Если бы функция $N(q)$ была неубывающей по q, то формула (7) приняла бы вид

$$\|F\|_a = N(q_{max}), \quad q_{max} = \max\{\, q \in [0; \|F\|_\infty^{-2}) \;:\; A(q) = a\,\}.$$

Тем не менее, функция $N(q)$ не обязательно является монотонной. Приведем условие ее немонотонности. Поскольку

$$\frac{dN^2(q)}{dq} = 2N(q)\frac{dN(q)}{dq} \quad \text{и} \quad N(q) \geqslant 0,$$

то

$$\frac{dN(q)}{dq} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN^2(q)}{dq} \leqslant 0.$$

Для функции $N^2(q)$ справедливо, что

$$\lim_{q\to 0+0} \frac{dN^2(q)}{dq} = \frac{\|F\|_4^4|\mathcal{M}|^2 - \|F\|_2^4 + m\|F\|_4^4 - \|F\|_2^2|\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{(m+|\mathcal{M}|^2)^2}\,,$$

следовательно,

$$\lim_{q\to 0+0} \frac{dN(q)}{dq} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|F\|_4^4 \leqslant \|F\|_2^2 \frac{\|F\|_2^2 + |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{m+|\mathcal{M}|^2}\,.$$

Ввиду того, что для системы F имеет место неравенство [6]

$$m\|F\|_4^4 \geqslant \|F\|_2^4,$$

необходимое условие убывания функции $N(q)$ в окрестности нуля примет вид

$$\frac{|\mathcal{F}\mathcal{M}|^2}{|\mathcal{M}|^2} \geqslant \frac{\|F\|_2^2}{m}\,.$$

В заключении приведем пример, демонстрирующий графический метод вычисления анизотропийной нормы системы в частотной области.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$F \sim \begin{cases} x_{k+1} = ax_k + w_k, \\ z_k = x_k, \end{cases}$$

где $|a| < 1$, а $\{w_k\}$ – случайное воздействие с ненулевым средним μ и средней анизотропией $\mathbf{a}$. Передаточная функция системы равна

$$F(z) = \frac{1}{z-\alpha}, \quad z \in \mathbb{C},$$

а $\mathcal{H}_\infty$-норма системы равна $\|F\|_\infty = 1/|\alpha|$. Согласно (6), спектральная плотность формирующего фильтра имеет вид

$$S(q,\omega) = 1 + \frac{q}{1+\alpha^2 - q - 2\alpha\cos\omega}, \quad \omega \in [-\pi;\pi), \quad q \in [0;\alpha^2).$$

Подставляя в (2) и (3) найденную выше $S(q,\omega)$, получим

$$\begin{aligned} \Phi(q) &= 1 + \frac{q}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(1+\alpha^2 - q - 2\alpha\cos\omega\right)^{-1} d\omega, \\ \Psi(q) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\frac{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\omega}{1+\alpha^2 - q - 2\alpha\cos\omega}\right) d\omega. \end{aligned}$$

В рамках примера ограничимся вариантом $|\alpha| < 0.5$, при котором для любого $q \in [0; \alpha^2)$ выполнено $(1 + \alpha^2 - q) - (2\alpha)^2 > 0$, а функции $\Phi(q)$ и $\Psi(q)$ равны

$$\begin{aligned}\Phi(q) &= 1 + \frac{q}{\sqrt{q^2 - 2(1-\alpha^2)q + (1-\alpha^2)^2}},\\ \Psi(q) &= \ln 2 - \ln\left(1 + a^2 - q + \sqrt{q^2 - 2(1+a^2)q + (1-a^2)^2}\right),\end{aligned}$$

где $q \in [0; a^2)$. На рис.1 приведены графики зависимостей $A(q)$, $N(q)$ и $N(A)$ для различных матожиданий.

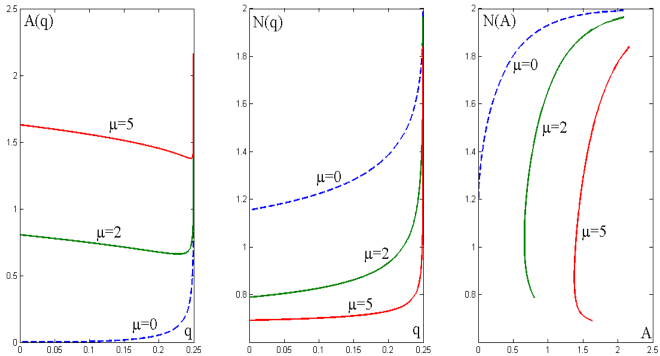

Рис.1. Графики функций $A(q)$ (слева), $N(q)$ (по центру) и $N(A)$ (справа).

Из графиков видно, что при ненулевых математических ожиданиях уравнение $A(q) = a$ может иметь неединственное решение, и существуют два различных формирующих фильтра с одинаковым уровнем средней анизотропии. Однако согласно формуле (7) лишь один из них будет задавать анизотропийную норму. Этому фильтру будет соответствовать большее значение функции $N(q)$.

В данном примере в силу небольшой размерности исходной системы получены довольно простые уравнения, позволяющие практически напрямую находить анизотропийную норму системы. Однако с увеличением размерности аналитическое вычисление анизотропийной нормы представляет большую сложность. В этом случае уместно использовать численный метод для нахождения решения задачи (7). ●

6. Заключение

В данной работе введены понятия средней анизотропии последовательности с ненулевым математическим ожиданием и анизотропийной нормы системы, на вход которой поступает данная последовательность. Приведены формулы для вычисления средней анизотропии последовательности и анизотропийной нормы в частотной области, и показано отличие от способа вычисления анизотропийной нормы в частотной области при нулевом математическом ожидании. Приведен пример вычисления средней анизотропии и анизотропийной нормы.

Литература

1. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В., Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем, ДАН, 1995, №3, с. 583–585.
2. P. Diamond, I. Vladimirov, A. Kurdjukov, and A. Semyonov, Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems, International Journal of Control, vol. 74 (1), pp. 28–42, 2001.
3. M.M. Tchaikovsky, A.P. Kurdjukov, and V.N. Timin, Strict anisotropic norm bounded real lemma in terms of inequalities, in Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, Italy, 2011, pp. 2332-2337.
4. Кустов А.Ю., Курдюков А.П., Начинкина Г.Н., Стохастическая теория анизотропийного робастного управления, Москва, ИПУ РАН, 2012.
5. A. Kurdyukov, A. Kustov, M. Tchaikovsky, and M. Karny, The concept of mean anisotropy of signals with nonzero

mean, in Proc. 2013 International Conference on Process Control, Strbske Pleso, Slovakia, pp. 37–41.
6. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В., Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем, Автоматика и Телемеханика, № 3, с. 78–87, 1999.

ARTICLE TITLE

Arkadiy Kustov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (arkadiykustov@gmail.com).

Abstract: In the created in the 90th anisotropy-based control theory the sequence of Gaussian random vectors with zero mean and certain mean anisotropy level was accepted as input perturbations acting on a linear system. This paper introduce the concepts of mean anisotropy of the sequence with nonzero mean and anisotropic norm of the system with given input. The problem of anisotropy-based analysis in frequency domain is considered and the difference between classical formulas for computing mean anisotropy and anisotropic norm and new formulas is shown.

Keywords: Anisotropy-based control theory, mean anisotropy, anisotropic norm, Gaussian random vectors, frequency domain.