УДК 519.8
ББК

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ РЫБНЫМ ПРОМЫСЛОМ В УСЛОВИЯХ КВОТИРОВАНИЯ

Н.С. Иванко[1]
(Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет, Владивосток),
А.И.Абакумов[2]
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

Предложены модельные варианты минимизации последствий от коллизий, возникающих при морском рыбном промысле между пообъектным способом формирования квот и многовидовым характером промысла. Приведены иллюстративные примеры.

Ключевые слова: оптимальный сбор урожая, математическое моделирование, оптимизация.

1. Введение

Управление морскими рыбными промыслами содержит много аспектов. В статье рассматривается только процедура распределения разрешений (квот) на вылов рыб и других морских организмов. Рыбные промыслы отличаются от многих других процессов сбора урожая многовидовыми технологиями. Орудия промысла (тралы, сети, ловушки и тому подобное) являются многовидовыми в смысле изымаемых ими особей многих биологических видов.

---

1 Нина Сергеевна Иванко (ivns@mail.ru)
[2] *Александр Иванович Абакумов, доктор физико-математических наук, профессор (abakumov@iacp.dvo.ru)*

Одним из способов управления промыслами является выдача уполномоченными органами разрешений (квот) на определенные объемы вылова определенных биологических видов или групп близких видов в определенное время и в определенных промысловых районах. Эти виды или объединенные группы видов называются объектами промысла. Разрешения на промысел выдаются по объектам, а сам промысел из-за орудий лова является многовидовым, с выловом других, не предусмотренных разрешениями, объектов. Выловы не предусмотренных объектов будем называть приловами. Проблема учета приловов в математическом смысле приводит к задачам линейной и нелинейной (квадратичной) оптимизации. Задачи описывают способы распределения квот, при которых ожидаемый объем вылова по каждому виду будет близок к заранее определенному допустимому объему вылова.

2. Постановка задачи

Задача оптимизации распределения квот сформулирована в статье [1]. Особенности решения задачи, посвященной расчету возможных суммарных объемов квот по объектам промысла, при которых вылов с учетом приловов будет равен заранее определенным объемам допустимых уловов, описаны в [3].

Рассмотрим серию взаимосвязанных задач распределения квот для определенного морского промыслового района. Пусть имеется m объектов промысла и n способов промысла (предприятий-судовладельцев с определенными типами судов и орудий лова). Рассматривается выделенный промысловый период (например, 1 год). Индексы $i, j = 1,\ldots,m$ соответствуют объектам промысла, индекс $k = 1,\ldots,n$ – способам промысла. Адекватная рыбному промыслу задача имеет $m, n > 1$, что мы и предполагаем в дальнейшем.

Через α_{ijk} обозначены доли объекта i в вылове способом k при квоте на объект j (коэффициенты прилова). Эти коэффициенты вычисляются на основе ретроспективных данных о промыслах в этом районе.

Пусть $v = (v_1, ..., v_m)$ – заданный неотрицательный вектор допустимых уловов для каждого объекта промысла. Требуется найти расчётные оценки квот u_{jk} на вылов объекта *j* способом промысла *k*.

Приведем эту задачу к стандартным обозначениям. Пусть $m \cdot n = s$, $v = b$, $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m,s}$ – неотрицательная матрица приловов, $u = x = (x_1, ..., x_s)^*$ – вектор квот (здесь и далее символ $''*''$ означает действие транспонирования).

Тогда задача принимает стандартный вид

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi(x) = \|Ax - b\|^2 \to \inf \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Здесь под нормой понимается евклидова норма в конечномерном линейном пространстве R^s. Задачу (1) назовем задачей *мягкой* оптимизации.

Наряду с задачей (1) будем рассматривать такую же задачу с условием непревышения разрешенных объемов вылова для каждого объекта промысла:

$$(2)\quad \begin{cases} \|Ax - b\|^2 \to \inf, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Задачу (2) назовем задачей *жесткой* оптимизации. В задаче (2), возможно, будем использовать для удобства какую-либо другую, не обязательно евклидову, норму.

На множестве решений задачи (1) можно решать экономическую задачу максимизации дохода от промысла. Обозначим через p_j доход от реализации единицы объема квоты номер *j* без учета затрат, а c_j – коэффициент затрат на организацию промысла по реализации этой квоты. Доход от реализации квоты номер *j* предполагается равным $p_j x_j - c_j x_j^2$. Если через

$p = (p_1, ..., p_s)$ обозначить вектор коэффициентов дохода, а через $c = (c_1, ..., c_s)$ – вектор коэффициентов затрат, то задача максимизации дохода примет вид

(3) $$\begin{cases} \Psi(x) = px - x^* Cx \to \sup \\ x \in D \end{cases}.$$

Будем предполагать, что вектор p и диагональная матрица C строго положительны. Задачу (3) будем называть задачей максимизации дохода. Эта задача решается на множестве D «безусловных» решений задачи мягкой оптимизации. Множество D является подмножеством множества G всех решений задачи (1). Вид множества D будет формально описан ниже при исследовании задач.

3. Исследование задач

3.1. ЗАДАЧА МЯГКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В задаче (1) используем евклидову норму. Тогда $\Phi(x + \Delta x) = \Phi(x) + 2\Delta x^* (A^* Ax - A^* b) + \|A\Delta x\|^2$. Из указанного равенства следует, что множество решений задачи (1) равно

(4) $$G = \{x \in R^s \mid A^* Ax - A^* b \geq 0, x^* (A^* Ax - A^* b) = 0, x \geq 0\}.$$

Множество G имеет нелинейное описание. Решение задачи (1) будем искать одним из численных методов поиска оптимального решения – методом градиентного спуска с переменным шагом [4]. Этот метод характеризуется невысокой гарантией сходимости даже для квадратичного функционала. Поэтому можно рассмотреть иные способы решения задачи (1).

Задача минимизации квадратичного функционала

(5) $$\Phi(x) = \| Ax - b \|^2$$

с евклидовой нормой без ограничения знака x имеет множество решений $D_0 = \{x \in R^s \mid A^* Ax = A^* b\}$.

В нашем случае матрица A имеет размерность $m \times s$, где $s=m*n>m$. Ранг матрицы A $r = r(A) \leq m$, матрицы A^* и A^*A имеют такой же ранг [2]. Система уравнений

(6) $A^*Ax = A^*b$

совместна, так как ранг расширенной матрицы $\left(A^*A \vdots A^*b\right)$ также равен r. Обозначим через x_0 одно из решений системы (8). Тогда $D_0 = x_0 + L$, где L – подпространство решений однородной системы $A^*Ax = 0$. Размерность этого подпространства равна $s - r \geq 1$. Это означает, что множество D_0 континуально. Обозначим $D = D_0 \cap R_+^S$. Очевидно, $D \subset G$. Множество D назовем множество «безусловных» решений задачи (1), так как оно появляется из множества D_0 решений безусловной минимизации функционала (7). Множество D описывается линейно, хотя бы один из элементов этого множества можно искать решением следующей задачи линейного программирования

(7) $$\begin{cases} \|y\| \to \inf \\ A^*Ax - y = A^*b \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Если оптимальное решение $(\bar{x}, \bar{y})$ имеет $\bar{y} = 0$, то $\bar{x} \in D \subset G$ является решением задачи (1). Если же $\bar{y} \neq 0$, то множество $D = \emptyset$ и $\bar{x} \geq 0$ - ближайшее по метрике нормы $\|\cdot\|$ к множеству D_0. Это приближение $\bar{x}$ можно рассматривать как приближенное решение задачи (1). Таким образом, мы предлагаем решать задачу (1) двумя приближенными методами:

- методом градиентного спуска;
- решением вспомогательной задачи линейного программирования (7).

Решение задачи (7) будем называть линейным методом решения задачи мягкой оптимизации.

3.2. ЗАДАЧА ЖЕСТКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В задаче (2) будем использовать ромбическую $\left\|x\right\| = \sum_{j=1}^{s} \left|x_j\right|$ норму ($x = (x_1\ x_2\ \dots\ x_s)^* \in R^s$). Эта норма на множестве неотрицательных векторов является линейной, чем мы и воспользуемся в дальнейшем.

Вместо квадрата нормы будем минимизировать саму норму (оптимальные решения $\overline{x}$ при этом не меняются). Тогда задача (2) сводится к задаче линейного программирования следующего вида:

$$(8)\quad \begin{cases} \left\|Ax\right\| \to \sup \\ Ax \le b \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Переход от (2) к (8) справедлив из-за неотрицательности матрицы A.

3.3. ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ДОХОДА

Задача (3) является типичной задачей квадратичного программирования, широко известны ее свойства и численные методы решения [4,6].

Все же попробуем провести свой анализ задачи, пользуясь ее специфичностью. Множество D определено выше и имеет вид: $D = \left\{ x \in R_+^s \,\middle|\, A^* A x = A^* b \right\}$.

Задача (3) может быть записана в виде:

$$(9)\quad \begin{cases} x^* C x - p x \to \inf \\ A^* A x = A^* b \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Для решения этой задачи можно использовать метод градиентного спуска. Можно составить функцию Лагранжа:

$$(10)\quad L(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 (x^* C x - p x) + \lambda \left[A^* A x - A^* b\right] - \mu \cdot x$$

при $\lambda_0 \geq 0, \mu \geq 0$ с условиями дополняющей нежесткости $\mu{*}x=0$ [5]. Затем переходим к дифференциальному условию минимизации функции Лагранжа по *x,* собираем все полученные условия и решаем эту систему относительно *x, λ, μ.*

4. Примеры применения моделей и методов

Расчеты проведены на примерах, построенных по аналогии с данными о морских рыбных промыслах. Первый и второй примеры условно названы малым и большим соответственно размерам таблиц исходных данных. Эти примеры построены по аналогии с данными о рыбных промыслах в дальневосточных морях. Большой пример по объему данных соответствует реальным промыслам. Третий пример придуман специально для случая непустого множества *D* с ненулевым значением функционала Ф на нем. Все исходные данные и результаты приведены в условных единицах.

4.1. МАЛЫЙ ПРИМЕР.

Таблица 1. Данные о промыслах малого примера.

Объекты промысла	Способы промысла								Допустимый вылов
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0,2	0,1	1,0	0,3	0,4	0,1	0,0	0,1	34,6
2	1,0	0,2	0,1	0,1	1,0	0,2	0,1	0,2	108,4
3	0,3	1,0	0,2	1,0	0,1	1,0	0,2	0,1	59,2
4	0,1	0,3	0,0	0,1	0,1	0,3	0,1	0,0	17,1
5	0,2	0,4	0,3	0,2	0,2	0,4	1,0	1,0	37,8
Затраты на вылов	0,001	0,005	0,003	0,009	0,002	0,004	0,006	0,008	
Доход	2	4	6	8	3	1,4	1	0,4	

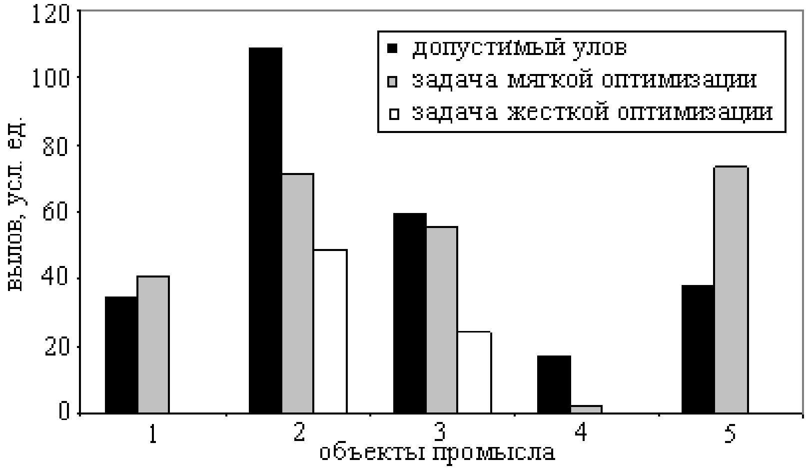

Рис. 1. Объемы выловов в задачах мягкой и жесткой оптимизации (малый пример).

Для задачи мягкой оптимизации представлено решение методом градиентного спуска. Причем вектор y задачи (7) не нулевой, т.е. множество *D* пусто и поэтому задача максимизации дохода не имеет решения. Задача мягкой оптимизации дает решение (рис. 1), отклоняющееся по ряду объектов в большую сторону от допустимого улова. В задаче жесткой оптимизации таких отклонений не может быть, но разрешенный охват объектов промыслов гораздо меньше.

4.2. БОЛЬШОЙ ПРИМЕР.

Исходные данные приведены в таблице 2. Для задачи мягкой оптимизации решение получено методом градиентного спуска. Судя по решениям задач мягкой и жесткой оптимизации (рис. 2), большой пример лучше сбалансирован по исходной информации, чем малый.

Решения задач здесь гораздо ближе к допустимым уловам. На этом фоне малый пример может рассматриваться как парадоксальный (или, как минимум, «неудобный») для рыбных промыслов. Малый пример показывает, что задачи оптимизации рыбного промысла могут плохо работать на «плохом» наборе данных.

Таблица 2. Данные о промыслах в большом примере.

Объекты промысла	Способы промысла							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	0,02	0,3	0,001	0,003	0
2	0,08	0,01	0,03	0,005	0,01	0	0,001	0
3	0,03	0,15	0,2	1	1	0,03	0,03	0,1
4	0	0	0	0,25	0,05	1	1	1
5	0,04	0	0	0,001	0,002	0	0	0
6	0	0	0	0,02	0,04	0,005	0,002	0
7	0,02	0,1	0,6	0,01	0,1	0,001	0,005	0
8	0,03	0,09	0,2	0,01	0,08	0,002	0,005	0
9	0	0,05	0,3	0,005	0,04	0	0	0
10	0,01	0,002	0	0,003	0,001	0,001	0	0,01
11	0,02	0	0	0,001	0,002	0	0	0
12	0	0,03	0	0	0	0,002	0	0
13	0	0	0	0	0,003	0	0	0
14	0,002	0	0	0,01	0,001	0	0	0
15	0,001	0	0	0	0,001	0	0	0
Затраты на вылов	2	4	6	8	3	1,4	1	0,4
Доход	0,001	0,005	0,003	0,009	0,002	0,004	0,006	0,008

Таблица 2. Данные о промыслах в большом примере (продолжение).

Объекты промысла		Способы промысла						
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,2	0,05	0,02	0,05	0	0	0,05	0,01
2	0,05	0,01	1	1	1	1	0,02	0,03
3	0,25	0,05	0,01	0,05	0,15	0,02	0	0,17
4	0,04	0,005	0	0	0	0	0	0,05
5	0,1	0,001	0,2	0,04	0,07	0,06	0,03	0,02
6	0,08	0,02	0	0	0	0,08	1	1

7	1	1	0	0	0	0	0,05	0,04
8	0,15	0,07	0	0	0	0	0,08	0,2
9	0,2	0,05	0	0	0	0,04	0	0,02
10	0	0,004	0,05	0	0	0	0	0
11	0	0,005	0	0	0	0	0,06	0,1
12	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0,1	0,02
15	0	0	0	0	0	0	0	0,005
Затраты на вылов	4	6	3	1,4	1	2	4	6
Доход	0,001	0,005	0,003	0,009	0,002	0,005	0,003	0,009

Таблица 2. Данные о промыслах в большом примере (продолжение).

Объекты промысла	Способы промысла				Допустимый вылов
	17	18	19	20	
1	0,02	0,01	0,08	0,002	10
2	0,03	0,04	0,04	0,005	1,5
3	0,04	0	0	0,02	120
4	0	0	0	0	75
5	0,01	0,001	0,001	0	0,08
6	0,06	0	0,002	0	2
7	0,05	0	0,15	0,1	15
8	0	0	1	1	5
9	0	0	0,1	0	3
10	0	0	0	0	1
11	1	1	0	0	2
12	0	0	0	0	4
13	0	0	0	0	0,5
14	0,004	0	0	0	12
15	0	0,05	0	0	0,3
Затраты на вылов	8	3	1	0,4	
Доход	0,002	0,004	0,006	0,008	

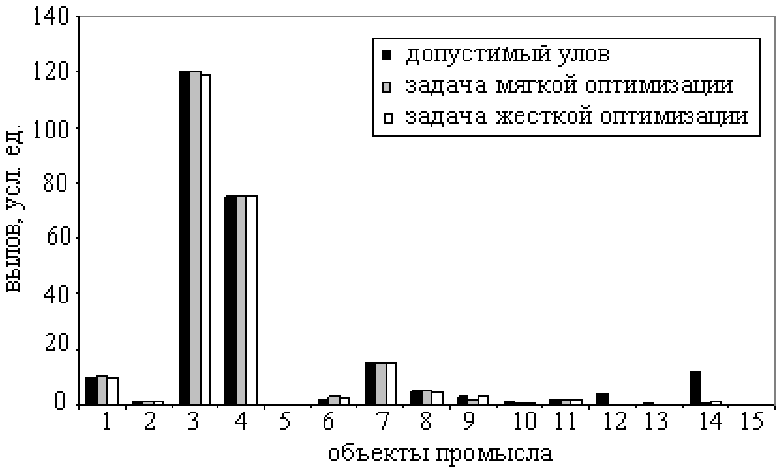

Рис. 2. Объемы выловов в задачах мягкой и жесткой оптимизации (большой пример).

4.3. УСЛОВНЫЙ ПРИМЕР.

Данные подобраны так, что множество *D* непусто. В этом случае мы можем решать задачу максимизации дохода. В данном случае решение этой задачи оказывается близким к решению задачи мягкой оптимизации, хотя в общем случае эти решения различны.

Таблица 3. Данные о промыслах в условном примере.

Объекты промысла	Способы промысла				Допустимый вылов
	1	2	3	4	
1	1/11	2/11	2/11	1/11	1.0
2	2/11	1/11	1/11	2/11	2.0
3	1/11	1/11	1/11	1/11	3.0
Затраты на вылов	0,2	0,1	0,1	0,2	
Доход	0,8	0,2	0,2	4,4	

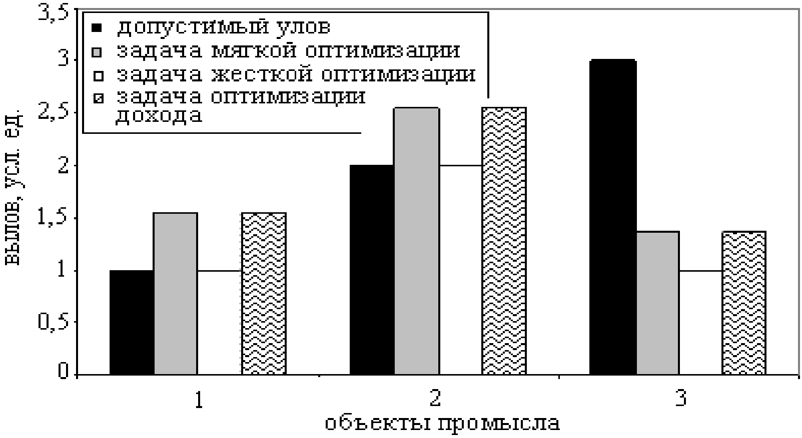

Рис. 3. Объемы выловов в задачах мягкой и жесткой оптимизации (условный пример).

Для сравнения всех примеров можно предложить некоторый критерий качества решений приведенных задач. В качестве такого критерия рассмотрим $q = \sqrt{\Phi/m}$, где Ф - значение функционала (1). Этот критерий учитывает размерность задачи и квадратичность функционала Ф. Решение тем лучше, чем меньше значение q

Таблица 4. Сравнение качества результатов.

	Задача мягкой оптимизации		Задача жесткой оптимизации	Задача максимизации дохода	
	метод градиентного спуска	линейный метод		q	Ψ
Малый пример	24,17	24,45	38,15	—	—
Большой пример	3,06	3,02	10,14	—	—
Условный пример	1,04	1,04	1,15	1,04	25,2

Из таблицы 4 видно, что в задаче мягкой оптимизации линейный метод может оказаться лучше градиентного. Задача жесткой оптимизации проигрывает по этому критерию задаче мягкой оптимизации по причине более жестких условий на решение.

5. Заключение

В статье приведен анализ задач оптимального распределения квот при морском рыбном промысле. Несмотря на нелинейность ряда задач, удается их сводить к линейным или решать линейными методами. Для убедительности приводятся примеры расчетов, иллюстрирующих модельные представления.

ЛИТЕРАТУРА

1. АБАКУМОВ А.И., БОЧАРОВ Л.Н., КАРЕДИН Е.П. *Модельный анализ многовидовых рыбных промыслов* // Известия ТИНРО. – 2004 – т. 138 – с.220-224.
2. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц* / Ф.Р. Гантмахер. – М.: НАУКА, 1988.
3. ИВАНКО Н.С., АБАКУМОВ А.И., *Анализ задачи о рациональном распределении разрешений на вылов при рыбном промысле* // Научные труды Дальрыбвтуза. Владивосток: Изд-во Дальрыбвтуза – 2007 – С. 16-24.
4. ИЗМАИЛОВ А.Ф. *Численные методы в оптимизации* / А.Ф. Измаилов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
5. ИОФФЕ А.Д., ТИХОМИРОВ В.М. *Теория экстремальных задач* / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: НАУКА, 1974.
6. КАРМАНОВ В.Г. *Математическое программирование* / В.Г. Карманов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

PROBLEMS OF THE FISHERY CONTROL IN THE CONDITIONS OF QUOTAS EXISTENCE

Nina Ivanko, Far Eastern State Technical Fisheries University (Vladivostok, ivns@mail.ru).
Alexander Abakumov, Institute of Automation and Control Processes, FEB RAS, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor (Vladivostok, abakumov@iacp.dvo.ru).

Abstract: *Modeling variants of consequences minimization from the collisions between quota formation for each object only and multi-specific fishery are offered. Illustrative examples are given.*

Keywords: optimal harvesting, mathematical modeling, optimization.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором…

Поступила в редакцию ...заполняется редактором…
Опубликована ...заполняется редактором…