

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕАЛИЗАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

Рогоза А. А.²

*(Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана (Калужский филиал), Калуга)*

В статье рассматривается проблема реализации для динамических интервальных систем в пространстве состояний. Предлагаемый подход основан на спектральном представлении сигналов и непрерывных ограниченных операторов в конечномерном виде – разложении по некоторому базису конечномерного пространства. Данный подход допускает простую композицию систем, что особенно актуально для сложных многоконтурных динамических систем.

Ключевые слова: проекционные методы, ограниченный непрерывный оператор, композиция систем, интервальная неопределенность.

Введение

Модели, заданные в пространстве состояний, играют чрезвычайно важную роль в различных областях. Модели такого рода являются естественной формой представления для динамических систем теории управления, в особенности теории автоматического управления. Однако метод пространства состояний оказывается применимым и во многих других случаях. Предме-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Калужской области (грант № 14-41-03071).

² Александр Анатольевич Рогоза, ассистент
(aemaeth_eternity@mail.ru).

том рассмотрения в данной работе является проблема построения модели в пространстве состояний на основе данных о поведении вход-выход линейной стационарной динамической системы. В теории систем эта проблема известна как задача реализации.

Для класса линейных стационарных динамических систем задача построения конечномерной реализации успешно решается в рамках алгебраического подхода к проблеме. Однако при исследовании систем, подверженных различным искажениям, а также систем, функционирующих в условиях неопределенности, приходится привлекать дополнительный математический аппарат. Чаще всего этим аппаратом являются методы математической статистики. В последнее время для анализа систем с неопределенностями и неоднозначностями в данных все чаще используются новые подходы, например, такие, как теория нечетких множеств и интервальный анализ.

Стандартным методологическим приемом исследования объектов, функционирующих в условиях неопределенности, является рассмотрение семейства объектов, которое определяется принадлежностью параметров этого объекта некоторым множествам. В случае, когда эти множества — интервалы, мы будем иметь дело с интервальной неопределенностью.

В настоящей работе предлагается один из возможных подходов к решению задачи реализации для динамических систем с интервальными параметрами, основанный на представлении сигналов в виде разложений по заданному ортонормированному базису некоторого банахова пространства B и описании системы с помощью матричных операторов. Данный подход позволяет рассматривать динамическую систему с алгебраической точки зрения.

2. Проекционные методы в задаче реализации интервальных динамических систем

2.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим систему управления, математическая модель которой описывается нормальной системой дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + \sum_{l=1}^m b_{il} y_l(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Предположим, что коэффициенты исходной модели (1) являются постоянными, и представлены в виде

$$(2) \quad a_{ij}^k = \bar{a}_{ij} + \Delta a_{ij}^k, \quad b_{il}^r = \bar{b}_{il} + \Delta b_{il}^r, \quad k = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, N},$$

$\bar{a}_{ij}$ и $\bar{b}_{il}$ — номинальные значения коэффициентов, а Δa_{ij}^k и Δb_{il}^r — возможные отклонения от этих значений или параметрические возмущения.

Перепишем (1) в векторно-матричной форме, вводя следующие обозначения:

$$(3) \quad \mathbf{X}(t) = [x_1(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T; \quad \mathbf{Y}(t) = [y_1(t) \quad \dots \quad y_m(t)]^T$$

для столбцов выходных и входных координат соответственно:

$$(4) \quad \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_X^k \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_Y^r \mathbf{Y}(t).$$

где $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, а матрицы $\mathbf{A}_X^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_Y^r \in \mathbb{R}^{n \times m}$ зависят от параметров $\Delta a_{ij}^k, \Delta b_{il}^r \in \Delta$, $k, r = \overline{1, N}$, которые принадлежат заданному множеству $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ (множеству неопределенности). Матрицы $\mathbf{A}_X^k$ и $\mathbf{B}_Y^r$ с учетом (2), представимы в виде суммы вида:

$$(5) \quad \mathbf{A}_X^k = \bar{\mathbf{A}}_X + \Delta \mathbf{A}_X^k;$$

$$(6) \quad \mathbf{B}_Y^r = \bar{\mathbf{B}}_Y + \Delta \mathbf{B}_Y^r.$$

Интегрируя уравнение (4) при заданных начальных условиях $x_i(0) = x_i$, $i = \overline{1, n}$, переходим к векторно-матричному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}(t) = & \int_0^t (\bar{\mathbf{A}}_X + \Delta \mathbf{A}_X^k) \mathbf{X}(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t (\bar{\mathbf{B}}_Y + \Delta \mathbf{B}_Y^r) \mathbf{Y}(\tau) d\tau + \mathbf{X}_0, \quad k, r = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{X}_0 = [x_{10} \quad \dots \quad x_{n0}]^T$ — столбец начальных условий.

Пусть B — некоторое банахово пространство функций с базисом, заданных на отрезке $[0, T]$, а

$$(8) \quad \Phi(t) = [\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_{p-1}]^T$$

— столбец из p базисных функций в пространстве B . Функция

$$(9) \quad x(t) = \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau$$

также лежит в пространстве B . Если функция $y(t) \in B$, то ее можно аппроксимировать с помощью разложения

$$(10) \quad y(t) \approx y_p(t) = \sum_{i=0}^{p-1} c_i^y \varphi_i(t) = \Phi^T(t) \mathbf{C}^y,$$

где $\mathbf{C}^y = [c_0^y \quad c_1^y \quad \dots \quad c_{p-1}^y]^T$ — столбец из коэффициентов разложения. Для интегрирования функций по разложению (10) требуется находить разложения функций (9). Поскольку

$$(11) \quad x_p(t) = \int_0^t y_p(\tau) d\tau = \int_0^T 1(t-\tau) y_p(\tau) d\tau,$$

где $K(t, \tau) = 1(t-\tau)$ — функция Хэвисайда:

$$(12) \quad K(t, \tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau; \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Интегральная форма описания (7) позволяет воспользоваться аппаратом матричного представления интегральных ограниченных операторов в ортогональных базисах (см., например, [1, 5]), то есть ввести проекционную форму описания системы относительно ортогонального базиса $\Phi(t)$. Для этого надо заменить в уравнении (7) непрерывные вектор-функции на столбцы из коэффициентов их разложений, а операторы, действующие в пространстве непрерывных вектор-функций, на соответствующие им матричные операторы. В этом случае для выражения (11) справедливы равенства

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \sum_{i=0}^{p-1} c_i^x \varphi_i(t) = \Phi^T(t) C^x; \\ y_p(t) &= \sum_{i=0}^{p-1} c_i^y \varphi_i(t) = \Phi^T(t) C^y; \\ K(t, \tau) &= \Phi^T(t) A_{\Pi} \Phi(\tau), \end{aligned} \quad (13)$$

где A_{Π} — матрица размера $p \times p$, элементы которой

$$a_{ij} = \int_0^T \int_0^t K(t, \tau) \varphi_i(t) \varphi_j(\tau) dt d\tau. \quad (14)$$

Тогда

$$\Phi^T(t) C^x = \int_0^T \Phi^T(t) A_{\Pi} \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) C^y d\tau; \quad (15)$$

$$C^x = A_{\Pi} \left(\int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau \right) C^y, \quad (16)$$

где

$$\int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau = I_{p \times p}; \quad (17)$$

$I_{p \times p}$ — единичная матрица, поэтому

$$C^x = A_{\Pi} C^y. \quad (18)$$

Переписывая векторно-матричное уравнение (7) в развернутой форме

$$\begin{aligned}
 (19) \quad x_i(t) = & \sum_{j=1}^n \int_0^t (\bar{a}_{ij} + \Delta a_{ij}^k) x_j(\tau) d\tau + \\
 & + \sum_{l=1}^m \int_0^t (\bar{b}_{il} + \Delta b_{il}^r) y_l(\tau) d\tau + x_i(0), i = \overline{1, n}
 \end{aligned}$$

и заменяя непрерывные функции на столбцы из коэффициентов их разложений по базису $\Phi(t)$, имеем

$$\begin{aligned}
 (20) \quad (C^{x_i})^T \Phi(t) = & \sum_{j=1}^n \int_0^t (\bar{a}_{ij} + \Delta a_{ij}^k) (C^{x_j})^T \Phi(\tau) d\tau + \\
 & + \sum_{l=1}^m \int_0^t (\bar{b}_{il} + \Delta b_{il}^r) (C^{y_l})^T \Phi(\tau) d\tau + (C^{x_i^0})^T \Phi(t), i = \overline{1, n},
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 (21) \quad (C^{x_i})^T \Phi(t) = & \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij} + \Delta a_{ij}^k) (C^{x_j})^T \int_0^t \Phi(\tau) d\tau + \\
 & + \sum_{l=1}^m (\bar{b}_{il} + \Delta b_{il}^r) (C^{y_l})^T \int_0^t \Phi(\tau) d\tau + (C^{x_i^0})^T \Phi(t), i = \overline{1, n}.
 \end{aligned}$$

С учетом (16) имеем

$$(22) \quad \int_0^t \Phi(\tau) d\tau = A_{\Pi} \Phi(t),$$

где A_{Π} — матричный оператор интегрирования в ортогональном базисе или транспонированная матрица оператора интегрирования в этом базисе, последняя система уравнений примет вид

$$\begin{aligned}
 (23) \quad \Phi^T(t) C^{x_i} = & \Phi^T(t) A_{\Pi} \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij} + \Delta a_{ij}^k) C^{x_j} + \\
 & + \Phi^T(t) A_{\Pi} \sum_{l=1}^m (\bar{b}_{il} + \Delta b_{il}^r) C^{y_l} + \Phi^T(t) C^{x_i^0}, i = \overline{1, n}.
 \end{aligned}$$

В силу линейной независимости базисных функций, последняя система уравнений равносильна системе уравнений

$$(24) \quad \begin{cases} C^{x_1} = A_{\Pi} \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{1j} + \Delta a_{1j}^k) C^{x_j} + A_{\Pi} \sum_{l=1}^m (\bar{b}_{1l} + \Delta b_{1l}^r) C^{y_l} + C^{x_1^0}, \\ C^{x_2} = A_{\Pi} \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{2j} + \Delta a_{2j}^k) C^{x_j} + A_{\Pi} \sum_{l=1}^m (\bar{b}_{2l} + \Delta b_{2l}^r) C^{y_l} + C^{x_2^0}, \\ \vdots \\ C^{x_n} = A_{\Pi} \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{nj} + \Delta a_{nj}^k) C^{x_j} + A_{\Pi} \sum_{l=1}^m (\bar{b}_{nl} + \Delta b_{nl}^r) C^{y_l} + C^{x_n^0}, \end{cases}$$

$k, r = \overline{1, N}.$

Чтобы переписать (24) в векторно-матричной форме, введем в рассмотрение следующие блочные матрицы: вектор-столбец $C_{pn \times 1}^X$ размером $(p \cdot n) \times 1$, элементами которого являются вектор-столбцы из коэффициентов разложений выходных координат; вектор-столбец $C_{pn \times 1}^{X_0}$ размером $(p \cdot n) \times 1$, элементами которого являются вектор-столбцы из коэффициентов разложений начальных условий; вектор-столбец $C_{pm \times 1}^Y$ размером $(p \cdot m) \times 1$, элементами которого являются вектор-столбцы из коэффициентов разложений входных координат.

С учетом введенных обозначений, система уравнений (24) записывается в виде одного векторно-матричного уравнения

$$(25) \quad C_{pn \times 1}^X = \left[A_{\Pi} \otimes (A_X^k)_{n \times n} \right] C_{pn \times 1}^X + \left[A_{\Pi} \otimes (B_Y^r)_{n \times m} \right] C_{pm \times 1}^Y + C_{pn \times 1}^{X_0}.$$

Уравнение (25) представляет собой спектральный аналог уравнения (7). Перепишем (25) в виде

$$(26) \quad \begin{aligned} & \left(I_{p \times p} \otimes I_{n \times n} - A_{\Pi} \otimes (A_X^k)_{n \times n} \right) C_{pn \times 1}^X = \\ & = \left[A_{\Pi} \otimes (B_Y^r)_{n \times m} \right] C_{pm \times 1}^Y + C_{pn \times 1}^{X_0}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$(27) \quad \left(\mathbf{A}_{X_k} \right)_{pn \times pn} = \mathbf{I}_{p \times p} \otimes \mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{A}_X^k \right)_{n \times n} ;$$

$$(28) \quad \left(\mathbf{B}_{Y_r} \right)_{pn \times pm} = \mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{B}_Y^r \right)_{n \times m} ,$$

где, с учетом (10.22),

$$(29) \quad \begin{aligned} \left(\mathbf{A}_{X_k} \right)_{pn \times pn} &= \mathbf{I}_{p \times p} \otimes \mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{A}_X^k \right)_{n \times n} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{A}_u \left(\bar{a}_{11} + \Delta a_{11}^k \right) & \cdots & -\mathbf{A}_u \left(\bar{a}_{1n} + \Delta a_{1n}^k \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{A}_u \left(\bar{a}_{n1} + \Delta a_{n1}^k \right) & \cdots & \mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{A}_u \left(\bar{a}_{nn} + \Delta a_{nn}^k \right) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{A}_u \bar{a}_{11} & \cdots & -\mathbf{A}_u \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{A}_u \bar{a}_{n1} & \cdots & \mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{A}_u \bar{a}_{nn} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -\Delta a_{11}^k \mathbf{A}_u & \cdots & -\Delta a_{1n}^k \mathbf{A}_u \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Delta a_{n1}^k \mathbf{A}_u & \cdots & -\Delta a_{nn}^k \mathbf{A}_u \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

$$(30) \quad \begin{aligned} \left(\mathbf{B}_{Y_r} \right)_{pn \times pm} &= \mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{B}_Y^r \right)_{n \times m} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_u \left(\bar{b}_{11} + \Delta b_{11}^r \right) & \cdots & \mathbf{A}_u \left(\bar{b}_{1n} + \Delta b_{1n}^r \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_u \left(\bar{b}_{n1} + \Delta b_{n1}^r \right) & \cdots & \mathbf{A}_u \left(\bar{b}_{nm} + \Delta b_{nm}^r \right) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_u \bar{b}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_u \bar{b}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_u \bar{b}_{n1} & \cdots & \mathbf{A}_u \bar{b}_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta b_{11}^r \mathbf{A}_u & \cdots & \Delta b_{1m}^r \mathbf{A}_u \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta b_{n1}^r \mathbf{A}_u & \cdots & \Delta b_{nm}^r \mathbf{A}_u \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

$$(31) \quad \mathbf{C}_{pn \times 1}^X = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{x_1} & \mathbf{C}^{x_2} & \cdots & \mathbf{C}^{x_n} \end{bmatrix}^T ;$$

$$(32) \quad \mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{x_1^0} & \mathbf{C}^{x_2^0} & \cdots & \mathbf{C}^{x_n^0} \end{bmatrix}^T ;$$

$$(33) \quad \mathbf{C}_{pk \times 1}^Y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{y_1} & \mathbf{C}^{y_2} & \dots & \mathbf{C}^{y_m} \end{bmatrix}^T;$$

$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ обозначает кронекерово произведение матриц $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Учитывая обратимость матрицы (10.43) при достаточно больших p , что следует из приведенной в [1, 3] теоремы о единственности решения уравнения вида (10.46) и теорем об условиях сходимости и вычислительной устойчивости проекционных аппроксимаций систем, описываемых линейными интегральными уравнениями 2-го рода, доказанных в [3, 4], имеем

$$(34) \quad \mathbf{C}_{pn \times 1}^X = \mathbf{A}_{pn \times pm} \mathbf{C}_{pm \times 1}^Y + \mathbf{A}_{pn \times pn}^0 \mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_0},$$

где

$$(35) \quad \mathbf{A}_{pn \times pm} = \left(\mathbf{A}_{X_k} \right)_{pn \times pn}^{-1} \left(\mathbf{B}_{Y_r} \right)_{pn \times pm};$$

$$(36) \quad \mathbf{A}_{pn \times pn}^0 = \left(\mathbf{A}_{X_k} \right)_{pn \times pn}^{-1}.$$

Матрица $\mathbf{A}_{pn \times pm}$ размером $(p \cdot n) \times (p \cdot m)$ представляет собой проекционную характеристику системы с учетом разброса параметров от их усредненного значения (10.19). Матрица $\mathbf{A}_{pn \times pn}^0$ размером $(p \cdot n) \times (p \cdot n)$ проекционная характеристика начального состояния системы.

2.2. ОБРАЩЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Выражение (35) содержит обратную матрицу с интервальными параметрами. Рассмотрим вопросы обращения интервальных матриц.

Выберем матрицу $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$, $\mathbf{S}$ некоторая интервальная матрица, для которой справедливо: $\{\mathbf{s}^{-1} | \mathbf{s} \in \mathbf{S}\}$, и вычислим матрицу

$\mathbf{T}$ – приближение к обратной матрице $\mathbf{s}^{-1}$. Определим $\mathbf{P}$ равенством: $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{ST}$; $\mathbf{I}$ – единичная матрица соответствующей размерности. Предположим, что $\|\mathbf{P}\| = \|\mathbf{I} - \mathbf{ST}\| < 1$. Тогда для любой вещественной матрицы $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ справедливо следующее представление:

$$(37) \quad (\mathbf{I} - \mathbf{p})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{p} + \mathbf{p}^2 + \dots + \mathbf{p}^v + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \mathbf{p}^v.$$

Условие сходимости такого ряда можно найти, исследуя сходимость ряда из собственных значений матрицы $\mathbf{p}$:

$$(38) \quad (1 + \lambda_j)^{-1} = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \lambda_j^v = 1 - \lambda_j + (\lambda_j)^2 - \dots$$

Последний ряд является полусходящимся. Условие его сходимости

$$(39) \quad d_{\lambda_j} = \frac{1}{2v_0 + 1},$$

где d_{λ_j} – ширина собственных значений интервальной матрицы, v_0 – номер последнего удерживаемого члена ряда (38).

Предположим, что в выражении (35) $\left\| (\mathbf{A}_{X_k})_{pn \times pn}^{-1} \right\| < 1$, тогда, по аналогии с (37), имеем:

$$(40) \quad \begin{aligned} & \left(\mathbf{A}_{X_k} \right)_{pn \times pn}^{-1} = \left(\mathbf{I}_{p \times p} \otimes \mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{A}_X^k \right)_{n \times n} \right)^{-1} = \\ & = \mathbf{I}_{p \times p} \otimes \mathbf{I}_{n \times n} + \mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{A}_X^k \right)_{n \times n} + \left(\mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{A}_X^k \right)_{n \times n} \right)^2 + \dots + \\ & + \left(\mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{A}_X^k \right)_{n \times n} \right)^v + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{A}_X^k \right)_{n \times n} \right)^v. \end{aligned}$$

Обозначим

$$(41) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}_{pn \times pn}^m &= \mathbf{I}_{p \times p} \otimes \mathbf{I}_{n \times n} + \mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{A}_X^k \right)_{n \times n} + \left(\mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{A}_X^k \right)_{n \times n} \right)^2 + \dots + \\ &+ \left(\mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{A}_X^k \right)_{n \times n} \right)^m, \end{aligned}$$

тогда имеет место неравенство

$$(42) \quad \left\| \left(\mathbf{I}_{p \times p} \otimes \mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A}_u \otimes \left(\mathbf{A}_X^k \right)_{n \times n} \right)^{-1} - \mathbf{R}_{pn \times pn}^m \right\| \leq$$

$$\leq \frac{\left\| \mathbf{A}_n \otimes (\mathbf{A}_X^{m+1})_{n \times n} \right\|}{\left(1 - \left\| \mathbf{A}_n \otimes (\mathbf{A}_X)_{n \times n} \right\| \right)} \leq \frac{\left\| \mathbf{A}_n \otimes (\mathbf{A}_X)_{n \times n} \right\|^{m+1}}{\left(1 - \left\| \mathbf{A}_n \otimes (\mathbf{A}_X)_{n \times n} \right\| \right)} = \varepsilon_{pn \times pn}^m,$$

где $\mathbf{A}_X^k \in \mathbf{A}_X$. Пусть $\mathbf{E}_m \in \mathbf{I}(\mathbb{R}^{pn \times pn})$ – матрица, все элементы которой равны $\left[-\varepsilon_{pn \times pn}^m, +\varepsilon_{pn \times pn}^m \right]$. Определим интервальную матрицу $\mathbf{R}_m$ соотношением

$$(43) \quad \mathbf{R}_m = \left(\dots \left((\mathbf{A}_X + \mathbf{I}) \mathbf{A}_X + \mathbf{I} \right) \mathbf{A}_X + \dots \right) + \mathbf{I},$$

т.е. выполняется m сложений. Тогда обратная матрица $\left(\mathbf{A}_{X_k} \right)^{-1} \in (\mathbf{R}_m + \mathbf{I}_m)$ для любой матрицы $\mathbf{A}_X^k \in \mathbf{A}_X$.

Пусть теперь $\mathbf{A}_{X_k} \in \mathbb{R}^{pn \times pn}$ – невырожденная вещественная матрица, а матрица $\mathbf{T}^{(0)} \in \mathbf{I}(\mathbb{R}^{pn \times pn})$ такова, что $\left(\mathbf{A}_{X_k} \right)^{-1} \in \mathbf{T}^{(0)}$. Рассмотрим предложенный Алефельдом и Херцбергером итеративный процесс получения более точных интервальных приближений к $\left(\mathbf{A}_{X_k} \right)^{-1}$:

$$(44) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{(l+1)} = & m \left(\mathbf{T}^{(l)} \right) + m \left(\mathbf{T}^{(l)} \right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{X_k} m \left(\mathbf{T}^{(l)} \right) \right) + \dots + \\ & + m \left(\mathbf{T}^{(l)} \right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{X_k} m \left(\mathbf{T}^{(l)} \right) \right)^{k-2} + \left(\mathbf{T}^{(l)} \right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{X_k} m \left(\mathbf{T}^{(l)} \right) \right)^{k-1}, \\ & k > 1. \end{aligned}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.1 [6]:

1. Каждый член последовательности $\left(\mathbf{T}^{(l)} \right)_{l=0}^{\infty}$ содержит

$$\left(\mathbf{A}_{X_k} \right)^{-1}.$$

2. Последовательность $\left(\mathbf{T}^{(l)} \right)_{l=0}^{\infty}$ сходится к $\left(\mathbf{A}_{X_k} \right)^{-1}$ тогда и только тогда, когда спектральный радиус

$r\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}_{X_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right)$ матрицы $\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}_{X_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right)$ меньше единицы:

$$(45) \quad r\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}_{X_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right)<1.$$

3. Если $\|\cdot\|$ – монотонная мультипликативная матричная норма¹, то для последовательности матриц $\left\{\varpi\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right\}_{l=0}^{\infty}$ выполняется оценка

$$(46) \quad \left\|\varpi\left(\mathbf{T}^{(l+1)}\right)\right\| \leq c\left\|\varpi\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right\|^k, c=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left\|\mathbf{A}_{X_k}\right\|^{k-1},$$

где $\varpi(\mathbf{A})$ – матрица с элементами $\varpi\left(\mathbf{A}_{ij}\right)$.

Пусть опять что $\left(\mathbf{A}_{X_k}\right)^{-1} \in \mathbf{T}^{(0)}$. Определим последовательность $\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)_{l=0}^{\infty}$ равенствами

$$(47) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}^{(l+1)} &= m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)+m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}_{X_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right)+\ldots+ \\ &+m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}_{X_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right)^{k-2}+\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}_{X_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right)^{k-1}, \\ \mathbf{T}^{(l+1)} &= \mathbf{R}^{(l+1)} \cap \mathbf{T}^{(l)}. \end{aligned}$$

Теорема 2.2:

1. $\left(\mathbf{A}_{X_k}\right)^{-1} \in \mathbf{T}^{(l)}$ при всех $l=0,1,2, \ldots$

¹ Норма $\|\cdot\|$ называется мультипликативной, если для $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{I}\left(\mathbb{R}^{n \times n}\right)$ справедливо:

1. $|\mathbf{A}| \leq|\mathbf{B}| \Rightarrow\|\mathbf{A}\| \leq\|\mathbf{B}\|$;
2. $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq\|\mathbf{A}\| \cdot\|\mathbf{B}\|$ (см. например, [2])

2. Последовательность $\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)_{l=0}^{\infty}$ сходится к $\left(\mathbf{A}_{X_k}\right)^{-1}$, если при всех $\mathbf{A}_{X_k} \in \mathbf{T}^{(0)}$ спектральный радиус матрицы (36) меньше единицы:

$$(48) \quad \left(\mathbf{A}_{X_k}\right)^{-1} < 1.$$

3. Если $\|\cdot\|$ – монотонная мультипликативная матричная норма, то

$$(49) \quad \left\|\varpi\left(\mathbf{T}^{(l+1)}\right)\right\| \leq c\left\|\varpi\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right\|^k, c=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left\|\mathbf{A}_{X_k}\right\|^{k-1}.$$

Для реализации методов, определяемых соотношениями (44), (47), необходимо знать начальное приближение $\mathbf{T}^{(0)}$, которое можно получить из условия (2) при номинальных значениях параметров системы.

2.3. СТРУКТУРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Математическая модель многомерного интервально заданного объекта управления обычно представляется в виде системы уравнений с интервальными параметрами и понимается как семейство математических моделей многомерных динамических объектов, параметры которых принадлежат заданным интервальным.

Вопросы композиции систем возникают, прежде всего, при исследовании крупномасштабных систем и при решении задач синтеза систем управления. Одним из основных подходов к анализу и синтезу таких систем является рассмотрение системы как композиции подсистем. Рассмотрим композицию подсистем с интервальными параметрами при наличии типовых соединений: последовательного, параллельного соединения систем и соединение с обратной связью.

Введем следующие три определения характерные для типовых соединений звеньев.

Определение 2.1. Пусть заданы две линейные системы, представленные в форме (34) над полем $\mathcal{K}$, причем размерности входов $\mathbf{C}_{pm \times 1}^{Y_1}, \mathbf{C}_{pm \times 1}^{Y_2}$ и выходов $\mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_1}, \mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_2}$ систем согласованы $\dim(\mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_1}) = \dim(\mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_2}), \dim(\mathbf{C}_{pn \times 1}^{Y_1}) = \dim(\mathbf{C}_{pn \times 1}^{Y_2})$:

$$(50) \quad \Sigma_1 = (\mathbf{F}_1) \text{ и } \Sigma_2 = (\mathbf{F}_2),$$

где $\mathbf{F}_1 = \mathbf{A}_{pn \times pm}^1, \mathbf{F}_2 = \mathbf{A}_{pn \times pm}^2$, начальные условия полагаем нулевыми, тогда их последовательная композиция Σ , которую будем обозначать через $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ определяется как система $\Sigma_1 \times \Sigma_2 = (\mathbf{F})$ с пространствами выходных сигналов $\mathbf{C}_{pn \times 1}^X$, входных сигналов $\mathbf{C}_{pm \times 1}^Y$, где $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ определяется по правилу:

$$(51) \quad \Sigma_1 \times \Sigma_2 = (\mathbf{F}) = (\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2).$$

Определение 2.2. Пусть заданы две линейные системы, представленные в форме (34) над полем $\mathcal{K}$, причем размерности входов $\mathbf{C}_{pm \times 1}^{Y_1}, \mathbf{C}_{pm \times 1}^{Y_2}$ и выходов $\mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_1}, \mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_2}$ систем согласованы $\dim(\mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_1}) = \dim(\mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_2}), \dim(\mathbf{C}_{pn \times 1}^{Y_1}) = \dim(\mathbf{C}_{pn \times 1}^{Y_2})$:

$$(52) \quad \Sigma_1 = (\mathbf{F}_1) \text{ и } \Sigma_2 = (\mathbf{F}_2),$$

где $\mathbf{F}_1 = \mathbf{A}_{pn \times pm}^1, \mathbf{F}_2 = \mathbf{A}_{pn \times pm}^2$, начальные условия полагаем нулевыми, тогда их параллельная композиция Σ , которую будем обозначать через $\Sigma_1 + \Sigma_2$ определяется как система $\Sigma_1 + \Sigma_2 = (\mathbf{F})$ с пространствами выходных сигналов $\mathbf{C}_{pn \times 1}^X$, входных сигналов $\mathbf{C}_{pm \times 1}^Y$, где $\Sigma_1 + \Sigma_2$ определяется по правилу:

$$(53) \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_2 \end{pmatrix} : \mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_1} \otimes \mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_2} \rightarrow \mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_1} \otimes \mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_2},$$

$$\mathbf{F} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{pn \times 1}^{Y_1} & \mathbf{C}_{pn \times 1}^{Y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \mathbf{C}_{pn \times 1}^{Y_1} & \mathbf{F}_2 \mathbf{C}_{pn \times 1}^{Y_2} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.3. Пусть заданы две линейные системы, представленные в форме (34) над полем $\mathcal{K}$, причем размерности

входов $\mathbf{C}_{pm \times 1}^{Y_1}, \mathbf{C}_{pm \times 1}^{Y_2}$ и выходов $\mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_1}, \mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_2}$ систем согласованы $\dim(\mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_1}) = \dim(\mathbf{C}_{pn \times 1}^{X_2}), \dim(\mathbf{C}_{pn \times 1}^{Y_1}) = \dim(\mathbf{C}_{pn \times 1}^{Y_2})$:

$$(54) \quad \Sigma_1 = (\mathbf{F}_1) \text{ и } \Sigma_2 = (\mathbf{F}_2),$$

где $\mathbf{F}_1 = \mathbf{A}_{pn \times pm}^1, \mathbf{F}_2 = \mathbf{A}_{pn \times pm}^2$, начальные условия полагаем нулевыми, тогда композиция Σ с обратной связью, которую будем обозначать через $\Sigma_1^{-1}\Sigma_2$ определяется как система $\Sigma_1^{-1}\Sigma_2 = (\mathbf{F})$ с пространствами выходных сигналов $\mathbf{C}_{pn \times 1}^X$, входных сигналов $\mathbf{C}_{pm \times 1}^Y$, где $\Sigma_1^{-1}\Sigma_2$ определяется по правилу:

$$(55) \quad \Sigma_1^{-1}\Sigma_2 = (\mathbf{F}) = \left((\mathbf{I} - \mathbf{F}_1)^{-1} \mathbf{F}_2 \right).$$

Докажем, что данный результат верен и для случая интервальных динамических систем.

Теорема 2.3. (О параллельной композиции интервальных динамических систем). Пусть имеются интервальные динамические системы одинаковой размерности $\dim(\Sigma_1) = \dim(\Sigma_2)$:

$$(56) \quad \Sigma_1 = (\mathbf{F}_1) \text{ и } \Sigma_2 = (\mathbf{F}_2),$$

где $\mathbf{F}_1 = \mathbf{A}_{pn \times pm}^1, \mathbf{F}_2 = \mathbf{A}_{pn \times pm}^2$, начальные условия полагаем нулевыми, и их параллельная композиция $\Sigma_1 + \Sigma_2 = (\mathbf{F})$, тогда для отображений вход-выход систем Σ_1, Σ_2 и Σ имеет место

$$(57) \quad f_{\Sigma_1 + \Sigma_2} = f_{\Sigma_1} + f_{\Sigma_2}.$$

Доказательство: Согласно (34), отображение вход-выход f динамической системы Σ может быть задано последовательностью матриц. Пусть отображения вход-выход $f_{\Sigma_1}, f_{\Sigma_2}$ и f_{Σ} заданы последовательностями $\mathbf{A}_{pn \times pm}^1 = \{\mathbf{A}_1^1, \mathbf{A}_2^1, \dots, \mathbf{A}_N^1\}$, $\mathbf{A}_{pn \times pm}^2 = \{\mathbf{A}_1^2, \mathbf{A}_2^2, \dots, \mathbf{A}_N^2\}$ и $\mathbf{A}_{pn \times pm} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_N\}$ соответственно. Следовательно, нужно доказать, что $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i^1 + \mathbf{A}_i^2$ для $i = \overline{1, N}$. Имеем

$$(58) \quad \begin{aligned} C_{pm \times 1}^{X_1} &= A_1 C_{pm \times 1}^{Y_1} = A_1^1 C_{pm \times 1}^{Y_1} + A_2^1 C_{pm \times 1}^{Y_1} = \\ &= (A_1^1 + A_2^1) C_{pm \times 1}^{Y_1}, \end{aligned}$$

аналогично

$$(59) \quad \begin{aligned} C_{pm \times 1}^{X_i} &= A_i C_{pm \times 1}^{Y_1} = A_i^i C_{pm \times 1}^{Y_1} + A_2^i C_{pm \times 1}^{Y_1} = \\ &= (A_1^i + A_2^i) C_{pm \times 1}^{Y_1}, \end{aligned}$$

откуда следует $A_i = A_i^1 + A_i^2$. Что и требовалось доказать.

Теоремы для случая последовательного соединения звеньев и соединения с обратной связью аналогичны.

3. Выводы

В работе рассмотрена задача алгебраической реализации для интервальных динамических систем. Рассматриваемый подход основан на спектральном представлении вход-выходных сигналов системы и ограниченных непрерывных операторов в конечномерном пространстве. Реализация динамической системы в алгебраической форме допускает простую композицию систем, что особенно актуально при крупномасштабных системах.

Литература

1. ЕГУПОВ Н.Д., ПУПКОВ К.А., РОГОЗА А.А., ТРОФИМОВ М.А. Алгоритмическая теория систем управления, основанная на спектральных методах. В двух томах. Том 2. Матрично-вычислительные технологии на базе интегральных уравнений / Под ред. Матвеева В.А. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 464 с.
2. КАЛМЫКОВ С.А., ШОКИН Ю.И., ЮЛДАШЕВ З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 221 с.

3. ЛАПИН С.В., ЕГУПОВ Н.Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 496с.
4. ЛАПИН С.В. Оптимизация по емкости проекционных методов аппроксимации систем. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1995. – 224 с.
5. РОГОЗА А.А. Проекционно-матричный подход к синтезу робастного управления для линейных систем с интервальными параметрами. // Информатика и системы управления, 2014, №2 (40), С. 147-157.
6. ALEFELD G., HERZBERGER J. Verfahren hoherer Ordnung zur iterativen Einschliessung der inversen Matrix. – ZAMP, 1970, Bd 21, S. 819-824.

AN APPROACH TO THE IMPLEMENTATION IN STATE SPACE FOR INTERVAL DYNAMIC SYSTEMS

Alexander Rogoza, assistant (aemaeth_eternity@mail.ru).
(Bauman Moscow State Technical University, Kaluga)

Abstract: The article discusses the problem of an implementation of dynamic interval systems in the state space. The proposed approach is based on the spectral representation signals and continuous bounded operators in a finite form - the expansion in some basis of finite-dimensional space. This approach allows a simple composition system, which is particularly important for complex multi-loop dynamic systems.

Keywords: projection methods, bounded continuous operator composition systems, interval uncertainty.

Статья представлена к публикации

членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...

Опубликована ...заполняется редактором...