

ЗАВИСИМОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕРА СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СЕТИ ОТ ЕЕ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ

Федянин Д.Н.¹

Актуальность работы обусловлена развитием социальных и экономических сетей. Проанализирован оптимальный размер сети при некоторых предположениях о структуре функции прибыли сети. Большое внимание уделено получению аналитических значений и асимптотик вторичных шумов в социальных и экономических сетях.

Ключевые слова: матрица расстояний, графы, социальные сети, сетевые игры, экономические сети.

1. Введение

Работа выполнена в продолжение доклада на конференции МФТИ секции Проблем управления, факультета РТК, с ее текстом можно ознакомиться в сборнике трудов [1].

Работы Джексона [2], [3], [4] показывают высокую актуальность рассмотрения социальных и экономических сетей. В России также существуют научные разработки в этой области. В качестве примеров можно указать работы [5], [6], [7], а также отметить важность для этого направления семинара по управлению организационными структурами, регулярно проводящегося в ИПУ.

¹ Денис Николаевич Федянин, магистр МФТИ ФУПМ (dfedyanin@inbox.ru).

Бурное развитие науки о социальных и экономических сетях привело к появлению новых математических моделей и необходимости вычисления характеристик графов до этого лежащих вне актуальных областей исследования. Вычисление многих таких характеристик часто очень сложно и во многих случаях приводит к NP-полным задачам.

Наша задача будет найти оптимальный размер сети в предположении о ее структуре и виде функции прибыльности. Функция будет состоять из четырех компонент - вторая из которых это потери связанные с возникновением вторичных шумов.

Пусть одновременно в каждой из вершин возникает сигнал, и он передается по кратчайшему расстоянию к каждой из вершин, после чего он затухает. Будем считать, что при каждой передаче сигнала между вершинами возникает вторичный сигнал. Совокупность всех сигналов за период — вторичный шум.

2. Постановка вспомогательной задачи.

Расстояние между вершинами определим следующим образом: количество ребер в минимальном пути между вершинами.

Обозначим показатель степени асимптотики суммы взаимных расстояний между всеми вершинами графа β . Далее мы будем говорить об этой характеристике графа как о параметре β этого графа.

Поставим задачу о получении точных верхних и нижних оценок для параметра β произвольного графа и вычислить параметр β для некоторых специальных типов графов: кольцо, линия, полный граф.

Решение этой задачи даст нам выражения для вторичного (коммуникационного) шума.

2.1. ТЕОРЕМА О ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ГРАНИЦАХ

Теорема 1. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} F(G_n) \rightarrow b n^a$, где $G(n)$ - произвольная последовательность связных графов с n вершинами. Тогда a находится в пределах отрезка $[2, 3]$.

Доказательство.

Как будет показано ниже существуют графы с параметрами β равными соответственно 2 и 3, показано будет и существование промежуточных показателей степеней асимптотик. Покажем теперь, что не существует показателей асимптотик ни меньше 2 ни больше 3. Действительно, из связности графа следует, что каждая вершина соединена с каждой другой, и это расстояние не может быть меньше 1. Соответственно полный граф и есть нижняя оценка.

Покажем теперь, что не может быть показателя степени асимптотики более 3. Действительно, максимальное расстояние между двумя вершинами — $(n-1)$. Однако очевидно, что существуют вершины на находящиеся на расстоянии $(n-2)$ и так далее. То есть максимальное распределение расстояний — это первые $n-1$ членов арифметической прогрессии. Их сумма пропорциональна n^2 , так как всего n , то сумма растет как n^3 . Это и есть верхняя оценка.

Из этих оценок получаются оценки для средних расстояний если поделить полученные выше оценки на n^2 . Что дает нам очевидные оценки для средних расстояний 0, то есть не зависит от количества вершин, и 1, то есть увеличивается линейно от количества вершин.

2.2 ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВТОРИЧНОГО ШУМА ДЛЯ ГРАФОВ С ПАРАМЕТРОМ $\beta=3$

Утверждение 1. Для линии параметр $\beta=3$. Точное значение вторичных шумов меняется от количества вершин как

$$F = \frac{1}{3}n(n^2 - 1)$$

В работе показано верность этого утверждения, тем не менее приведу доказательство еще раз.

Доказательство утверждения:

Рассмотрим произвольную вершину x , тогда сумма расстояний от нее до вершин левее равна , а до вершин правее ,

Просуммируем по всем вершинам, результатом будет выражение.

$$F = \frac{1}{3}n(n^2 - 1)$$

Утверждение 2. Для кольца параметр $\beta=3$. Точное значение для кольца с нечетным количеством вершин вторичных шумов меняется от количества вершин как

$$F = n \frac{(n^2 - 1)}{12}$$

Доказательство утверждения:

Заметим, что если мы выберем произвольную вершину, то сумма расстояний до других вершин будет удвоенной сумме расстояний для линии длиной $(n-1)/2$. Это дает нам выражение. Таким образом для кольца с нечетным количеством вершин выражение

$$F = n \frac{(n^2 - 1)}{12} .$$

Очевидно, что при стремлении количества вершин к бесконечности асимптотики для колец с нечетным количеством вершин и четным будут одинаковыми.

2.3 ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВТОРИЧНОГО ШУМА ДЛЯ ГРАФА С ПАРАМЕТРОМ $\beta=2$.

Утверждение 3. Для полного графа параметр $\beta=2$. Точное значение вторичных шумов меняется от количества вершин как

$$F = n(n-1)$$

2.4 ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВТОРИЧНОГО ШУМА ДЛЯ ГРАФА С ПАРАМЕТРОМ $\beta=2.5$

Утверждение 4. Для квадратной плоской решетки параметр $\beta=2.5$. Точное значение вторичных шумов меняется от количества вершин как

$$F = \frac{2}{3}n(n-1)\sqrt{n}$$

Доказательство:

В работе [1] показано, что выражение для прямоугольной решетки имеет вид. И следовательно для квадратной показатель степени асимптотики равен 2.5. Что может вызвать удивление. Однако легко доказывается и более сильное утверждение.

2.5 ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ ГРАФА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ $2 \leq \beta \leq 3$

Теорема 2. Для любого a из отрезка $[2, 3]$ существует последовательность связных графов с n вершинами, что $\lim_{n \rightarrow \infty} F(G_n) \rightarrow b n^a$.

Доказательство.

Построим граф следующим образом. К кольцу добавим центральную вершину. Часть вершин соединим через эту вершину

□

ну. Расстояние между двумя соединенными таким образом не соседними вершинами будет равно 2. То есть сумма всех расстояний в таком подграфе будет такой же как и для полного графа с точностью до коэффициента 2 и компонента, куда войдет центральная вершина и ребра между соседними вершинами. Для несоединенных таким образом вершин сумма расстояний будет иметь вид такой же как для кольца.

Тогда для каждой вершины сумму расстояний мы можем записать как сумму для линии + сумму для «почти» полного графа, то в зависимости от количества вершин мы всегда сможем записать общую сумму в виде $F = l p^3 + r n^2 + o(n^2)$, где p - количество вершин в сильно связанной области графа.

Выберем $p = n^{\frac{a}{3}}$, это можно сделать, так как $\frac{1}{3}a = \log_n p$ при достаточно больших n может быть решено относительно p сколь угодно точно.

3. Основная задача. Оптимальный и допустимый размеры сети с учетом стоимости соединения

Пусть θ — количество сообщений которое можно передать за выбранный интервал, F — вторичный шум в социальной сети,, Y — количество соединений, w - стоимость соединения, n — размер сети (количество людей), B — другие компоненты прибыли, тогда функция прибыли сети в неделю равна

$$c = qn - F - wY + B$$

Ограничим рассмотрение первыми тремя слагаемыми.

Такой вид функции прибыли удобен для получения простых выражений для оптимального размера сети. Однако для некоторых

целей нам удобно рассматривать величину $n^* = \frac{1}{q}c$, которая

€

равна количеству менеджеров в идеальной сети, где нет потерь на коммуникации, дающих ту же прибыль как и реальная сеть, где потерями на коммуникации невозможно пренебречь.

Зная норму прибыльности каждого менеджера (без учета коммуникаций) мы можем получить функцию прибыли в виде привычном для экономических расчетов — количество денег.

Важно, что есть расходы на коммуникации которые не могут быть уменьшены, в силу специфики конкретной отрасли и принятых деловых норм поведения. Поэтому размер сети часто постоянен для конкретной отрасли.

4.1 ДЛЯ СЕТИ ИЗОМОРФНОЙ ПОЛНОМУ ГРАФУ

$$F = n(n-1)$$

$$c = qn - n(n-1) - \frac{1}{2}wn(n-1)$$

Запишем условие положительности

$$c = qn - (1 + \frac{1}{2}w)(n-1)n > 0$$

$$n < 1 + \frac{2q}{2+w}$$

Запишем условие экстремума

$$\frac{\partial}{\partial n} c = q - (1 + \frac{1}{2}w)(2n-1) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} c = -2(1 + \frac{1}{2}w) < 0$$

Теперь найдем экстремум, как следует из отрицательности второй производной это будет максимум

$$n = \frac{1}{2}(1 + \frac{2q}{2+w})$$

$$c = \frac{(2q + w + 2)^2}{8(2+w)}$$

$$n^* = \frac{(2q + w + 2)^2}{8q(2+w)}$$

Для $w=1$

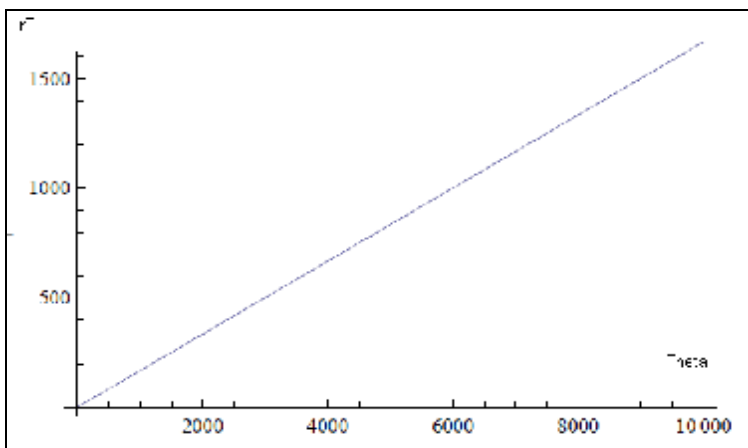


Рис 1. Зависимость прибыли при оптимальном размере для различных значений эффективности коммуникаций

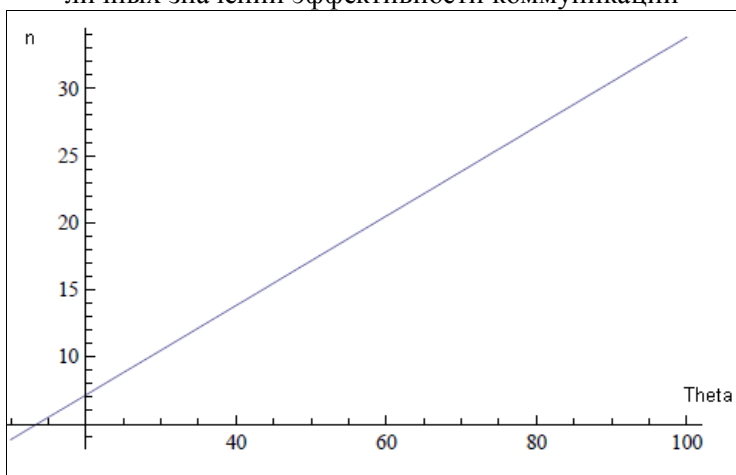


Рис 2. Зависимость оптимального размера сети для различных значений эффективности коммуникаций

4.2 ДЛЯ СЕТИ ИЗОМОРФНОЙ ЦЕПОЧКЕ

$$F = \frac{1}{3}n(n^2 - 1)$$

$$c = qn - \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{3}n - wn + w$$

Запишем условие положительности

$$-\frac{1}{3}n^3 + qn + \frac{1}{3}n - wn + w > 0$$

Запишем условие экстремума

$$-n^2 + q + \frac{1}{3} - w = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} c = -2n < 0$$

Теперь найдем экстремум, как следует из отрицательности второй производной это будет максимум

$$n = \sqrt{q - w + \frac{1}{3}}$$

$$n^* = \frac{2}{27}(1 + 3q)U + \frac{1}{9}w(9 - U), \text{ где}$$

$$U = \sqrt{9q - 9w - 3}$$

Для $w=1$

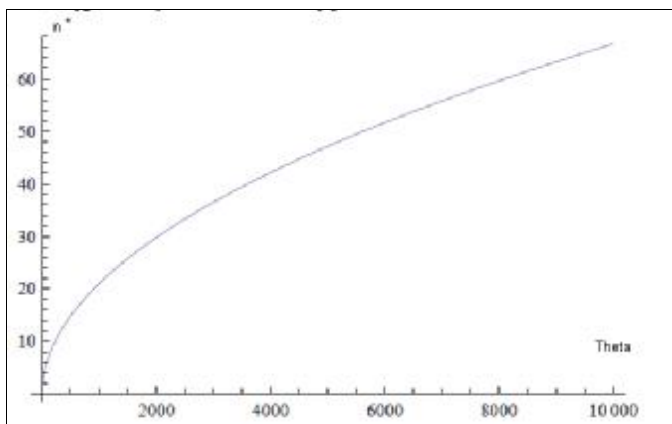


Рис 3. Зависимость прибыли при оптимальном размере сети для различных значений эффективности коммуникаций

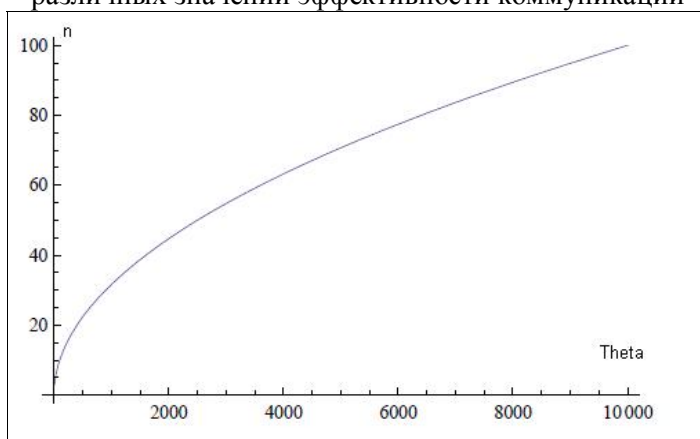


Рис 4. Зависимость оптимального размера сети для различных значений эффективности коммуникаций

4.3 ДЛЯ СЕТИ ИЗОМОРФНОЙ КОЛЬЦУ С НЕЧЕТНЫХ КОЛИЧЕСТВОВ ВЕРШИН

$$F = \frac{1}{4}n(n^2 - 1)$$

$$c = qn - \frac{1}{4}n^3 + \frac{1}{4}n - wn$$

Запишем условие положительности

$$n^2 - 4q - 1 + 4w < 0$$

$$n < \sqrt{4q - 4w + 1}$$

Запишем условие экстремума

$$q - \frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{4} - w = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} c = -\frac{3}{2}n < 0$$

Теперь найдем экстремум, как следует из отрицательности второй производной это будет максимум

$$n = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{q - w + \frac{1}{4}}$$

4. Дальнейшее направление

Получены зависимости между размером оптимальной сети и ее структурой. Найдены асимптотики суммы расстояний. Интересным представляется найти с помощью суммы расстояний оптимальные размеры для матричной структуры сети и однородного дерева с различными нормами управляемости и проанализировать полученные зависимости.

Литература

1. ФЕДЯНИН Д.Н. *Сумма всех попарных расстояний между вершинами в графах: плоская прямоугольная решетка, однородное дерево*. Труды 51-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». М.:МФТИ, 2008 — 210 с, 170-173 стр.

2. JACKSON M.O. *The Stability and Efficiency of Economic and Social Networks* // Advances in Econom. Design. 2003.
3. JACKSON M.O., WATTS, A. *The Evolution of Social and Economic Networks* // J. Econom. Theory. 2002. V 106, N 2. P 265-295.
4. DUTTA B., JACKSON M.O. *On the Formation of Networks and Groups* // Networks and Groups: Models of Strategic Formation, Heidelberg: Springer-Verlag. 2003.
5. ВОРОНИН А.А., ГУБКО М. А., МИШИН С.П., НОВИКОВ Д.А. *Математические модели организаций: Учебное пособие.* — М.: ЛЕНАНД, 2008. — 360 с.
6. БУРКОВ В.Н., ЗАЛОЖНЕВ А.Ю., НОВИКОВ Д.А. *Теория графов в управлении организационными системами.* — М.: Синтег, 2001.
7. БУРКОВ В.Н., ДАНЕВ Б., ЕНАЛIEЕВ А.К. и др. *Большие системы: моделирование организационных механизмов.* М.: Наука, 1989.
8. BARABASI, ALBERT-LASZLO *Scale-Free Networks.* Scientific American, 288:60-69, May 2003.
9. NEWMAN MARK. *The Structure and Function of Complex Networks.* SIAM Review 56: 167-256 2003.

DEPENDENCE OF OPTIMAL SIZE OF SOCIAL AND ECONOMIC NETWORK ON ITS INTERNAL STRUCTURE

Fedyanin Denis, Master of Science (dfedyanin@inbox.ru, 89261771746).

Abstract: The work became actual as social and economic net are growing. Optimal size of economic networks was found for some simple networks having profit function of a special kind..

Keywords: network games, graphs, matrix of distances, , economic networks, social networks.