

УДК 62.50
ББК 32.817

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ СОВМЕСТНОЙ БЛОЧНО-КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ

Ахобадзе А.Г., Краснова С.А

(Институт проблем управления РАН, Москва)

krasnova@ipu.rssi.ru

Исследуются структурные свойства линейных многомерных динамических систем при действии внешних возмущений в задаче слежения за заданными траекториями выходных переменных. Предполагается, что именно выходные переменные подлежат измерениям, а компоненты вектора возмущений являются неконтролируемыми гладкими ограниченными функциями времени. Сформулирован критерий разрешимости задачи в терминах выходного отображения. Разработана пошаговая процедура приведения математической модели исходной системы к совместной блочно-канонической форме управляемости и наблюдаемости относительно выходных переменных. На основе полученной формы разработаны декомпозиционные процедуры синтеза обратной связи, включающие решение задачи наблюдения и собственно управления относительно одних и тех же координатных базисов, обеспечивающие асимптотическую сходимость к заданным траекториям.

Ключевые слова: слежение, декомпозиция, внешние возмущения, наблюдатели состояния на скользящих режимах.

Введение

В работе изучается задача слежения за заданными траекториями выходных переменных объекта автоматического управления при действии внешних неконтролируемых возмущений.

Построение регуляторов по обратной связи, обеспечивающих инвариантность к действию возмущений включает следующие этапы: 1) изучение природы имеющихся неопределенностей; 2) анализ разрешимости задачи, т.е. установление принципиальной возможности обеспечить инвариантность выходных сигналов; 3) выбор закона управления и его параметров с учетом технологических требований к качеству установленных режимов и аппаратурных возможностей.

Развитый раздел теории инвариантности составляют методы динамической компенсации и адаптивного управления [9–12, 18], основанные на расширении пространства состояния за счет введения модели экзогенной системы, описывающей динамику имеющихся неопределенностей, и использовании ее переменных для синтеза обратной связи. Как быть, если данная модель в принципе не может быть построена или не только параметры, но и структура данной модели существенно меняются в процессе эксплуатации? В такой ситуации приходится обращаться к классическим способам подавления действия внешних возмущений различной природы – так называемым «силовым» методам с использованием больших коэффициентов усиления или разрывных управлений, функционирующих в скользящем режиме [14]. Однако, благополучные в теории, данные методы не находят широкого применения на практике, поскольку для их реализации требуются или значительные ресурсы управления, или необходимость в специальной аппаратурной реализации.

В данной работе для решения задачи инвариантности используется альтернативный подход, основанный на введении в контур обратной связи наблюдателей состояния на скользящих режимах. Данный класс наблюдателей, реализуемых в вычислительной среде, при определенных условиях позволяет решить задачу оценивания не только неизмеряемых фазовых переменных, но и имеющихся неопределенностей [6, 7], что позволяет синтезировать комбинированное управление [10] для компенсации действия неопределенностей.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 приводит-

ся описание математической модели объекта управления, формулируется постановка задачи. В разделе 2 исследуется структура выходного отображения оператора объекта управления, формализуется критерий существования совместной блочно-канонической формы управляемости и наблюдаемости линейных систем с учетом возмущений рассматриваемого класса (СБКФ), что является предпосылкой разрешимости задачи слежения. Заранее ориентируясь на предполагаемую высокую размерность задачи, в разделе 3 разработана пошаговая процедура трансформации математической модели исходной системы в СБКФ, что позволяет декомпозировать задачу уже на этапе анализа. На основе СБКФ в разделе 4 в рамках блочного подхода [4, 13] разработана декомпозиционная процедура синтеза комбинированной обратной связи по состоянию и по возмущению, которая сводится к последовательно решаемым элементарным подзадачам стабилизации и обеспечивает асимптотическую сходимость выходных сигналов к заданным траекториям инвариантно к внешним возмущениям. Для информационной поддержки разработана процедура синтеза наблюдателей состояния на скользящих режимах, позволяющих за теоретически конечное время решить задачу непосредственного оценивания составляющих базового закона управления, что существенно упрощает структуру регулятора. В работе органично используются основные методы декомпозиции сложных систем. На этапе анализа – объектная (структурная) декомпозиция с целью представить исходную систему в виде эквивалентных подсистем вход–выход, допускающих раздельное рассмотрение. На этапе синтеза – задачно-ориентированная (функциональная) декомпозиция формирования обратной связи, а также временная декомпозиция, обеспечивающая различные режимы работы системы.

1. Модель объекта управления. Постановка задачи

Рассматривается линейная математическая модель объекта автоматического управления вида

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu + Q\eta, \quad y_1 = Dx,$$

где $x \in X \subset R^n$ – вектор состояния, $y_1 \in Y_1 \subset R^{m_0}$ – вектор выходных (измеряемых и регулируемых) переменных, $u \in R^p$ – вектор управляющих воздействий, $\eta(t) \in R^q$ – вектор внешних возмущений, компоненты которого предполагаются неизвестными гладкими ограниченными функциями времени с ограниченными производными в общем случае до $(n-1)$ -го порядка, A, B, Q, D – матрицы с постоянными коэффициентами соответствующих размерностей. Требования к степени определенности оператора объекта управления будут формулироваться по ходу изложения. Без ограничения общности полагается, что $\text{rank}D = m_0 < n$, $\text{rank}B = p$, $m_0 \leq p < n$.

Для системы (1) ставится задача синтеза обратной связи (которая включает и решение задачи наблюдения неизмеряемых координат, и синтез собственно управления), обеспечивающей асимптотическую сходимость выходных переменных к заданным траекториям:

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = g(t).$$

Предполагается, что программные траектории $g(t) \in R^{m_0}$ заданы корректно, отражают физику процесса и представлены линейно независимыми гладкими ограниченными функциями времени с ограниченными производными в общем случае до n -го порядка, аналитический вид которых не известен. Предположение о гладкости задающих и возмущающих воздействий расширяет класс систем, в которых имеется принципиальная возможность обеспечить инвариантность выходных сигналов к внешним возмущениям по сравнению со случаем негладких возмущений [2, 3, 8]. Задача инвариантности (в отличие от постановок, рассматриваемых в [11, 13]) решается без расширения пространства состояния за счет компенсаторов управляющих, задающих и возмущающих воздействий. Весь объем необ-

ходимой для синтеза обратной связи информации комплексно обеспечивается наблюдателями на скользящих режимах.

2. Совместная блочно-каноническая форма управляемости и наблюдаемости

Конструктивным приемом в решении задачи слежения относительно выходных переменных как линейных, так и нелинейных динамических систем является неособое преобразование фазовых координат, приводящее к эквивалентным подсистемам вход–выход, непосредственно отражающим связи входных и выходных переменных и допускающим независимое рассмотрение. Наиболее целесообразной является прямая трансформация, которая заключается в получение выходного отображения оператора объекта управления путем многократного (μ раз, где μ – максимальная относительная степень, $1 \leq \mu \leq n$) формального дифференцирования выходных переменных с целенаправленной неособой заменой фазовых координат координатами выходного вектора и их производными до комплектации полного управления с матрицей ранга m_0 [2, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 15–18].

Будем рассматривать общий случай, когда вектор выходных переменных может быть расщеплен на непересекающиеся группы компонент

$$(3) \quad y_1 = \text{col}(y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1\mu}), \quad \dim y_{1i} = p_i, \quad p_1 + \dots + p_\mu = m_0,$$

каждая из которых состоит из переменных, имеющих одинаковую относительную степень $v_i = i$, $1 \leq v_i \leq \mu \leq n$, т.е. полное управление в соответствующих дифференциальных уравнениях относительно y_{1i} появляется минимум после i дифференцирований. Наша цель состоит в трансформации исходной системы (1) в соответствующую эквивалентную блочную структуру вход–выход (СБКФ), на основе которой группы компонент выходного вектора y_1 будут регулироваться группами «своих» управляющих координат (или непосредственно, или через цепочку инте-

граторов), не влияющих на поведение других групп выходных координат. Процесс «закрепления» за группами выходных переменных, имеющих различную относительную степень, «своих» управляющих воздействий потребует также выполнения неосо-бой замены координат вектора управления.

Критерий разрешимости задачи слежения. В системе (1) задача слежения относительно выходных переменных в асимптотике (2) имеет принципиальное решение тогда и только тогда, когда существуют неособые преобразования фазовых координат и управляющих воздействий, позволяющих трансформировать ее в структурное блочное представление вида

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{y}}_i &= y_{i+1}, \quad \dot{\tilde{y}}_i = \sum_{j=1}^{\mu} \tilde{A}_{ij} y_j^* + \tilde{D}_i x_{\mu} + u_i + \tilde{Q}_i f_{\mu-1}, \quad i = \overline{1, \mu-1}; \\ \dot{y}_\mu^* &= \sum_{j=1}^{\mu} A_{\mu j} y_j^* + D_\mu x_\mu + u_\mu + Q_\mu f_\mu, \end{aligned}$$

$$(5) \quad \dot{x}_\mu = \sum_{j=1}^{\mu} C_{\mu j} y_j^* + G_\mu x_\mu + S_\mu u + R_\mu f_{\mu-1},$$

где $f_i = \text{col}(\eta, \dot{\eta}, \dots, \eta^{(i-1)})$,

$$(6) \quad H_x x + \Lambda_\eta f_{\mu-1} = \text{col}(y_1, \dots, y_\mu, x_\mu), \quad \det H_x \neq 0,$$

т.е. переменные системы (4) – координаты выходного вектора и их производные до $(\mu-1)$ -го порядка – связаны с фазовыми координатами x неособыми преобразованиями, в которых задействованы компоненты вектора возмущений η и их производные до $(\mu-2)$ -го порядка, $H_{iy} y_i = \text{col}(\bar{y}_i, \tilde{y}_i) = y_i^*$,

$$\det H_{iy} \neq 0, \quad i = \overline{1, \mu-1},$$

$$(7) \quad \dim \bar{y}_i = \dim y_{i+1} = m_i, \quad m_0 + \dots + m_\mu = l, \quad l + \dim x_\mu = n,$$

$$(8) \quad \dim \tilde{y}_i = \dim u_i = p_i, \quad p_1 + \dots + p_\mu = m_0, \quad m_0 + \dim u_{\mu+1} = p,$$

$$(9) \quad H_u u = \text{col}(u_1, \dots, u_\mu, u_{\mu+1}), \quad \det H_u \neq 0,$$

т.е. новые управлния u_i являются независимыми линейными комбинациями компонент исходного вектора управления u .

общем случае в системе (4) могут отсутствовать любые подблоки относительно переменных \tilde{y}_i по признаку $p_i = 0$. К переменным подсистемы (5), которые образуют внутреннюю динамику, предъявляется требование ограниченности решений:

$$(10) \quad \|x_\mu(t)\| \leq \bar{X} = \text{const}.$$

Если в системе (4)–(5) $\dim x_\mu = 0$, то будем называть ее полной СБКФ системы (1), если при $\dim x_\mu \neq 0$ условие (10) выполняется, то неполной СБКФ.

Блочно-каноническая форма (4) является совместной формой управляемости и наблюдаемости относительно выходных переменных в силу двойной функции, которую выполняют векторы y_{i+1} в подблоках относительно переменных \bar{y}_i :

- с одной стороны, при решении задачи наблюдения они подлежат оцениванию на i -м шаге и трактуются как фиктивный выход полной размерности для $(i+1)$ -го блока [7];
- с другой стороны, в задаче слежения они трактуются как фиктивные управления полной размерности [4, 13], целенаправленно выбираемые для обеспечения требуемой динамики \bar{y}_i . Требуемая же динамика компонент \tilde{y}_i обеспечивается непосредственно с помощью выбора истинных управлений u_i .

Структура СБКФ (4) отражает каналы действия управляющих воздействий u_i ($i=1, \mu$) на выходные переменные $H_{1y}y_1 = \text{col}(\bar{y}_1, \tilde{y}_1)$: \tilde{y}_1 полностью управляются посредством «своих» истинных u_1 , \bar{y}_1 – посредством фиктивных управлений y_2 , которые, в свою очередь, полностью управляются посредством «своих» истинных u_2 и фиктивных управлений y_3 , и т.д., и, наконец, переменные y_μ полностью управляются «своими» истинными управлениями u_μ . Таким образом, выходные переменные y_1 не рассматриваются как фиктивные управлении и будут отрабатывать «свои», а не «чужие» задающие воздействия,

что является предпосылкой разрешимости задачи слежения. Существенно, что в системе (4) выполняется условие инвариантности [11], так как все неопределенности сосредоточены в пространстве истинных управлений, что, в предположении об их гладкости, было достигнуто путем их многократного дифференцирования и задействования в неособых преобразованиях.

Особенность структуры СБКФ (4) позволит на ее основе синтезировать и задачу наблюдения, и задачу собственно управления относительно одного и того же координатного базиса, т.е. не потребуется выполнять в реальном времени прямых и обратных преобразований координат, что существенно упростит структуру регулятора.

Условия существования СБКФ, ее полнота и техническая реализуемость обусловлены структурными свойствами оператора объекта управления (1) и зависят от ранговых соотношений тройки матриц $(D(A, B))$. С целью выявить возможность трансформации исходной системы (1) в СБКФ, проведем анализ выходного отображения. Составим избыточную систему путем формального дифференцирования выходных переменных n раз. Специфика построения выходного отображения заключается в том, что операции дифференцирования не предполагают порождение производных управляющих воздействий, а именно:

$$y_1 = Dx, \quad \dot{y}_1 = DAx + DBu + DQ\eta, \quad y_2 = DAx + DQ\eta;$$

$$\dot{y}_i = DA^i x + DA^{i-1} Bu + DA^{i-1} Q\eta + \sum_{j=1}^{i-1} DA^{i-1-j} Q\eta^{(j)},$$

$$y_{i+1} = DA^i x + DA^{i-1} Q\eta + \sum_{j=1}^{i-1} DA^{i-1-j} Q\eta^{(j)}, \quad i = \overline{2, n-1};$$

$$\dot{y}_n = DA^n x + DA^{n-1} Bu + DA^{n-1} Q\eta + \sum_{j=1}^{n-1} DA^{n-1-j} Q\eta^{(j)},$$

или в общем виде

$$(11) \quad \bar{Y} = \bar{A}x + \bar{B}u + \bar{Q}f_n,$$

где $\bar{Y} = \text{col}(y_1(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dots, \dot{y}_n(t))$, $\bar{Y} \in R^{m_0(n+1)}$, $\bar{A} \in R^{m_0(n+1) \times n}$,

$$\bar{B} \in R^{m_0(n+1) \times p}, \bar{Q} \in R^{m_0(n+1) \times qn}, f_n = \text{col}(\eta, \dot{\eta}, \dots, \eta^{(n-1)}),$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} D \\ DA \\ DA^2 \\ \dots \\ DA^n \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} O \\ DB \\ DAB \\ \dots \\ DA^{n-1}B \end{pmatrix}, \bar{Q} = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ DQ & O & \dots & O \\ DAQ & DQ & \dots & O \\ \dots \\ DA^{n-1}Q & DA^{n-2}Q & \dots & DQ \end{pmatrix},$$

здесь и далее O – нулевая матрица соответствующей размерности. С учетом введенных обозначений i -ые ($i = \overline{1, n-1}$) уравнения системы (11) имеют вид $\dot{y}_i = y_{i+1} + DA^{i-1}Bu$.

Прообраз СБКФ (4) – это $m_0 \leq l \leq n$ ($l = m_0 + \dots + m_\mu$) дифференциальных уравнений системы (11) относительно переменных $\bar{y} \in R^l$, $\bar{y} \subset \bar{Y}$, которые определяются путем последовательного «наращивания» базисных строк матриц $(\bar{A} \quad \bar{B})$ так, чтобы поставить в соответствие: всем компонентам вектора $y_1 \in R^{m_0}$ линейно независимые комбинации компонент вектора управления u ранга m_0 ; всем переменным вектора $\bar{y} \in R^l$ линейно независимые комбинации компонент вектора x ранга l .

Критерий существования СБКФ. Если оператор линейной стационарной системы (1), где $\eta(t) \in R^q$ – гладкие функции времени, $\text{rank } D = m_0 \leq \text{rank } B = p < n$, удовлетворяет условиям:

$$1) \text{rank } \bar{B}_\mu = m_0; 2) \text{rank}(\bar{A} \quad \bar{B})_\mu = m_0 + l, \quad m_0 \leq l \leq n,$$

$$\text{где } \bar{B}_\mu = \begin{pmatrix} DB \\ DAB \\ \dots \\ DA^{\mu-1}B \end{pmatrix}, (\bar{A} \quad \bar{B})_\mu = \begin{pmatrix} D & O \\ DA & DB \\ \dots \\ DA^{\mu-1} & DA^{\mu-2}B \\ O & DA^{\mu-1}B \end{pmatrix}, 1 \leq \mu \leq n,$$

то существуют неособые преобразования (6), (9), позволяющее

представить систему (1) в виде СБКФ (4)–(5).

Действительно, первое условие критерия, т.е. выполнение в системе (11) условия

$$(12) \quad \text{rank} \bar{B} \geq m_0$$

является необходимым для существования неособой замены координат вектора управления (9) и обеспечения m_0 выходных переменных «своими» управляющими воздействиями. В противном случае часть выходных переменных (размерности $m_0 - \text{rank} \bar{B}$) будет вынуждена отрабатывать «чужие» задающие воздействия, что противоречит постановке задачи.

Исследуем структуру матрицы \bar{B} , последовательно наращивая ее блоки, определяя их совместный ранг и фиксируя базисные строки до набора m_0 базисных строк:

$$(13) \quad \begin{aligned} \bar{B}_1 &= DB, \quad \text{rank} \bar{B}_1 = p_1 < m_0, \\ \bar{B}_2 &= \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ DAB \end{pmatrix}, \quad \text{rank} \bar{B}_2 = p_1 + p_2 < m_0, \dots, \\ \bar{B}_\mu &= \begin{pmatrix} \bar{B}_{\mu-1} \\ DA^{\mu-1}B \end{pmatrix}, \quad \text{rank} \bar{B}_\mu = p_1 + \dots + p_{\mu-1} + p_\mu = m_0, \quad 1 \leq \mu \leq n, \end{aligned}$$

где $\mu = v_{\max}$ – максимальная относительная степень, при этом любое из чисел p_i (кроме p_μ) может быть равно нулю по признаку $\text{rank} \bar{B}_i = \text{rank} \bar{B}_{i-1} = p_1 + \dots + p_{i-1}$.

Полученное структурное представление верхних блоков матрицы \bar{B} ($m_0 \leq \text{rank} \bar{B} \leq p$), т.е. ее m_0 линейно независимых строк, которые включают p_1 сток матрицы DB , p_2 строк матрицы DAB , ..., p_μ строк матрицы $DA^{\mu-1}B$, обуславливает расщепление вектора выходных переменных на непересекающиеся группы компонент (3). Соответствующая расщеплению (3) цепочка интеграторов (уравнения относительно части переменных избыточной системы (11) $\bar{y} \subset \bar{Y}$), имеет размерность

$$(14) \quad l = p_1 v_1 + p_2 v_2 + \dots + p_\mu v_\mu \leq n.$$

Если $l < n$, то останутся несвязанные переменные x размерности $n - l$, определяющие внутреннюю динамику СБКФ.

Второе условие критерия определяет существование неособого преобразования (6), т.е. однозначного соответствия между l фазовыми координатами исходной системы (1) с выходными переменными y_1 и частью их производных (11) по следующей схеме: со всеми m_0 переменными вектора y_1 , с $m_0 - p_1 = m_1$ переменными вектора y_2 , с $m_1 - p_2 = m_2$ переменными вектора y_3, \dots , с $m_{\mu-2} - p_{\mu-1} = m_{\mu-1} = p_\mu$ переменными вектора $y_{\mu-1}$.

В тривиальной ситуации, когда $\forall p_i = 0 \quad (i = \overline{1, \mu-1})$ и $p_\mu = m_0$, т.е. все компоненты выходного вектора имеют одинаковую относительную степень $v_{\max} = \mu$ и $l = \mu m_0$, преобразование (6) существует тогда и только тогда, когда матрица \bar{A} расширенной системы (11) имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= D, \quad \text{rank } \bar{A}_0 = m_0, \quad \bar{A}_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_0 \\ DA \end{pmatrix}, \quad \text{rank } \bar{A}_1 = m_0 + m_0, \dots, \\ \bar{A}_{\mu-1} &= \begin{pmatrix} \bar{A}_{\mu-2} \\ DA^{\mu-1} \end{pmatrix}, \quad \text{rank } \bar{A}_{\mu-1} = \mu m_0. \end{aligned}$$

В нетривиальной ситуации требуется совместное рассмотрение матриц $\bar{A}_{\mu-1}$ и \bar{B}_μ . Неособое преобразование (6) существует тогда и только тогда, когда структура данных матриц соответствует указанной выше схеме трансформации, а именно

$$(\bar{A} \quad \bar{B})_0 = (D \quad O), \quad \text{rank}(\bar{A} \quad \bar{B})_0 = m_0,$$

$$(\bar{A} \quad \bar{B})_1 = \begin{pmatrix} (\bar{A} \quad \bar{B})_0 \\ DA \quad DB \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(\bar{A} \quad \bar{B})_1 = m_0 + (m_1 + p_1),$$

$$m_1 + p_1 = m_0; \quad (\bar{A} \quad \bar{B})_2 = \begin{pmatrix} (\bar{A} \quad \bar{B})_1 \\ DA^2 \quad DAB \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\text{rank}(\bar{A} \quad \bar{B})_2 &= m_0 + (m_1 + p_1) + (m_2 + p_2), \quad m_2 + p_2 = m_1, \dots, \\
(\bar{A} \quad \bar{B})_{\mu-1} &= \begin{pmatrix} (\bar{A} \quad \bar{B})_{\mu-2} \\ DA^{\mu-1} \quad DA^{\mu-2}B \end{pmatrix}, \\
\text{rank}(\bar{A} \quad \bar{B})_{\mu-1} &= m_0 + (m_1 + p_1) + \dots + (m_{\mu-1} + p_{\mu-1}), \\
m_{\mu-1} + p_{\mu-1} &= m_{\mu-2}, \quad (\bar{A} \quad \bar{B})_\mu = \begin{pmatrix} (\bar{A} \quad \bar{B})_{\mu-1} \\ O \quad DA^{\mu-1}B \end{pmatrix}, \\
(15) \quad \text{rank}(\bar{A} \quad \bar{B})_\mu &= m_0 + (m_1 + p_1) + \dots + (m_{\mu-1} + p_{\mu-1}) + p_\mu = m_0 + l, \\
p_\mu &= m_{\mu-1}.
\end{aligned}$$

В противном случае, когда при определении ранга матрицы $(\bar{A} \quad \bar{B})_i$ возникает ситуация $m_i + p_i < m_{i-1}$ ($i = \overline{1, \mu-1}$), тогда часть выходных переменных размерности $m_{i-1} - (m_i + p_i) > 0$ теряют связь со «своими» управляющими воздействиями, т.е. становятся неуправляемыми в контексте задачи сложения. Ситуация $m_i + p_i > m_{i-1}$ ($i = \overline{1, \mu-1}$) невозможна в силу структуры матрицы наблюдаемости \bar{A} [1]. Построения (15), по сути, означают выделение наблюдаемого подпространства пары (D, A) , не принадлежащего пространству управления, а именно, базиса матрицы $\bar{A}_{\mu-1}$, ортогонального базису матрицы $\bar{B}_{\mu-1}$.

Таким образом, СБКФ – упорядоченное выходное отображение (11), которое при выполнении условий (13)–(15) может быть представлено в виде системы взаимосвязанных блоков (цепочек интеграторов), переменные которых являются укороченными (линейно независимыми) и преобразованными неособым образом (6) производными компонент вектора выходных переменных y_1 с выполнением согласованной неособой замены координат вектора управляющих воздействий (9).

Отметим, что формализация в общем виде матриц неособых преобразований (6), (9), позволяющих непосредственно получить СБКФ из системы (1), в принципе выполнимая, но небла-

годарная работа. Во-первых, потребуется предварительная проверка условий (13)–(15), что в случае системы большой размерности достаточно трудоемко. Во-вторых, практически все известные неособые преобразования линейных систем в те или иные канонические формы требуют точного знания параметров.

В следующем разделе в рамках блочного подхода разработана пошаговая процедура трансформации системы (1) в СБКФ (4)–(5), что позволяет декомпозировать задачу уже на этапе анализа – проверка условий (13)–(15), процедуры замены переменных и преобразований подобия последовательно выполняются в подсистемах размерности m_i .

3. Процедура конструктивного анализа

В данном разделе разработана пошаговая процедура анализа разрешимости задачи и приведения исходной системы (1) к СБКФ (4)–(5). Каждый i -й ($i = \overline{1, \mu}$) шаг процедуры состоит в общем случае из следующих операций:

П1 – получение дифференциального уравнения относительно переменных $y_i \in R^{m_{i-1}}$ (i -го блока СБКФ) и его анализ;

П2 – приведение i -го блока к регулярной форме относительно истинного управления (выделение p_i базисных строк матрицы \bar{B} (11) и обнуление линейно зависимых строк), что позволяет сформировать линейные комбинации i -х производных выходных переменных $y_{i+1} \in R^{m_i}$ ($m_i \leq m_{i-1}$), подлежащих повторному дифференцированию;

П3 – закрепление за i -й группой выходных переменных «своих» управляющих воздействий с неособой заменой координат вектора управления (при $p_i \neq 0$);

П4 – аннулирование в непреобразованной подсистеме управлений, закрепленных за j -ми ($j = \overline{1, i}$) группами выходных переменных.

На каждом шаге комплексно проверяется критерий существования СБКФ (4)–(5): условие А (все фазовые переменные x будут преобразованы в новые переменные y_1, \dots, y_i , $y_i \in R^{m_{i-1}}$); условие В (все группы выходных переменных будут обеспечены «своими» группами истинных управлений); условие С (пролонгация процедуры на следующий шаг), а именно

$$m_0 + \dots + m_{i-1} = n \text{ (A } i^*\text{)}, \quad m_0 + \dots + m_{i-1} < n \text{ (A } i^{**}\text{)};$$

$$p_1 + \dots + p_i = m_0 \leq p \text{ (B } i^*\text{)}, \quad p_1 + \dots + p_i < m_0 \text{ (B } i^{**}\text{)};$$

$$m_i + p_i < m_{i-1} \text{ или } m_i + p_i = m_{i-1}, \quad p_1 + \dots + p_i = p \text{ (C } i^*\text{)},$$

$$m_i = m_{i-1}, \quad p_i = 0 \text{ (C1}^{**}\text{)},$$

$$m_i + p_i = m_{i-1}, \quad p_1 + \dots + p_i < p, \quad p_i > 0 \text{ (C1}^{***}\text{)}.$$

Процедура заканчивает на i -м шаге в следующих случаях:

(A i^* , B i^{**}); (A i^{**} , B i^* , C i^*) – СБКФ не существует;

(A i^* , B i^*) – получена полная СБКФ;

(A i^{**} , B i^*) – получена неполная СБКФ с внутренней динамикой, для которой проверяется условие (10);

При выполнении условий (A i^{**} , B i^{**} , C i^{**})(C i^{***})) процедура пролонгируется на следующий шаг.

На рис. 1 показана блок-схема процедуры конструктивного анализа, «черным квадратом» обозначен конец процедуры. С практической точки важно, что при таком пошаговом рассмотрении оператора системы (1) появляется возможность выявления проблемных (нестационарных или плохо обусловленных) фрагментов матриц и их резервации. Конечный вид системы формируется из отдельных блоков, в ходе процедуры имеется возможность корректировать построения на каждом шаге, чтобы получить добротную конструкцию, тогда как в общем случае приходится искать различные варианты реализации (6), (9), работая с матрицами избыточной системы (11). Операции, связанные с перебором различных сочетаний базисных миноров и проверки их обусловленности, образуют дополнительную логику, не отраженную на рис. 1, но являющуюся неотъемлемой частью процедуры.

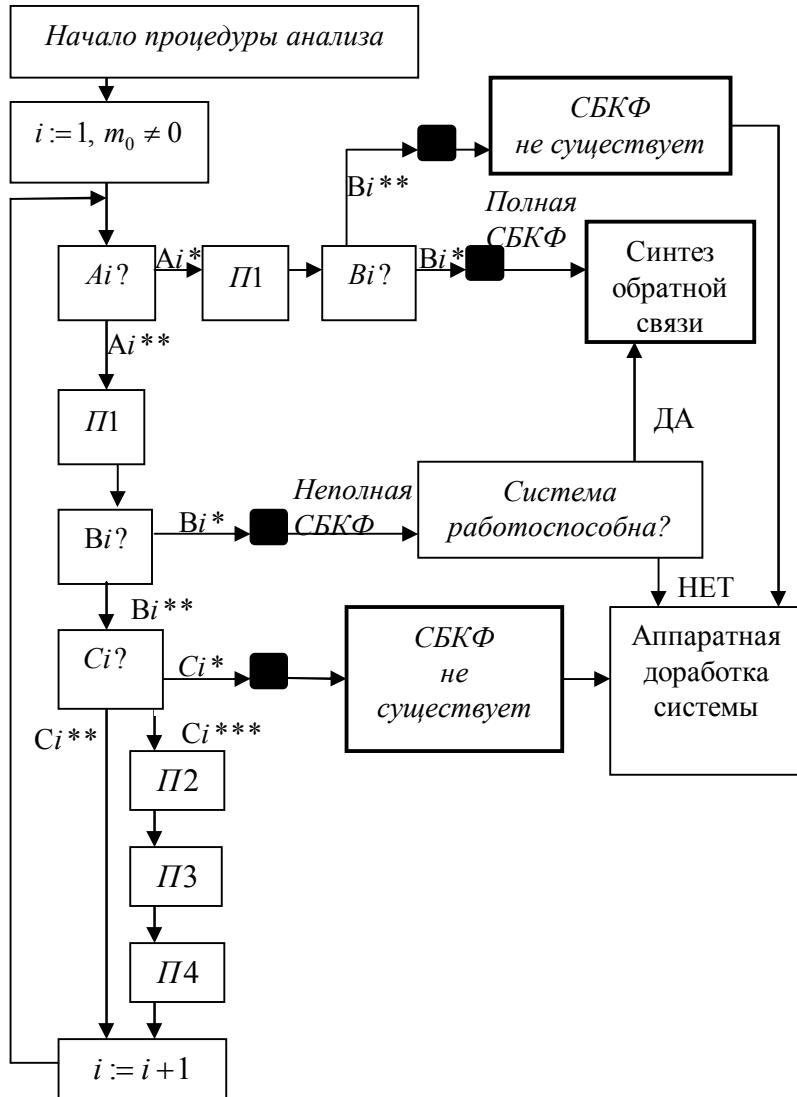


Рис. 1. Блок-схема процедуры конструктивного анализа

Процедура трансформации системы (1) в СБКФ (4)–(5)

Шаг 1. В тривиальном случае процедура может состоять из одного шага. Рассмотрим этот случай для однородности изложения, сняв априорные предположения о ранговых соотношениях матриц системы (1), кроме следующего: $\text{rank}D = m_0 \neq 0$.

А) В системе (1) выполняется одно из условий:

$$(A1^*) \quad m_0 = n \quad (\dim y_1 = \dim x),$$

$$(A1^{**}) \quad m_0 < n \quad (\dim y_1 < \dim x).$$

Переходим к первой операции, которая в зависимости от указанных вариантов имеет следующую реализацию.

А1*, П1) Все компоненты вектора состояния x связаны взаимнооднозначным соответствием с компонентами вектора выходных переменных $x = D^{-1}y_1$, $\det D_{m_0 \times m_0} \neq 0$. После дифференцирования и обратной подстановки имеем

$$(16) \quad \dot{y}_1 = A_{11}y_1 + B_1u + Q_1\eta,$$

где $A_{11} = DAD^{-1}$, $B_1 = DB$, $Q_1 = DQ$. Анализ оператора системы (16) позволяет сделать вывод о разрешимости поставленной задачи слежения.

В) Обозначим $\text{rank}B_1 = p_1 \leq p$. В системе (16) выполняется одно из условий:

$$(B1^*) \quad p_1 = m_0 \quad (\text{rank}B_1 = \dim y_1),$$

$$(B1^{**}) \quad p_1 < m_0 \quad (\text{rank}B_1 < \dim y_1).$$

В случае (A1*, B1*) все компоненты выходных переменных обеспечены своим управляющим воздействием, получена полная СБКФ, состоящая из одного блока (16), на основе которой переходим к задаче синтеза обратной связи.

В случае (A1*, B1**) часть выходных переменных размерности $(m_0 - \text{rank}B_1)$ не обеспечена истинным управлением и будет вынуждена отрабатывать «чужие» задающие воздействия. Процедура заканчивается, СБКФ не существует.

А1**, П1) Перегруппируем компоненты вектора состояния $x = \text{col}(\tilde{x}_1, x_1)$, $\tilde{x}_1 \in R^{m_0}$, $x_1 \in R^{n-m_0}$ так, чтобы в линейном раз-

ложении $y_1 = Dx = D_{11}\tilde{x}_1 + D_{12}x_1$ выполнялось условие $\det D_{11} \neq 0$, что позволяет установить взаимнооднозначное соответствие между выходными переменными и координатами вектора состояния \tilde{x}_1 :

$$x \mapsto H_{11} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad H_{11} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ O & I_{n-m_0} \end{pmatrix}, \quad \det H_{11} \neq 0,$$

здесь и далее I – единичная матрица указанной размерности.

Представим систему (1) в виде двух подсистем

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= A_{11}y_1 + D_1x_1 + B_1u + Q_1\eta, \\ \dot{x}_1 &= C_{11}y_1 + G_1x_1 + S_1u + R_1\eta, \end{aligned}$$

где $H_{11}AH_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & D_1 \\ C_{11} & G_1 \end{pmatrix}$, $H_{11}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ S_1 \end{pmatrix}$, $H_{11}Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ R_1 \end{pmatrix}$.

Далее в первом уравнении (17) выполняется комплексный анализ матриц D_1 , B_1 в контексте решаемой задачи.

В) В первом уравнении (17) выполняется одно из условий: (B1*) или (B1**). В случае (A1**, B1*) все компоненты выходных переменных «обеспечены» своим управляющим воздействием, получена неполная СБКФ, переходим к проверке работоспособности (10) системы (17). В случае (A1**, B1**) приступаем к проверке следующего условия.

С) В первом уравнении (17) выполняется одно из условий:

$$(C1*) \quad \text{rank}(D_1 B_1) < m_0 \text{ или } \text{rank}(D_1 B_1) = m_0 \text{ и } p_1 = p,$$

$$(C1**) \quad \dim y_1 = \text{rank} D_1 = m_0 \quad p_1 = 0,$$

$$(C1***) \quad \dim y_1 = \text{rank}(D_1 B_1) = m_1 + p_1 = m_0 \text{ и } 0 < p_1 < p.$$

В первом варианте (C1*) часть выходных переменных не обеспечивается фиктивным управлением, в качестве которого рассматриваются фазовые переменные x_1 , а во втором – уже фиктивные управления x_1 не обеспечены истинным управлением. Процедура заканчивается, СБКФ не существует.

В случаях (C1**), (C1***) все выходные переменные обеспечены фиктивным и/или истинным управлением.

*Результат первого шага в случае (A1**, B1**, C1**).* В системе (17) $B_1 = O$, т.е. весь вектор первых производных выходных переменных подлежит повторному дифференцированию. Для единства изложения обозначим $y_2 = A_{11}y_1 + \bar{D}_1x_1 + Q_1\eta$, где $D_1 := \bar{D}_1$, $\text{rank } \bar{D}_1 = \dim y_1$ первая подсистема системы (17) примет вид первого блока СБКФ $\dot{y}_1 = y_2$. Переходим на второй шаг процедуры, где аналогичные построения применяются для второй подсистемы (17) с фиктивным выходом $y_2 \in R^{m_1}$, $m_1 = m_0$.

В случае (A1**, B1**, C1***) выполняем аннулирующие преобразования, которые позволяют непосредственно сформировать комбинацию производных выходных переменных \dot{y}_1 , которые не зависят от управления и подлежат второму дифференцированию.

П2) В соответствие с логикой изложения, преобразования данного пункта выполняются, когда $0 < p_1 < m_0$.

С помощью перестановки строк выполним следующее расщепление первой подсистемы (17):

$$(18) \quad B_1 = \begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ \tilde{B}_1 \end{pmatrix}, \quad y_1 = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix}, \quad A_{11} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \\ \tilde{A}_{11} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} \bar{D}_1 \\ \tilde{D}_1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \\ \tilde{Q}_1 \end{pmatrix},$$

где $\text{rank } B_1 = \text{rank } \tilde{B}_1 = \dim \tilde{y}_1 = p_1$, $\dim \hat{y}_1 = m_0 - p_1 = m_1$.

Обнулим линейно зависимые строки матрицы B_1 с помощью неособой замены переменных $\bar{y}_1 = \hat{y}_1 - B_1^* \tilde{y}_1$, где $B_1^* \tilde{B}_1 = \hat{B}_1$, и выполним соответствующие преобразования подобия:

$$(19) \quad y_1 \mapsto H_{12} \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix} = y_1^*, \quad H_{12} = \begin{pmatrix} I_{m_0-p_1} & -B_1^* \\ O & I_{p_1} \end{pmatrix}, \quad \det H_{12} \neq 0,$$

$$H_{12} \begin{pmatrix} \bar{D}_1 & \hat{B}_1 \\ \tilde{D}_1 & \tilde{B}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_1 & O \\ \tilde{D}_1 & \tilde{B}_1 \end{pmatrix}, \quad H_{12} \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \\ \tilde{A}_{11} \end{pmatrix} H_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \\ \tilde{A}_{11} \end{pmatrix}, \quad H_{12} \begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \\ \tilde{Q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \\ \tilde{Q}_1 \end{pmatrix},$$

$C_{11}H_{12}^{-1} = \bar{C}_{11}$, $B_1^* = \hat{B}_1 \tilde{B}_1^+$ – реализация аннулирующей матрицы,

где $\tilde{B}_1^+ = \tilde{B}_1^T (\tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T)^{-1}$ – псевдообратная матрица матрицы \tilde{B}_1 . Неособые преобразования не изменяют ранга матрицы, а именно: $\text{rank}(D_1 B_1) = m_1 + p_1 = m_0 \Rightarrow \text{rank} \bar{D}_1 = m_1 = \dim \bar{y}_1, m_1 \neq 0$.

Отметим, что если в расщеплении (18)

$$(20) \quad \hat{B}_1 = O,$$

то неособая замена переменных (19) не выполняется. Для единобразия изложения будем полагать, что в этом случае H_{12} с точностью до перестановок столбцов равна единичной матрице.

П3) Во втором подблоке (19) p_1 координат вектора управления, соответствующих базисным столбцам матрицы \tilde{B}_1 , фиксируются в качестве управляющих воздействий для p_1 компонент вектора \tilde{y}_1 с помощью неособой замены $\tilde{B}_1 u = u_1$, а именно

$$(21) \quad u \mapsto H_{13} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ u_1 \\ u_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_2^* \end{pmatrix}, \quad H_{13} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ O & I_{p-p_1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = (\tilde{B}_{11} \quad \tilde{B}_{12}),$$

$$\det \tilde{B}_{11} \neq 0, \quad \det H_{13} \neq 0, \quad \tilde{u}_1, u_1 \in R^{p_1}, \quad u_2^* \in R^{p-p_1},$$

$$\tilde{u}_1 = \tilde{B}_{11}^{-1}(u_1 - \tilde{B}_{12}\bar{u}_2), \quad \tilde{B}_1 H_{13}^{-1} = I_{p_1}, \quad S_1 H_{13}^{-1} = (P_{11} \quad S_1^*).$$

В результате преобразований (19), (21) система (17) принимает вид

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{y}}_1 &= \bar{A}_{11}y_1^* + \bar{D}_1x_1 + \bar{Q}_1\eta = y_2, \\ \dot{\tilde{y}}_1 &= \tilde{A}_{11}y_1^* + \tilde{D}_1x_1 + u_1 + \tilde{Q}_1\eta, \\ \dot{x}_1 &= C_{11}^*y_1^* + G_1x_1 + P_{11}u_1 + S_1^*u_2^* + R_1\eta, \end{aligned}$$

где $y_2 \in R^{m_1}$ – сформированные неособым образом (19) линейные комбинации первых производных выходных переменных, подлежащие повторному дифференцированию. Тот факт, что неособая замена $y_2 = \bar{A}_{11}y_1^* + \bar{D}_1x_1 + \bar{Q}_1\eta$, где $\text{rank} \bar{D}_1 = \dim y_2 = m_1$ зависит от внешних возмущений, приведет после дифференцирования к появлению их производных, что допустимо в рассматриваемом классе систем.

П4) С целью исключить из дифференциального уравнения относительно y_2 управляющие воздействия u_1 , зарезервированные для переменных \tilde{y}_1 , введем неособую замену переменных

$$(23) \quad \hat{y}_2 = y_2 - B_{21}\tilde{y}_1, \quad B_{21} = \tilde{\bar{A}}_{11} + \bar{D}_1 P_{11}, \quad \bar{A}_{11}y_1^* = \bar{\bar{A}}_{11}\bar{y}_1 + \tilde{\bar{A}}_{11}\tilde{y}_1,$$

$$H_{14} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix}, \quad H_{14} = \begin{pmatrix} I_{p_1} & O \\ -B_{21} & I_{m_1} \end{pmatrix}, \quad \det H_{14} \neq 0, \quad \hat{y}_2 \in R^{m_1}.$$

Переходим на второй шаг, где аналогичные преобразования выполняются для последней подсистемы (22) с фиктивным выходом (23), который возьмем за основу изложения как более общий случай, по сравнению с (A1**, B1**, C1**).

Шаг 2. А) На втором шаге с учетом $\text{rank} \bar{D}_1 = m_1 \neq 0$ выполняется одно из условий:

$$(A2^*) \quad m_0 + m_1 = n \quad (\dim \hat{y}_2 = \dim x_1),$$

$$(A2^{**}) \quad m_0 + m_1 < n \quad (\dim \hat{y}_2 < \dim x_1).$$

A2*, П1) Все компоненты вектора состояния x_1 связаны взаимнооднозначным соответствием с компонентами вектора \hat{y}_2 : $x_1 = \bar{D}_1^{-1}(\hat{y}_2 + B_{21}\tilde{y}_1 - \bar{A}_{11}y_1^* - \bar{Q}_1\eta)$, $\det \bar{D}_{1(m_1 \times m_1)} \neq 0$. После дифференцирования и обратной подстановки имеем

$$(24) \quad \dot{\hat{y}}_2 = A_{21}y_1^* + A_{22}\hat{y}_2 + B_2u_2^* + Q_2f_2, \quad f_2 = \text{col}(\eta, \dot{\eta}).$$

Б) Обозначим $\text{rank} B_2 = p_2$, $p_1 + p_2 \leq p$. В системе (25) выполняется одно из условий:

$$(B2^*) \quad p_2 = m_1 \quad (\text{rank} B_2 = \dim \hat{y}_2),$$

$$(B2^{**}) \quad p_2 < m_1 \quad (\text{rank} B_2 < \dim \hat{y}_2).$$

В случае (A2*, B2*) все компоненты выходных переменных обеспечены своим управляющим воздействием, получена полная СБКФ, состоящая из двух блоков – первые две подсистемы (22) и (24), на основе которой переходим к задаче синтеза обратной связи. В случае (A2*, B2**) часть выходных переменных размерности $(m_1 - \text{rank} B_2)$ не обеспечена истинным управлением и

будет вынуждена отрабатывать «чужие» задающие воздействия. Процедура заканчивается, СБКФ не существует.

A2**, П1) В отличие от замены переменных H_{11} , начиная со второго шага, в неособых преобразованиях участвуют предыдущие переменные и внешние возмущения. Перегруппируем компоненты вектора состояния $x_1 = \text{col}(\tilde{x}_2, x_2)$, $\tilde{x}_2 \in R^{m_1}$, $x_2 \in R^{n-m_0-m_1}$ так, чтобы в линейном разложении $\hat{y}_2 = \bar{\bar{A}}_{11}\bar{y}_1 - \bar{D}_1P_{11}\tilde{y}_1 + \bar{Q}_1\eta + D_{21}\tilde{x}_2 + D_{22}x_2$ выполнялось условие $\det D_{21} \neq 0$, что позволяет установить взаимнооднозначное соответствие между переменными (23) и координатами вектора состояния \tilde{x}_2 :

$$(25) H_{21} \begin{pmatrix} y_1^* \\ \eta \\ \tilde{x}_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \eta \\ \hat{y}_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad H_{21} = \begin{pmatrix} I_{m_0} & O & O & O \\ O & I_q & O & O \\ (\bar{\bar{A}}_{11} - \bar{D}_1P_{11}) & \bar{Q}_1 & D_{21} & D_{22} \\ O & O & O & I_{n-m_0-m_1} \end{pmatrix},$$

где $\det H_{21} \neq 0$. После дифференцирования и обратной подстановки в силу (25) имеем:

$$(26) \begin{aligned} \dot{\hat{y}}_2 &= A_{21}y_1^* + A_{22}\hat{y}_2 + D_2x_2 + B_2u_2^* + Q_2f_2, \\ \dot{x}_2 &= C_{21}y_1^* + \hat{C}_{22}\hat{y}_2 + G_2x_2 + P_{21}u_1 + S_2u_2^* + R_2\eta. \end{aligned}$$

В первом уравнении (26) выполняется комплексный анализ матриц D_2 , B_2 в контексте решаемой задачи.

В) В первом уравнении (26) выполняется одно из условий: (B2*) или (B2**). В случае (A2**, B2*) все компоненты выходных переменных «обеспечены» своим управляющим воздействием, получена неполная СБКФ, переходим к проверке работоспособности (10) системы (26). В случае (A2**, B2**) приступаем к проверке следующего условия.

С) В первом уравнении (26) выполняется одно из условий:
(C2*) $\text{rank}(D_2 \ B_2) < m_1$ или $\text{rank}(D_2 \ B_2) = m_1$ и $p_1 + p_2 = p$,
(C2**) $\dim \hat{y}_2 = \text{rank} D_2 = m_1 \quad p_2 = 0$,

(C2***) $\dim \hat{y}_2 = \text{rank}(D_2 \ B_2) = m_2 + p_2 = m_1$, $0 < p_2$, $p_1 + p_2 < p$.

В первом варианте (C2*) часть выходных переменных не обеспечивается фиктивным управлением, в качестве которого рассматриваются фазовые переменные x_2 , а во втором – уже фиктивные управления x_2 не обеспечены истинным управлением. Процедура заканчивается, СБКФ не существует.

В случаях (C2**), (C2***) все выходные переменные обеспечены фиктивным и/или истинным управлением.

*Результат второго шага в случае (A2**, B2**, C2**).* В системе (26) $B_2 = O$, т.е. весь вектор первых производных выходных переменных подлежит повторному дифференцированию. Для единообразия изложения обозначим $y_3 = A_{21}y_1^* + A_{22}\hat{y}_2 + \bar{D}_2x_2 + Q_2f_2$, где $D_2 := \bar{D}_2$, $\text{rank}\bar{D}_2 = \dim \hat{y}_2$, тогда первое уравнение (26) примет вид второго блока СБКФ $\dot{\hat{y}}_2 = y_3$. Переходим на третий шаг процедуры, где аналогичные построения применяются для второй подсистемы (26) с фиктивным выходом $y_3 \in R^{m_2}$, $m_2 = m_1$.

В случае (A2**, B2**, C2***) выполняем аннулирующие преобразования, которые позволяют непосредственно сформировать комбинацию вторых производных выходных переменных, которые не зависят от управления и подлежат повторному дифференцированию.

П2) В соответствие с логикой изложения, преобразования данного пункта выполняются, когда $0 < p_2 < m_1$.

С помощью перестановки строк выполним (аналогично (18)) расщепление первой подсистемы (26)

$$(27) \quad B_2 = \begin{pmatrix} \bar{B}_2 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{y}_2 = \begin{pmatrix} \bar{\hat{y}}_2 \\ \tilde{\hat{y}}_2 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{22} \\ \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} \bar{D}_2 \\ \tilde{D}_2 \end{pmatrix} \text{ и др.,}$$

где $\text{rank}B_2 = \text{rank}\bar{B}_2 = \dim \bar{\hat{y}}_2 = p_2$, $\dim \tilde{\hat{y}}_2 = m_1 - p_2 = m_2$.

Обнулим линейно зависимые строки матрицы B_2 с помо-

щью неособой замены переменных $\bar{y}_2 = \hat{y}_2 - B_2^* \tilde{y}_2$, где $B_2^* \tilde{B}_2 = \hat{B}_2$ (например, $B_2^* = \hat{B}_2 \tilde{B}_2^+$, $\tilde{B}_2^+ = \tilde{B}_2^T (\tilde{B}_2 \tilde{B}_2^T)^{-1}$), и выполним соответствующие преобразования подобия:

$$(28) \quad \hat{y}_2 \mapsto H_{22} \begin{pmatrix} \bar{y}_2 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_2 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} = y_2^*, \quad H_{22} = \begin{pmatrix} I_{m_1-p_2} & -B_2^* \\ O & I_{p_2} \end{pmatrix},$$

$$\det H_{22} \neq 0,$$

$$H_{22} \begin{pmatrix} \hat{D}_2 & \hat{B}_2 \\ \tilde{D}_2 & \tilde{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_2 & O \\ \tilde{D}_2 & \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \quad H_{22} \begin{pmatrix} \hat{A}_{22} \\ \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} H_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{22} \\ \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \text{ и др.,}$$

$$\text{где } \text{rank}(D_2, B_2) = m_2 + p_2 = m_1 \Rightarrow \text{rank} \bar{D}_2 = m_2 = \dim \bar{y}_2, \quad m_2 \neq 0.$$

Если в расщеплении (27) $\hat{B}_2 = O$, то неособая замена переменных (28) не выполняется. Для единства изложения будем полагать, что в этом случае H_{22} с точностью до перестановок столбцов равна единичной матрице.

П3) Во втором подблоке (28) p_2 координат вектора управления u_2^* , соответствующих базисным столбцам матрицы \tilde{B}_2 , фиксируются в качестве управляющих воздействий для p_2 компонент вектора \tilde{y}_2 с помощью неособой замены $\tilde{B}_2 u_2^* = u_2$:

$$(29) \quad u_2^* \mapsto H_{23} \begin{pmatrix} \tilde{u}_2 \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix}, \quad H_{23} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \\ O & I_{p-p_1-p_2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = (\tilde{B}_{21} \ \tilde{B}_{22}),$$

$$\det \tilde{B}_{21} \neq 0, \quad \det H_{23} \neq 0, \quad \tilde{u}_2, u_2 \in R^{p_2}, \quad u_3^* \in R^{p-p_1-p_2},$$

$$\tilde{u}_2 = \tilde{B}_{21}^{-1}(u_2 - \tilde{B}_{22} u_3^*), \quad \tilde{B}_2 H_{23}^{-1} = I_{p_2}, \quad S_2 H_{23}^{-1} = (P_{22} \ S_2^*).$$

В результате (28)–(29) система (26) принимает вид

$$\dot{\bar{y}}_2 = \bar{A}_{21} y_1^* + \bar{A}_{22} y_2^* + \bar{D}_2 x_2 + \bar{Q}_2 f_2 = y_3,$$

$$(30) \quad \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{A}_{21} y_1^* + \tilde{A}_{22} y_2^* + \tilde{D}_2 x_2 + u_2 + \tilde{Q}_2 f_2,$$

$$\dot{x}_2 = C_{21} y_1^* + C_{22} y_2^* + G_2 x_2 + P_{21} u_1 + P_{22} u_2 + S_2^* u_3^* + R_2 \eta.$$

где $y_3 \in R^{m_2}$ – сформированные неособым образом (28) линей-

ные комбинации вторых производных выходных переменных, подлежащие повторному дифференцированию.

П4) С целью исключить из дифференциального уравнения относительно y_3 управляющие воздействия u_1, u_2 , зарезервированные для переменных \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 , введем неособую замену

$$(31) \quad \dot{\hat{y}}_3 = y_3 - B_{31}\tilde{y}_1 - B_{32}\tilde{y}_2,$$

$$H_{24} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \hat{y}_3 \end{pmatrix}, \quad H_{24} = \begin{pmatrix} I_{p_1} & O & O \\ O & I_{p_2} & O \\ -B_{31} & -B_{32} & I_{m_1} \end{pmatrix}, \quad \det H_{24} \neq 0,$$

$$\text{где } B_{31} = \tilde{\bar{A}}_{21} + \bar{D}_2 P_{21}, \quad B_{32} = \tilde{\bar{A}}_{22} + \bar{D}_2 P_{22}, \quad \bar{A}_{21} y_1^* = \bar{\bar{A}}_{21} \bar{y}_1 + \tilde{\bar{A}}_{21} \tilde{y}_1, \\ \bar{A}_{22} y_2^* = \bar{\bar{A}}_{22} \bar{y}_2 + \tilde{\bar{A}}_{22} \tilde{y}_2.$$

Переходим на третий шаг, где аналогичные преобразования выполняются для последней подсистемы (30) с фиктивным выходом (31), и т.д. На следующих шагах выполняемые преобразования принципиально не отличаются от преобразований второго шага, на каждом шаге проверяются условия окончания или пролонгации процедуры. Ограничимся ситуацией, когда процедура закончится именно на третьем шаге по одному из указанных ниже условий.

Шаг 3 (последний). А) На третьем шаге с учетом $\text{rank} \bar{D}_2 = m_2 \neq 0$ выполняется одно из условий:

$$(A3^*) \quad m_0 + m_1 + m_2 = n \quad (\dim \hat{y}_3 = \dim x_2),$$

$$(A3^{**}) \quad m_0 + m_1 + m_2 < n \quad (\dim \hat{y}_3 < \dim x_2).$$

A3*, П1) Все компоненты вектора состояния x_2 связаны взаимнооднозначным соответствием с компонентами вектора \hat{y}_3 (31), $\det \bar{D}_{2(m_2 \times m_2)} \neq 0$. После дифференцирования и обратной подстановки имеем

$$(32) \quad \dot{\hat{y}}_3 = A_{31} y_1^* + A_{32} y_2^* + A_{33} \hat{y}_3 + B_3 u_3^* + Q_3 f_3, \quad f_3 = \text{col}(\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}).$$

В) Обозначим $\text{rank}B_3 = p_3$, $p_1 + p_2 + p_3 \leq p$. В системе (32) выполняется одно из условий:

$$(B3^*) \quad p_3 = m_2 \quad (\text{rank}B_3 = \dim \hat{y}_3),$$

$$(B3^{**}) \quad p_3 < m_2 \quad (\text{rank}B_3 < \dim \hat{y}_3).$$

В случае (A3*, B3*) все компоненты выходных переменных обеспечены своим управляющим воздействием, получена полная СБКФ, состоящая из трех блоков – первые две уравнения систем (22), (30) и (32), на основе которой переходим к задаче синтеза обратной связи.

В случае (A3*, B3**) часть выходных переменных размерности $(m_2 - \text{rank}B_3)$ не обеспечена истинным управлением и будет вынуждена отрабатывать «чужие» задающие воздействия. Процедура заканчивается, СБКФ не существует. Для решения поставленной задачи требуется аппаратная доработка системы, а именно, ввод в систему (32) дополнительных каналов управления так, чтобы обеспечить (B3*).

A3**, П1) Перегруппируем компоненты вектора состояния $x_2 = \text{col}(\tilde{x}_3, x_3)$, $\tilde{x}_3 \in R^{m_2}$, $x_3 \in R^{n-m_0-m_1-m_2}$ так, чтобы в линейном разложении $\hat{y}_3 = \bar{A}_{21}\bar{y}_1 - \bar{D}_2P_{21}\tilde{y}_1 + \bar{A}_{22}\bar{y}_2 - \bar{D}_2P_{22}\tilde{y}_2 + \bar{Q}_2f_2 + D_{31}\tilde{x}_3 + D_{32}x_3$ выполнялось условие $\det D_{31} \neq 0$, что позволяет установить взаимнооднозначное соответствие между переменными (32) и координатами \tilde{x}_3 вектора состояния. Соответствующее неособое преобразование H_{31} , $\det H_{31} \neq 0$, в котором задействованы внешние возмущения и их первые производные, аналогично (25). После дифференцирования и обратной подстановки имеем:

$$(33) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{y}}_3 &= A_{31}y_1^* + A_{32}y_2^* + A_{33}\hat{y}_3 + D_3x_3 + B_3u_3^* + Q_3f_3, \\ \dot{x}_3 &= C_{31}y_1^* + C_{32}y_2^* + C_{33}\hat{y}_3 + G_3x_3 + P_{31}u_1 + P_{32}u_2 + S_3u_3^* + R_3f_2. \end{aligned}$$

Б) В первом уравнении (33) выполняется одно из условий: (B2*) или (B2**). Сделанное предположение, что процедура

закончится на третьем шаге, означает, что в случае (A2**, B2**) выполняется условие

$$(C3*) \quad \text{rank}(D_3 B_3) < m_2 ; \quad \text{rank}(D_3 B_3) = m_2 , \quad p_1 + p_2 + p_3 = p ,$$

которое означает, что СБКФ не существует, так как в первом варианте часть выходных переменных не обеспечивается фиктивным управлением, в качестве которого рассматриваются фазовые переменные x_3 , а во втором – уже фиктивные управления x_3 не обеспечены истинным управлением. Для решения поставленной задачи требуется аппаратная доработка системы: либо ввод в первое уравнение системы (33) дополнительных каналов управления так, чтобы обеспечить (B3*); либо ввод дополнительных внутренних связей, обеспечивающих $\text{rank}(D_3 B_3) = m_2$, и дальнейшее исследование системы (33). На практике выбирают наиболее реализуемый вариант, вплоть до корректировки цели управления (2).

В случае (A3**, B3*) все компоненты выходных переменных «обеспечены» своим управляющим воздействием, для их фиксации аналогично (29) выполняется неособое преобразование $B_3 u_3^* = u_3$:

$$u_3^* \mapsto H_{33} \begin{pmatrix} \tilde{u}_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad H_{33} = \begin{pmatrix} B_3^1 & B_3^2 \\ O & I_{p-p_1-p_2-p_3} \end{pmatrix}, \quad B_3 = (B_3^1 \ B_3^2),$$

$$\det B_3^1 \neq 0, \quad \det H_{33} \neq 0, \quad \tilde{u}_3, u_3 \in R^{p_3}, \quad u_4 \in R^{p-p_1-p_2-p_3},$$

$$B_3 H_{33}^{-1} = I_{p_3}, \quad S_3 H_{33}^{-1} = (P_{33} \ P_{34}).$$

В результате получена неполная СБКФ системы (1), которая в общем случае (при пролонгации первых двух шагов по признаку (A**, B**, C**)) и с учетом выполненных замен переменных имеет вид, соответствующий (4)–(5), а именно

$$(34) \quad \dot{\bar{y}}_1 = y_2, \quad \dot{\tilde{y}}_1 = \sum_{j=1}^3 \tilde{A}_{1j} y_j^* + \tilde{D}_1 x_3 + u_1 + \tilde{Q}_1 f_2,$$

$$\dot{\bar{y}}_2 = y_3, \quad \dot{\tilde{y}}_2 = \sum_{j=1}^3 \tilde{A}_{2j} y_j^* + \tilde{D}_2 x_3 + u_2 + \tilde{Q}_2 f_2,$$

$$(35) \quad \begin{aligned} \dot{y}_3^* &= \sum_{j=1}^3 A_{3j} y_j^* + D_3 x_3 + u_3 + Q_3 f_3, \\ \dot{x}_3 &= \sum_{j=1}^3 C_{3j} y_j^* + G_3 x_3 + \sum_{j=1}^4 P_{3j} u_j + R_3 f_2, \end{aligned}$$

где $\hat{y}_3 := y_3^*$, для простоты изложения оставлены прежние обозначения матриц, изменившихся в результате выполнения преобразований подобия; с учетом H_{12} (19), H_{14} (23), H_{22} (28), H_{24} (31) имеем

$$(36) \quad y_1^* = H_{12} y_1, \quad y_2 = H_{22}^{-1} y_2^* + B_{21} \tilde{y}_1 = \begin{pmatrix} \bar{y}_2 + B_2^* \tilde{y}_2 + B_{21}^3 \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 + B_{21}^2 \tilde{y}_1 \end{pmatrix},$$

$$y_3 = y_3^* + B_{31} \tilde{y}_1 + B_{32} \tilde{y}_2.$$

Система (34) будет работоспособной, если решения системы (35) ограничены (10). Для этого требуется, во-первых, ограниченность внешних составляющих правой части уравнения (35), что оговаривалось в постановке задачи; во-вторых, устойчивость собственных движений $\operatorname{Re} \lambda_i(G_3) < 0$, если резерв управляемых воздействий исчерпан и $\operatorname{rank} P_{34} = 0$. При $\operatorname{rank} P_{34} \neq 0$ требуется не только управляемость (стабилизируемость) пары (G_3, P_{34}) , но и возможность реализации обратной связи, а именно, наблюдаемость переменных x_3 относительно выходных переменных y_1 с учетом возмущений [2].

Пусть в системе (35) условие (10) выполняется. Прежде чем переходить к синтезу обратной связи, выполним в системе (34) расщепление выходных переменных на непересекающиеся группы с одинаковой относительной степенью (3): $\tilde{y}_1 \in R^{p_1}$ с относительной степенью $v_1 = 1$, $\bar{y}_1 = \operatorname{col}(y_{12}, y_{13})$, $y_{12} \in R^{p_2} - v_2 = 2$, $y_{13} \in R^{p_3} - v_3 = 3$, что с учетом (36) позволяет раскрыть связи между блоками и представить систему (34) в виде блочно-децентрализованных подсистем вход–выход:

$$\dot{\tilde{y}}_1 = \sum_{j=1}^3 \tilde{A}_{1j} y_j^* + \tilde{D}_1 x_3 + \mathbf{u}_1 + \tilde{Q}_1 f_2;$$

$$\dot{y}_{12} = \tilde{y}_2 + B_{21}^2 \tilde{y}_1, \quad \dot{\tilde{y}}_2 = \sum_{j=1}^3 \tilde{A}_{2j} y_j^* + \tilde{D}_2 x_3 + \mathbf{u}_2 + \tilde{Q}_2 f_2;$$

$$(37) \quad \dot{y}_{13} = \bar{y}_2 + B_{21}^3 \tilde{y}_1 + B_2^* \tilde{y}_2, \quad \dot{\bar{y}}_2 = y_3^* + B_{31} \tilde{y}_1 + B_{32} \tilde{y}_2,$$

$$\dot{y}_3^* = \sum_{j=1}^3 A_{3j} y_j^* + D_3 x_3 + \mathbf{u}_3 + Q_3 f_3,$$

где жирным шрифтом выделены фиктивные и истинные управлениа каждого блока.

Структурная схема системы (37) показана на рис. 2.

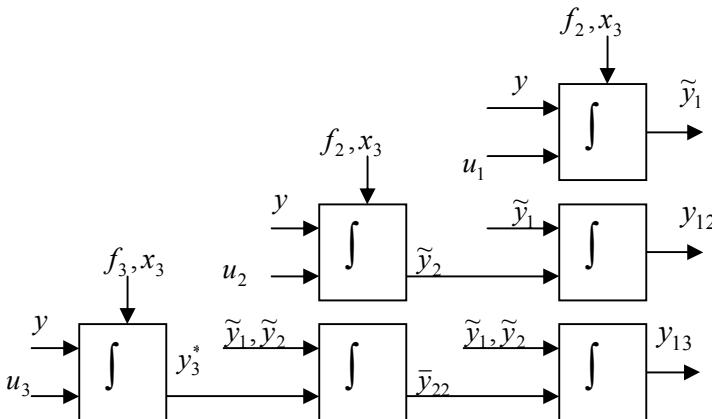


Рис. 2. Структурная схема системы (37)

Как видим, в системе (37) уравнения относительно каждой группы компонент вектора выходных переменных $y_1^* = \text{col}(\tilde{y}_1, \bar{y}_{12}, \bar{y}_{13})$ являются первыми блоками блочно-управляемых и одновременно блочно-наблюдаемых подсистем. Размерность переменных состояния подсистемы (37) p_i ,

$i = \overline{1,3}$ можно трактовать как совместные индексы управляемости и наблюдаемости системы (1) относительно выходных переменных с учетом возмущений, подлежащих дифференцированию. Существенно, что если на первом шаге процедуры выполняются условия (С1**) или (20), то вектор y_1^* получен из вектора y_1 путем перестановки строк – операция, которая допустима в задаче автономного управления [11, 13]. В этом случае на основе системы (37) может быть решена и задача автономного управления выходными переменными.

Как будет показано в следующем разделе, в процедуре трансформации можно упростить промежуточные преобразования и не выполнять totally все преобразования подобия, детализирующие правые части подсистем относительно переменных $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, y_3^*$, на которые непосредственно действуют управляющие воздействия, благодаря используемым на этапе синтеза специальным методам.

4. Декомпозиционный синтез задачи слежения

В общем случае с учетом (19) регулируемыми переменными в СБКФ (37) являются линейные комбинации компонент вектора выходных переменных $H_{12}y_1 = y_1^* = \text{col}(\tilde{y}_1, y_{12}, y_{13})$, $\det H_{12} \neq 0$. Данное преобразование не является препятствием в решении задачи слежения за заданными траекториями, которые однозначно пересчитываются в задающие воздействия для регулируемых переменных: $H_{12}g = g^* = \text{col}(\tilde{g}, g_2, g_3)$.

Для системы (37) ставится задача синтеза обратной связи, обеспечивающей отработку выходными переменными y_1 программных траекторий g^* в асимптотике (2). Данная задача сводится к задаче стабилизации невязок

(38) $\tilde{e}_1 = \tilde{y}_1 - \tilde{g}_1 \rightarrow 0$, $\tilde{e}_1 \in R^{p_1}$, $e_{1i} = y_{1i} - g_i \rightarrow 0$, $e_{1i} \in R^{p_i}$, $i = 2, 3$
и решается процедурно на основе блочного принципа [4, 13], что

позволяет разделить решение задачи синтеза размерности $l = p_1 + 2p_2 + 3p_3$ на последовательно решаемые элементарные задачи формирования фиктивных, а потом и истинных управлений в каждой i -й ($i = \overline{1,3}$) цепочке (37). Информационная поддержка базовых алгоритмов управления осуществляется с помощью наблюдателя состояния на скользящих режимах. Задача наблюдения также разделяется на независимо решаемые элементарные подзадачи синтеза корректирующих воздействий. Нижеследующая процедура без ограничений общности справедлива для СБКФ (4) любого порядка.

Процедура декомпозиционного синтеза

Шаг 1. Представим первую подсистему (37) относительно невязки (38)

$$(39) \quad \dot{\tilde{e}}_1 = \tilde{\varphi}_1 + u_1,$$

где $\tilde{\varphi}_1 = \sum_{j=1}^3 \tilde{A}_{1j} y_j^* + \tilde{D}_1 x_3 + \tilde{Q}_1 f_2 - \dot{\tilde{g}}_1$. С учетом априорных предположений об ограниченности внешних возмущений, задающих воздействий и их производных, а также фазовых переменных, полагаем $\|\tilde{\varphi}_1\| \leq \tilde{F}_1 \quad \forall t \geq 0$, где \tilde{F}_1 – известная константа.

Замечание 1. Первый способ обеспечения инвариантности в подсистеме (39) – подавление неопределенностей путем формирования разрывных управлений

$$(40) \quad u_1 = -M_1 \text{sign} \tilde{e}_1, \quad \text{sign} \tilde{e}_1 = \text{col}(\text{sign} \tilde{e}_{11}, \dots, \text{sign} \tilde{e}_{1p_1}),$$

амплитуда которых выбирается на основе достаточных условий существования скользящих режимов [14]:

$$(41) \quad \tilde{e}_1^T \dot{\tilde{e}}_1 < 0 \Rightarrow \tilde{e}_1^T (\tilde{\varphi}_1 - M_1 \text{sign} \tilde{e}_1) \leq \|\tilde{e}_1\| (\tilde{F}_1 - M_1) < 0 \Rightarrow M_1 > \tilde{F}_1.$$

При выполнении условия (41) за конечное время $t_1 > 0$ возникнет скользящий режим на многообразии $\tilde{e}_1 = 0 \Rightarrow \tilde{y}_1 = \tilde{g}_1$, что обеспечивает решение задачи слежения (38) в подсистеме (39). Переменные состояния $\tilde{e}_1(t) = \tilde{y}_1(t) - \tilde{g}_1(t)$ известны, реализация закона (40) не требует построения наблюдателя состояния.

Если в рассматриваемой системе не предусмотрена реализация разрывного управления (40), то тогда прибегаем ко второму способу – формированию комбинированного управления [10] с непрерывной и компенсирующей составляющими

$$(42) \quad u_1 = -K_{11}\tilde{e}_1 - \tilde{\varphi}_1,$$

где выбор коэффициентов $K_{11} = \text{diag}(k_{11,i})$, $k_{11,i} = \text{const} > 0$ определяет темпы сходимости в нуль переменных замкнутой системы $\dot{\tilde{e}}_1 = -K_{11}\tilde{e}_1$.

Для информационной поддержки закона управления (42) на основе системы (39) построим наблюдатель состояния на скользящих режимах [6, 7] вида $\dot{\tilde{z}}_1 = u_1 + \tilde{v}_1$, где $\tilde{z}_1 \in R^{p_1}$ – вектор состояния, $\tilde{v}_1 \in R^{p_1}$ – вектор корректирующих воздействий наблюдателя, которые выбираются в классе разрывных функций так, чтобы решить задачу стабилизации относительно невязок $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_1 - \tilde{z}_1$: $\dot{\tilde{e}}_1 = \tilde{\varphi}_1 - \tilde{v}_1$. Сформируем разрывные корректирующие воздействия $\tilde{v}_1 = M_{11} \text{sign} \tilde{e}_1$ по измеряемым переменным $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_1 - \tilde{z}_1$, где $M_{11} > 0$ – амплитуда разрывной коррекции, по аналогии с (41) $\tilde{e}_1^T \tilde{e}_1 < 0 \Rightarrow M_{11} > \tilde{F}_1$. Тогда за конечное время $t_{11} > 0$ возникнет скользящий режим на многообразии $S_{11} = \{\tilde{e}_1 = 0\} \Rightarrow \tilde{z}_1 = \tilde{e}_1$. При $t > t_{11}$ из уравнения статики $\dot{\tilde{e}}_1 = \tilde{\varphi}_1 - \tilde{v}_{1\text{eq}} = 0$ имеем оценки компенсирующей составляющей $\tilde{v}_{1\text{eq}} = \tilde{\varphi}_1$ закона управления (42), значения которых получим с выходов линейных фильтров первого порядка с малой постоянной времени [14]:

$$(43) \quad \lambda \dot{\tau} = -\tau + \tilde{v}_{1\text{eq}}, \quad \tau \in R^{p_1}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +0} \tau = \tilde{v}_{1\text{eq}}.$$

Используемая техника построения наблюдателей состояния на скользящих режимах позволяет обеспечить асимптотическую сходимость к программным траекториям (38) и не требует знания оператора подсистемы (39), в том числе, внешних возмущений и производных задающих воздействий, требуется только их

ограниченность.

Шаг 2. Представим первое уравнение второй цепочки (37) относительно невязки (38) $\dot{e}_{12} = \tilde{y}_2 + \varphi_{12}$, где $\varphi_{12} = B_{21}^2 \tilde{y}_1 - \dot{g}_2$, $\|\varphi_{12}\| \leq F_{12} = \text{const}$, \tilde{y}_2 – фиктивное управление, которое выбирается в комбинированном виде

$$(44) \quad \tilde{y}_2 = -K_{12} e_{12} - \varphi_{12},$$

где $K_{12} = \text{diag}(k_{12,i})$, $k_{12,i} = \text{const} > 0$.

Согласно блочному принципу сформированная зависимость (44) обеспечивается с помощью истинного управления u_2 при решении задачи стабилизации невязки между реальным и выбранным фиктивным управлением $\tilde{e}_2 = \tilde{y}_2 + K_{12} e_{12} + \varphi_{12}$. С учетом введенных неособых замен переменных вторая подсистема (37) принимает вид:

$$(45) \quad \dot{e}_{12} = -K_{12} e_{12} + \tilde{e}_2, \quad \dot{\tilde{e}}_2 = \tilde{\varphi}_2 + u_2,$$

где $\tilde{\varphi}_2 = \sum_{j=1}^3 \tilde{A}_{2j} y_j^* + \tilde{D}_2 x_3 + \tilde{Q}_2 f_2 + K_{12}(-K_{12} e_{12} + \tilde{e}_2) + B_{21}^2 \dot{\tilde{y}}_1 - \ddot{g}_2$,

$\|\tilde{\varphi}_2\| \leq \tilde{F}_2 = \text{const}$. Комбинированный закон управления

$$(46) \quad u_2 = -K_{22} \tilde{e}_2 - \tilde{\varphi}_2,$$

где $K_{22} = \text{diag}(k_{22,i})$, $k_{22,i} = \text{const} > 0$, приведет к замкнутой подсистеме $\dot{\tilde{e}}_2 = -K_{22} \tilde{e}_2$. Другой способ – формирование в системе (45) разрывного истинного управления (см. замечание 1).

Для информационной поддержки базового закона управления (46) на основе системы (45) построим наблюдатель состояния на скользящих режимах вида $\dot{z}_{12} = -K_{12} z_{12} + \tilde{z}_2 + v_{12}$, $\dot{\tilde{z}}_2 = u_2 + \tilde{v}_2$, и запишем систему дифференциальных уравнений относительно невязок $\varepsilon_{12} = e_{12} - z_{12}$, $\tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{e}_2 - \tilde{z}_2$:

$$(47) \quad \dot{e}_{12} = -K_{12} \varepsilon_{12} + \tilde{\varepsilon}_2 - v_{12}, \quad \dot{\tilde{e}}_2 = \tilde{\varphi}_2 - \tilde{v}_2.$$

Используя технику каскадного синтеза наблюдателей состояния на скользящих режимах [6, 7], в первой подсистеме (47) сформируем разрывные корректирующие воздействия

$v_{12} = M_{12} \text{sign} \varepsilon_{12}$. При $\varepsilon_{12}^T \dot{\varepsilon}_{12} < 0 \Rightarrow M_{12} > \|\tilde{\varepsilon}_2\|$ за конечное время $t_{12} > 0$ возникнет скользящий режим на многообразии $S_{12} = \{\varepsilon_{12} = 0\} \Rightarrow z_{12} = e_{12}$. При $t > t_{12}$ из уравнения статики $\dot{\varepsilon}_{12} = \tilde{\varepsilon}_2 - v_{12\text{eq}} = 0$ имеем оценки $v_{12\text{eq}} = \tilde{\varepsilon}_2$, значения которых получим с выходов фильтров типа (43), и которые используем для формирования разрывной коррекции во второй подсистеме (47): $\tilde{v}_2 = M_{22} \text{sign} \tilde{\varepsilon}_2$. При $\tilde{\varepsilon}_2^T \tilde{\varepsilon}_2 < 0 \Rightarrow M_{22} > \tilde{F}_2$ за конечное время $t_{22} > t_{12}$ возникнет скользящий режим на многообразии $S_{22} = \{S_{12} \cap \tilde{\varepsilon}_2 = 0\} \Rightarrow \tilde{z}_2 = \tilde{e}_2$. При $t > t_{22}$ из уравнения статики $\dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = \tilde{\varphi}_2 - \tilde{v}_{2\text{eq}} = 0$ имеем оценки компенсирующей составляющей $\tilde{v}_{2\text{eq}} = \tilde{\varphi}_2$ закона управления (46), значения которых получим с выходов фильтров типа (43).

Последняя цепочка (37) содержит три блока интеграторов. Это означает, что согласно идеологии блочного синтеза фиктивное управление, сформированное в ее первой подсистеме, подлежит двухкратному дифференцированию. При этом только к первым производным фиктивного управления предъявляется требование гладкости (в контексте решаемой задачи они не должны зависеть от «чужих» управляющих воздействий, которые могут иметь разрывной характер и не подлежать дифференцированию). Ко вторым производным требований гладкости не предъявляется, так они попадают в пространство истинного управления, где сосредотачиваются все имеющиеся неопределенности. Таким образом, начиная с третьего шага, теперь уже на этапе синтеза требуется формировать фиктивные управление, дифференцируемые требуемое число раз. Заметим, что в силу организации СБКФ отслеживание данного требования и в общем случае (4)–(5) не составляет проблемы.

Шаг 3. Представим первое уравнение третьей цепочки (37) относительно невязки (38) с учетом введенных замен переменных ($\tilde{y}_1 = \tilde{e}_1 + \tilde{g}_1$, $\tilde{y}_2 = \tilde{e}_2 - K_{12}e_{12} - B_{21}^2 \tilde{y}_1 + \dot{g}_2$), сформированных

на первых двух шагах:

$$\dot{e}_{13} = B^* \tilde{e}_1 + B_2^* \tilde{e}_2 + \varphi_{13} + \bar{y}_2, \quad B^* = B_{21}^3 - B_2^* B_{21}^2,$$

где в вектор-функции $\varphi_{13} = B^* \tilde{g}_1 + B_2^* (-K_{12} e_{12} + \dot{g}_2) - \dot{g}_3$ собраны компоненты, первые полные производные которых являются гладкими, $\|\varphi_{13}\| \leq F_{13} = \text{const}$. Сформируем фиктивное управление в виде $\bar{y}_2 = -K_{13} e_{13} - \varphi_{13}$, $K_{13} = \text{diag}(k_{13,i})$, $k_{13,i} = \text{const} > 0$. Составим дифференциальное уравнение относительно невязки $\bar{e}_2 = \bar{y}_2 + K_{13} e_{13} + \varphi_{13}$, а именно, $\dot{\bar{e}}_2 = \bar{\varphi}_2 + y_3^*$, где вектор-функция $\bar{\varphi}_2 = B_{31} \tilde{y}_1 + B_{32} \tilde{y}_2 + K_{13} \dot{e}_{13} + \dot{\varphi}_{13}$ ($\|\bar{\varphi}_2\| \leq \bar{F}_2 = \text{const}$) состоит из компонент, подлежащих дифференцированию, что позволяет сформировать фиктивное управление в виде $y_3^* = -K_{23} \bar{e}_2 - \bar{\varphi}_2$, где $K_{23} = \text{diag}(k_{23,i})$, $k_{23,i} = \text{const} > 0$.

С учетом введенных неособых замен переменных и составив дифференциальное уравнение относительно невязки $e_3 = y_3^* + K_{23} \bar{e}_2 + \bar{\varphi}_2$, третья цепочка (37) принимает вид:

$$(48) \quad \dot{e}_{13} = B^* \tilde{e}_1 + B_2^* \tilde{e}_2 - K_{13} e_{13} + \bar{e}_2, \quad \dot{\bar{e}}_2 = -K_{23} \bar{e}_2 + e_3, \quad \dot{e}_3 = \varphi_3 + u_3,$$

где $\varphi_3 = \sum_{j=1}^3 A_{3j} y_j^* + D_3 x_3 + Q_3 f_3 + K_{23} \dot{\bar{e}}_2 + \dot{\bar{\varphi}}_2$, $\|\varphi_3\| \leq F_3 = \text{const}$.

Комбинированный закон управления

$$(49) \quad u_3 = -K_{33} e_3 - \varphi_3,$$

где $K_{33} = \text{diag}(k_{33,i})$, $k_{33,i} = \text{const} > 0$, приведет к замкнутой подсистеме $\dot{e}_3 = -K_{33} e_3$.

Для системы (48) построим наблюдатель состояния с учетом полученной на втором шаге оценки \tilde{e}_2 и имеющихся измерений

$$\dot{z}_{13} = B^* \tilde{e}_1 + B_2^* \tilde{z}_2 - K_{13} z_{13} + \bar{z}_2 + v_{13}, \quad \dot{\bar{z}}_2 = -K_{23} \bar{z}_2 + z_3 + \bar{v}_2,$$

$\dot{z}_3 = u_3 + v_3$, и запишем систему дифференциальных уравнений относительно невязок $\varepsilon_{13} = e_{13} - z_{13}$, $\bar{\varepsilon}_2 = \bar{e}_2 - \bar{z}_2$, $\varepsilon_3 = e_3 - z_3$:

$$(50) \quad \dot{e}_{13} = B_2^* \tilde{e}_2 - K_{13} \varepsilon_{13} + \bar{\varepsilon}_2 - v_{13}, \quad \dot{\bar{e}}_2 = -K_{23} \bar{e}_2 + \varepsilon_3 - \bar{v}_2,$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = \varphi_3 - v_3.$$

В первой подсистеме (50) сформируем разрывные корректирующие воздействия $v_{13} = M_{13}\text{sign}\varepsilon_{13}$. При $\varepsilon_{13}^T \dot{\varepsilon}_{13} < 0 \Rightarrow M_{13} > -\|\bar{\varepsilon}_2\|$ за конечное время $t_{13} > t_{22}$ возникнет скользящий режим на многообразии $S_{13} = \{S_{22} \cap \varepsilon_{13} = 0\} \Rightarrow z_{13} = e_{13}$. При $t > t_{13}$ из уравнения статики $\dot{\varepsilon}_{13} = 0$ имеем оценки $v_{13\text{eq}} = \bar{\varepsilon}_2$, значения которых получим с выходов фильтров типа (43).

Данные оценки используем для формирования разрывной коррекции во второй подсистеме (50) $\dot{\bar{\varepsilon}}_2 = -K_{23}\bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_3 - M_{23}\text{sign}\bar{\varepsilon}_2$, где при $\bar{\varepsilon}_2^T \dot{\bar{\varepsilon}}_2 < 0 \Rightarrow M_{23} > \|\varepsilon_3\|$ за конечное время $t_{23} > t_{13}$ возникнет скользящий режим на многообразии $S_{23} = \{S_{13} \cap \bar{\varepsilon}_2 = 0\} \Rightarrow \bar{z}_2 = \bar{\varepsilon}_2$. При $t > t_{23}$ из уравнения статики $\dot{\bar{\varepsilon}}_2 = 0$ имеем оценки $\bar{v}_{2\text{eq}} = \varepsilon_3$, значения которых получим с выходов линейных фильтров типа (43), и которые используем для формирования разрывной коррекции в третьей подсистеме (50): $v_3 = M_{33}\text{sign}\varepsilon_3$. При $\varepsilon_3^T \dot{\varepsilon}_3 < 0 \Rightarrow M_{33} > F_3$ за конечное время $t_{33} > t_{23}$ возникнет скользящий режим на многообразии $S_{33} = \{S_{23} \cap \varepsilon_{33} = 0\} \Rightarrow z_3 = e_3$. При $t > t_{33}$ из уравнения статики $\dot{\varepsilon}_3 = 0$ имеем оценки компенсирующей составляющей $v_{3\text{eq}} = \varphi_3$ закона управления (49), значения которых получим с выходов линейных фильтров типа (43).

Как видим, использование наблюдателей состояния на скользящих режимах значительно упрощает вычислительный аспект процедуры синтеза, так как аналитические выражения для вектор-функций $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$, φ_3 находить не требуется. Существенно, что с помощью данных наблюдателей оцениваются именно те линейные комбинации переменных, которые непосредственно фигурируют в базовых законах управления (42), (46), (49). Структурная схема замкнутой системы с наблюдателями состояния показана на рис. 3.

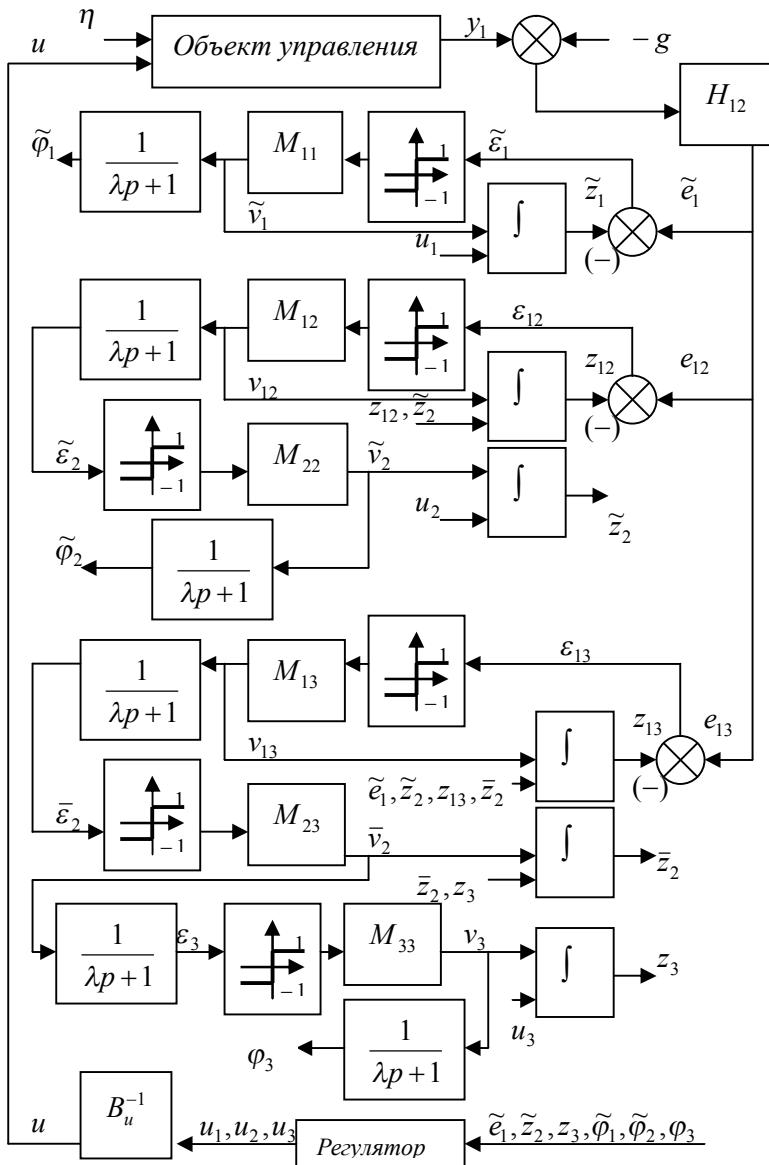


Рис. 3. Структурная схема замкнутой системы

Уравнения замкнутой системы (39), (42), (45) (46), (48), (49) можно представить в виде $\dot{e} = A^* e$, где

$$(51) \quad A^* e = \begin{pmatrix} -K_{11} & O & O & O & O & O \\ O & -K_{12} & I & O & O & O \\ O & O & -K_{12} & O & O & O \\ B^* & O & B_2^* & -K_{13} & I & O \\ O & O & O & O & -K_{23} & I \\ O & O & O & O & O & -K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ e_{12} \\ \tilde{e}_2 \\ e_{13} \\ \bar{e}_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что собственные числа матрицы A^* (51) удовлетворяют соотношению $\prod(\lambda I + K_{ij}) = 0$, замкнутая система устойчива. Поведение переменных замкнутой системы (51) описывается логическими цепочками $e_{11} \rightarrow 0 \Leftrightarrow y_{11} \rightarrow g_1$; $e_{22} \rightarrow 0 \Rightarrow e_{12} \rightarrow 0 \Leftrightarrow y_{12} \rightarrow g_2$; $e_{33} \rightarrow 0 \Rightarrow e_{23} \rightarrow 0 \Rightarrow$ (и с учетом $e_{11} \rightarrow 0, e_{22} \rightarrow 0$) $e_{13} \rightarrow 0 \Leftrightarrow y_{13} \rightarrow g_3$, которые обуславливают соответствующую иерархию коэффициентов усиления K_{ij} , определяющую темпы переходных процессов в системе (51).

Литература

1. АНДРЕЕВ Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
2. АХОБАДЗЕ А.Г., КРАСНОВА С.А. Инвариантность к возмущениям и стабилизация выходных сигналов линейных динамических систем / Труды Института. Том XXVIII. М: ИПУ РАН, 2008. С. 37 – 54.
3. АХОБАДЗЕ А.Г., КРАСНОВА С.А. Декомпозиционный анализ и синтез линейных динамических систем относительно выходных переменных // Труды международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'08. Москва. ИПУ РАН, 2008. С 960 – 976.

4. ДРАКУНОВ С.В., ИЗОСИМОВ Д.Б., ЛУКЬЯНОВ А.Г., УТКИН В.А., УТКИН В.И. *Принцип блочного управления* // АиТ. 1990. № 5. С. 3 – 13.
5. КИМ Д.П. *Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. КРАСНОВА С.А., КУЗНЕЦОВ С.И. *Оценивание на скользящих режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных динамических системах* // АиТ. 2005. №10. С. 54 – 69.
7. КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем*. М.: Наука, 2006.
8. КРАСНОВА С.А., НГҮЕН ТХАНЬ ТИЕН *Блочный синтез системы управления электромеханическими объектами, функционирующими в условиях неопределенности* / Труды Института. Том XXVIII. М: ИПУ РАН, 2008. С. 55 – 65.
9. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.А., ФРАДКОВ А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами*. СПб.: Наука, 2000.
10. ПЕТРОВ Б.Н., РУТКОВСКИЙ В.Ю., ЗЕМЛЯКОВ С.Д. *Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами*. М.: Наука, 1980.
11. УОНЭМ У.М. *Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход*. М.: Наука, 1980.
12. УТКИН В. А., УТКИН В. И. *Метод разделения в задачах инвариантности* // АиТ. 1983. № 12. С. 39 – 48.
13. УТКИН В.А. *Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями* // АиТ. 2001. №11. С. 73 – 94.
14. УТКИН В.И. *Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления*. М.: Наука, 1987.
15. ISIDORI A. *Nonlinear control systems*. Berlin: Springer-Verlag. 1995.
16. FLOQUET T., BARBOT J.P. *An observability form for linear system with unknown inputs* // Int. J. Control. 2006. №79. P. 132 – 139.

17. MARINO R., TOMEI P. *Nonlinear control systems design*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1995.
18. ZHOU K., DOYLE J., GLOVER R. *Robust and optimal control*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1995.