

УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

ЭВОЛЮЦИОННАЯ ДИНАМИКА ИГР РАЗБИЕНИЙ¹

Бочаров П.С.²

(ООО Уили, Москва)

Горяшко А.П.³

(Московский технологический институт, Москва)

Рассмотрена модель эволюционной игры, в которой в качестве «игроков» выступают разбиения, игра между которыми осуществляется по правилам дискретной игры Лотто. Компьютерное моделирование такой эволюционной игры позволяет предложить классификацию разбиений по силе, т. е. возможностям «игроков» добиваться выигрыша. Обсуждаются некоторые неожиданные результаты компьютерных экспериментов и возможности применения исследуемого подхода.

Ключевые слова: теория игр, игры Блотто и Лотто, эволюционные игры.

1. Введение

1.1. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ИГРЫ

Эволюционная теория игр обязана своим появлением на свет классическим работам Смита (*Smith J. M.*) и Прайса (*Price G. R.*) семидесятых-восемидесятых годов, в которых впервые было предложено применять теорию игр к поведению любых живых организмов от рыб до высших приматов. В эволюционной теории игр заранее множество стратегий классической теории игр

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №15-08-08935А).

² Павел Сергеевич Бочаров, руководитель группы мобильной разработки (pavel@wheely.com).

³ Александр Петрович Горяшко, доктор технических наук, профессор (petrovich4you@gmail.com).

превратилось во множество стратегий (генотипических вариантов) из которых индивидуальные агенты наследуют тот или иной вариант, причем, возможно, с отличиями (мутациями). Эту наследованную стратегию они используют в процессе взаимодействия и передают своим потомкам (если таковые будут). Место классических понятий чистого и смешанного равновесия заняло понятие эволюционно стабильной стратегии (*ESS*), т.е. такой стратегии, использование которой всеми членами популяции (коллективом игроков) не позволяет вторгнуться в этот коллектив небольшой группе захватчиков, использующих другую стратегию.

Наконец, вместо однократных (*one-shot*) и повторяющихся игр рассматривается случайное попарное взаимодействие игроков в коллективе, причем стратегия каждого из участников определяется только его «геномом», но не памятью о предыдущих взаимодействиях.

Таким образом, в эволюционной теории игр игроки могут обладать различным поведением, которое не является результатом сознательного выбора. Эволюционная теория исследует какое поведение оказываются более «дарвиновски» успешным. Более приспособленные (*fitness*) организмы получают возможность иметь больше потомков, распространяя тем самым свои успешные «гены». Таким образом, «приспособленность» стала аналогом платежа классической теории игр размер которого зависит от стратегии, полученной игроком по наследству.

Предположим, что рассматривается простой вид живого организма, например, сороконожка (*centipede*), способности которой находить пищу в заданном окружении определяется главным образом её размерами. Пусть также потомство сороконожки может мутировать так, что размеры новых особей будут как больше, так и меньше размера родителей.

В [5] рассмотрена модель игры, в которой сосуществуют сороконожки только двух размеров: маленькие и большие. Встречаясь между собой они соревнуются за пищевые ресурсы, причем, когда встречаются особи одного размера они делят ресурсы поровну. В противном случае большим достается большая часть ре-

сурса. Однако следует учесть, что «большим» для удовлетворения своих жизненных потребностей необходимо потребить большее количество ресурса, чем маленьким. Платежная матрица взаимодействия «маленьких» и «больших» в этой игре показана в таблице 1, где цифры обозначают размер платежа или «приспособленности» каждого из игроков.

Таблица 1. Платежная матрица игры «Большой, маленький»

	Маленькие	Большие
Маленькие	5, 5	1, 8
Большие	8, 1	3, 3

Заметим, что «большие», встречаясь друг с другом, получают меньшую пользу, чем «маленькие», поскольку им необходимо больше ресурсов для выживания. В подобной игре у игроков не существует намерения достигнуть какого-то равновесного исхода, поскольку они не могут менять своих стратегий по каким-либо правилам. Возможное движение к равновесию осуществляют силы эволюционного отбора. В этом случае речь может идти не о равновесии по Нэшу, а скорее о том может ли (и если «да», то при каких условиях) одна стратегия сохранить доминирующее положение. В рассматриваемом примере это означает выяснение того, какая из двух стратегий окажется предпочтительной при заданных внешних условиях. Такая предпочтительная стратегия в эволюционной теории игр называют эволюционно стабильной (ESS).

Для рассмотрения динамики поведения эволюционирующего коллектив вначале задают исходную пропорцию игроков, а затем моделируют результаты их взаимодействия, случайно выбирая в каждый момент времени пары игроков. Результаты взаимодействия накапливаются и определяют репродуктивное поведение игрока — количество потомков, которое он сможет произвести. Ожидаемое значение платежей для всех игроков в конечном счете задает динамику поведения всего коллектива.

Как эти условия выполняются в случае примера таб. 1? Пусть

доля x всей популяции использует стратегию «большой», а $1 - x$, соответственно, «маленький». Каков ожидаемый платеж для «маленького»? С вероятностью $1 - x$ он встречает другого «маленького» и получает 5, и с дополнительной вероятностью 1. Таким образом, его ожидаемый платеж равен $5(1-x) + 1 \cdot x = 5 - 4x$. Аналогично для «большого» ожидаемый платеж равен $8(1-x) + 3 \cdot x = 8 - 5x$.

Очевидно, при всех $0 \leq x \leq 1$, «большой» оказывается более приспособленным. Будучи введен (даже в небольшом количестве) в популяцию «маленьких», он будет редко встречать себе подобного, а потому почти в каждом «поединке» получать больший платеж, что позволит ему оставлять больше потомства и, в пределе, увеличить свою долю до 1. А вот «маленькие» не могут успешно вторгнуться, т. е. увеличивать свою долю и потому только стратегия S является эволюционно стабильной.

Игры, в которых участники имеют лишь две стратегии одна из самых распространенных моделей в традиционной теории игр. Потому и в эволюционной теории рассмотрение таких моделей игр доминирует. Наиболее изученными являются процессы Морана (*Moran process*) [8], модель которая детально рассматривает поведение популяций игроков со стратегиями двух типов. Аналитическое исследование эволюционной динамики процессов Морана в коллективах с конечным числом игроков можно найти в [10]. Однако далеко не все практически интересные вопросы могут быть рассмотрены в рамках моделей игр с двумя стратегиями и в точности известной платежной матрицей. Приспособительное поведение живых организмов зависит от того, насколько удачно (в среднем) они выбирают свою стратегию поведения из достаточно большого множества возможных. В реальной жизни этот выбор определяется как поведением предполагаемого противника, так и условиями внешней среды. Учет подобных обстоятельств крайне затрудняют создание правдоподобных математических моделей поведения.

1.2. МОДЕЛЬ ИГРЫ РАЗМЕЩЕНИЙ

В математической теории игр особое место занимает специальный класс игр, который принято называть играми полковника Блотто и играми Лотто. Это игры с нулевой суммой и неполной информацией: каждый игрок должен распределить заданный ресурс по заданному числу полей (выбрать стратегию), после чего по определенным правилам происходит сравнение этих размещений, а выигрыш поля определяется, например, знаком величины разности ресурсов. Основное отличие игры Лотто от игры Блотто состоит в том, что игра Лотто *не предполагает* фиксацию сравниваемых полей.

В подобных играх, в отличие от таких распространенных моделей, как например «дилемма узника», число возможных чистых стратегий у игрока экспоненциально растет с размерностью задачи, т. е. с числом полей и суммарной величиной распределяемого ресурса. Это обстоятельство не является проблемой для установления таких общих закономерностей в поведении игроков, как нахождении цены игры и равновесия в смешанных стратегиях. Но факт наличия равновесия в смешанных стратегиях ничего не говорит о *динамике* игры, а именно этот вопрос часто становится определяющим в тех ситуациях, моделью которых являются игры размещений. Кроме того, в любых реальных приложениях желательно иметь способ, позволяющий априори выбирать класс «успешных» в среднем стратегий [1].

Итак, содержательно, главная цель работы в том, чтобы в классе дискретных игр размещения, обнаружить возможность задания таких интегральных характеристик успешности игроков, которые позволят прогнозировать поведение больших популяций конкурирующих агентов. Существенно, чтобы вычисление таких характеристик («типов» игроков) было *tractable* процедурой, т. е. трудоемкость вычисления «типа» росла бы с размерностью параметров игрока не более, чем по полиномиальному закону. Условно говоря, в нашей модели игроков одного и того же типа можно считать представителями некоторого биологического вида (*species*), а изучение их эволюционной динамики позволяет понять правила

взаимодействия агентов, которые принадлежат различным видам.

Дальнейшее изложение построено следующим образом.

Раздел 2. «Игры размещений» посвящен краткому обзору результатов игр двух лиц, описываемых моделью размещения заданного числа объектов по заданному количеству мест, т. е. тем задачам, которые в теории игр носят название «игра полковника Блотто» и «игра Лотто».

В разделе 3 « I -матрицы и равномерность разбиений» рассмотрен способ приближенного вычисления результатов произвольной дискретной игры Лотто двух игроков и некоторые числовые свойства разбиений.

Раздел 4 «Эволюция разбиений» является основным. В нем содержатся описание алгоритмов компьютерного моделирования и полученные с помощью этих алгоритмов численные и графические результаты, характеризующие динамику взаимодействия разбиений различного типа.

Наконец, в «Заключении» намечена программа дальнейших исследований.

2. Игры размещений (некоторые результаты)

В 1921 году Э. Борель [4] предложил решение задачи размещения объектов, как игры двух лиц с постоянной суммой и полной информацией. Рассмотренная им математическая модель получила впоследствии (во время второй мировой войны) название «игра полковника Блотто». В первоначальной формулировке игрок A и игрок B должны разместить имеющиеся у них целочисленные ресурсы X_A и X_B , ($X_A \geq X_B$) между несколькими участками. Каждый из игроков *не знает* размещения, которое выбрал противника. Игру выигрывает тот, кто побеждает на большем числе участков (полей боя), а выигрыш поля боя определяется *знаком* величины $l_1(i) - l_2(i)$, где $l_1(i)$ ($l_2(i)$) — величина ресурса, размещенного на поле i первым (вторым) игроком (такое определение выигрыша принято называть «winner takes all».) Таким образом, в основе игровых моделей типа игр Блотто, лежат способы размещения некоторого целого числа (ресурса) по цело-

му числу игровых полей. В играх этого класса, как правило, нет чистых оптимальных стратегий. Большая часть известных работ этого направления посвящена нахождению равновесных по Нэшу смешанных стратегий в различных предположениях относительно принципов размещения ресурса, симметрии этих ресурсов и способов определения победителей на каждом поле [9]. Так, в частности, были изучены случаи несимметричных величин ресурса у игроков, причем сами ресурсы могли не только принимать целочисленные значения, но и быть безгранично делимы (непрерывный случай).

Для непрерывной модели один из наиболее общих результатов получен в [7]. В [6] изучались также функции платежа, отличные от принципа *winner takes all*, и ситуации при которых различным участкам битвы приписываются различные веса (выигрыш одних участков более значим, чем других). В [6] также подробно рассмотрена так называемая игра Лотто, обладающая тем существенным отличием от игры Блотто, что не предполагает задания фиксированной нумерации полей, в которых размещается ресурс. Иными словами, в этой игре рассматривается размещение ресурса B на N полях с точностью до заданного множества перестановок полей. Это ставит противников перед необходимостью поиска такого размещения, которое обеспечит победу, по крайней мере, для большинства возможных перестановок полей. В [7] отмечается, что игра Блотто и игра Лотто (при равных значениях размещаемых ресурсов и числе полей) имеют одну и ту же цену. Кроме того, здесь показано, что в случае непрерывной игры Лотто, когда первый игрок выбирает распределение неотрицательных целочисленных случайных переменных X , для которого математическое ожидание $E(X) = a$, а второй — распределение с математическим ожиданием $E(X) = b$ ($a \geq b > 0$), цена игры $\text{Val } \Gamma(a, b) = (a - b)/a$ и единственная оптимальная стратегия для более сильного игрока ($a > b$) состоит в том, чтобы равномерно на интервале $[0, 2a]$ с математическим ожиданием a распределить имеющийся ресурс по всем полям, а для игрока с ресурсом $b - c$ вероятностью $1 - b/a$ размещать на своих полях 0

и с дополнительной вероятностью играть такое же распределение на интервале $[0, 2a]$, как и более сильный игрок (в этом случае его распределение будет иметь математическое ожидание равное b). Очевидно, в случае равенства ресурсов ($a = b$) оба игрока играют одинаковые равномерные распределения на интервале $[0, 2a]$ и получают нулевую цену.

С позиций комбинаторных алгоритмов генерация всех размещений заданного числа в заданном количестве мест распадается на двенадцать типов задач. Задача, которая в соответствии с терминологией [2], называется разбиением (*partition*) n непомеченных шаров по m помеченным урнам соответствует модели игры Блотто, а задача разбиения n непомеченных шаров по m непомеченным урнам это модель игры Лотто. В этих моделях аналогом урны является игровое поле, а аналогом количества шаров ресурс, который необходимо разместить в каждом поле.

3. М_Г-матрицы и равномерность разбиений

3.1. ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Назовем разбиение числа B на не более, чем N частей (B, N) -разбиением. Алгоритм определения того, какое из двух (B, N) -разбиений выиграет в игре Блотто, очевиден и требует не более N операций над $\log B$ -разрядными числами. Тривиальный переборный алгоритм позволяет установить точные значения числа выигрышей, проигрышей и ничьих в игре Лотто, однако этот алгоритм оказывается untractable даже при малых значениях N , не говоря уже об изучении динамики поведения больших коллективов. Потому задача вычисления результата игры Лотто с полиномиальной оценкой трудоемкости оказывается первостепенной.

Пусть заданы N -мерные наборы целых положительных чисел $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ и $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$, причем $\sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^N b_i = B$. Результатом операции векторного умножения $\alpha \cdot \beta^T$, где операция алгебраического умножения любых $a_i \in \alpha$ и $b_i \in \beta^T$ заменяется операцией $\text{sign}(a_i - b_j)$ будет число, соответствующее результату игры Блотто между разбиениями α и β . В случае умножения $\alpha^T \cdot \beta$ (в тех же предположениях) по-

лучается квадратная тернарная матрица $N \times N$, которую назовем матрицей взаимодействий (*interaction matrix*) M_I , состоящая из элементов $m_{ij} = \text{sign}(a_i - b_j)$. Главная диагональ этой матрицы также является результирующим вектором игры Блотто (при заданном порядке столбцов и строк), а след — численным результатом игры Блотто. В таблице 2 показан пример такой матрицы, для пары строго упорядоченных по возрастанию (63, 7)-разбиений α и β . След этой матрицы и сумма всех значений элементов равны 5, т. е. разбиение β *проигрывает* в игру Блотто. Однако, стоит переставить столбцы в другом порядке, например, 27, 11, 7, 9, 5, 3, 1 и след матрицы станет равным -1 , т. е. β будет *выигрывать* в игру Блотто. Таким образом, для выяснения победителя в игре Лотто, не сводящегося к перебору всех перестановок столбцов, следует пользоваться более просто вычисляемыми параметрами.

Таблица 2. Пример M_I -матрицы

$\alpha \backslash \beta$	1	3	5	7	9	11	27	
2	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
4	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	
6	1	1	1	-1	-1	-1	-1	
8	1	1	1	1	-1	-1	-1	
10	1	1	1	1	1	-1	-1	
12	1	1	1	1	1	1	-1	
21	1	1	1	1	1	1	-1	Tr = 5
Σ	7	5	3	1	-1	-3	-7	$S(\alpha/\beta) = 5$

Определение 1. Назовем *относительной силой* разбиения α по отношению к β величину $S(\alpha/\beta)$:

$$(1) \quad S(\alpha/\beta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{sign}(a_i - b_j).$$

Соответственно, *относительной силой* разбиения β по отношению к α будет

$$(2) \quad S(\beta/\alpha) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \text{sign}(b_j - a_i).$$

Величину $S(\alpha)$ назовем **собственной силой** разбиения α :

$$(3) \quad S(\alpha) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta(a_i - a_j), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

3.2. СВОЙСТВА M_I -МАТРИЦ

1. Нули в M_I -матрице появляются в том и только в том случае, когда справедливо равенство $a_i = b_j$ для какой-либо пары вхождений в разбиения α и β .

2. Изменение порядка столбцов (строк) M_I -матрицы приводит к изменению величины её следа. Но значения величин $S(\alpha/\beta)$ и $S(\beta/\alpha)$ при этом остаются неизменными. Таким образом, эти величины являются инвариантами для игры Лотто с разбиениями α и β , и могут выступать в качестве функций оценки платежа.

3. Для значения относительной силы разбиений справедливы границы $-(N^2 - N) \leq S(\alpha/\beta) \leq N^2 - N$. Здесь верхняя и нижняя границы реализуются, например, для разбиений вида $\alpha = \{1, 1, \dots, B - N + 1\}$ и $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$, где $b_i > 1$ для всех $i \in [0, N]$ и $\sum_{i=1}^N b_i = B$.

4. Пусть (B, N) -разбиение $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ упорядочено по возрастанию. Матрица $M_I(\alpha, \alpha)$ будет в этом случае кососимметрической: элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, имеют противоположные знаки, а все диагональные элементы равны нулю. При любом виде разбиения α число нулей в такой матрице $q \geq N$, причем $q = N$ только для вполне упорядоченных последовательностей.

5. Для $S(\alpha)$ справедлива оценка $0 \leq S(\alpha) \leq N(N - 1)/2$, где нижняя граница достигается на разбиениях из N одинаковых значений (если B/N целое), а верхняя на вполне упорядоченных и одинаковых по упорядочению последовательностях α . При любой перестановке в вполне упорядоченных последовательностях α , соответствующая матрица уже не будет кососимметрической, но след матрицы всегда равен 0.

На рис. 1 показано распределение по значениям собственной силы для $(100, 10)$ -разбиений.

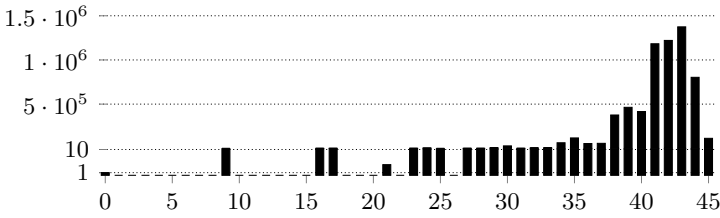


Рис. 1. Распределение всех $(100, 10)$ -разбиений по значениям собственной силы (масштаб часть оси ординат от 1 до 10 для наглядности увеличен).

3.3. РАВНОВЕСИЕ РАЗБИЕНИЙ

Определение 2. Пусть задано произвольное (B, N) -разбиение $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ и пусть N — четное. В этом случае **уравновешенностью** $E(\alpha)$ разбиения α будем называть величину

$$(4) \quad E(\alpha) = \max \left| \sum_{i=1}^{N/2} (N/2 - i + 1)(a_i - a_{N-i}) \right|,$$

где максимум берется по всем перестановкам α . (Аналогично определяется понятие «уравновешенности» для случая, когда N нечетное. Разница лишь в том, что в этом случае значение ресурса на поле $(N - 1)/2 + 1$ — в центре разбиения — не учитывается при вычислениях.)

На рис. 2 показано распределение по значениям уравновешенности для $(100, 10)$ -разбиений.

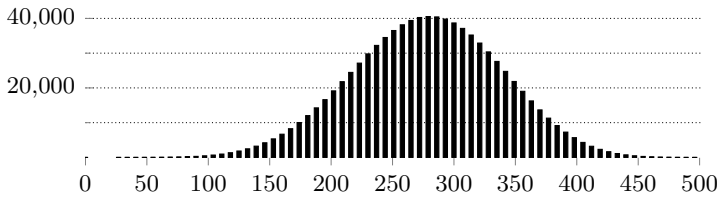


Рис. 2. Распределение всех $(100, 10)$ -разбиений по значениям уравновешенности.

Обозначим через $\mathbb{R}(B, N)$ множество всех (B, N) -разбиений. Справедлива оценка

$$(5) \quad 0 \leq E(\mathbb{R}(B, N)) \leq (N/2)(B - N),$$

где оценка сверху достигается на разбиении вида $\{1, 1, \dots, 1, B - N + 1\}$, а оценка снизу на равномерном разбиении $B/N, \dots, B/N$, когда B/N — целое. Легко убедиться, что сложность алгоритма вычисления $E(\mathbb{R}(B, N))$ не превосходит $\mathcal{O}(N^2)$.

4. Эволюция разбиений

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ: ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Результаты компьютерного моделирования эволюции разбиений, приведенные в этом разделе, получены при следующих основных допущениях:

а) Из множества $\mathbb{R}$ всех возможных (B, N) -разбиений случайно и равномерно выбираются нулевые поколения $\mathcal{A}^0 \subset \mathbb{R}(F_1, E_1)$ и $\mathcal{B}^0 \subset \mathbb{R}(F_2, E_2)$ одного размера для двух конкурирующих популяций $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Здесь аргументы F и E задают диапазон собственной силы и диапазон уравниваемости для игроков из каждой популяции.

б) В каждый момент времени $t = 1, 2, 3, \dots$ случайно и равномерно выбирается пара противников $\alpha \in \mathcal{A}^{t-1}$ и $\beta \in \mathcal{B}^{t-1}$, которые разыгрывают между собой игру Лотто.

с) Результат поединка (в виде значения платежных функций, полученных противниками) определяет ход эволюции — в общем случае, одержавший победу увеличивает свои шансы на репликацию.

д) В экспериментах заранее определены правила по которым происходит репликация и правила выбывания проигравших.

е) Эволюционный процесс происходит до тех пор, пока не будут выполнены заданные условия остановки (например, число членов в коллективе и/или количество раундов взаимодействия).

4.2. ДИНАМИКА ПОВЕДЕНИЯ

Объем статьи не позволяет подробно изложить все полученные результаты компьютерного моделирования. Однако, без-

условно полезно указать некоторые закономерности эволюционной динамики разбиений, которые отмечены во многих экспериментах. Особенно четко они наблюдались при наиболее простых правилах репликации: игрок α , одержавший победу над соперником β в данном раунде (т. е. когда $S(\alpha/\beta) > 0$), порождает «потомка» в точности воспроизводящего α , а проигравший выбывает из дальнейшей игры. Иначе говоря, потомки всегда принадлежат к популяции своих родителей. Будем в дальнейшем называть такую репликацию «идеальной» или i -репликацией.

Анализ демонстрируемого поведения позволяет определить понятие «ядра» (core) популяции. Но, прежде чем дать формальное определение, полезно изучить некоторые идеализированные модели взаимодействия, которые объясняют, что лежит в основе понятия «ядра».

Рассмотрим две популяции $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, заданные нулевыми поколениями одного размера l : $\mathcal{A}^0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ и $\mathcal{B}^0 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\}$. При этом, пусть каждое разбиение из $\mathcal{A}^0$ побеждает всякое разбиение из $\mathcal{B}^0$, т. е. $S(\alpha_i/\beta_j) > 0$ для всех $i, j \in [1, l]$. Очевидно, что в эволюционной игре, основанной на правилах из 4.1 с i -репликацией, популяция $\mathcal{A}$ полностью вытеснит $\mathcal{B}$ через l сыгранных партий — в точке $t_1 = l$ (рис. 3а).

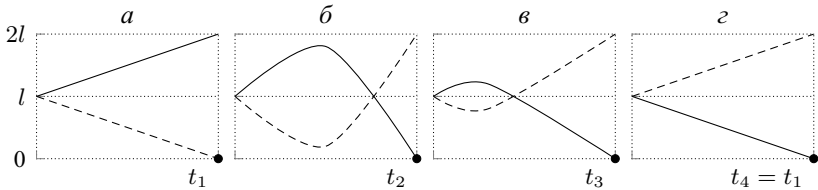


Рис. 3. Эволюционная динамика популяций $\mathcal{A}$ — и $\mathcal{B}$ ---- (в б–в приведены «усредненные» вероятностные кривые).

Заменим одно из разбиений в нулевом поколении популяции $\mathcal{B}$ на такое разбиение γ_1 , которое побеждает всякое⁴ разбиение из

⁴ Поскольку здесь нет пока никаких ограничений на вид рассматриваемых классов разбиений, можно полагать, что искомое разбиение существует.

$\mathcal{A}^0$, т. е. $S(\gamma_1/\alpha_i) > 0$ для всех $i \in [1, l]$. Тот факт, что в «слабом» классе появляется хотя бы одно «непобедимое» разбиение меняет итог эволюционной игры: популяция $\mathcal{B}$ вытеснит $\mathcal{A}$ после t_2 сыгранных партий (рис. 3б), где $l \leq t_2 \leq 3l - 2$. Нижняя граница достигается в случае, если в l партиях подряд противником у $\mathcal{A}$ оказывается разбиение γ_1 или его потомки-дубликаты. Верхняя граница достигается, когда в первых $l - 1$ партии против разбиений из $\mathcal{A}$ играют «слабые» разбиения $\beta_j \in \mathcal{B}$ и, в результате их полного «вымирания», в $\mathcal{B}$ остается единственное разбиение γ_1 , которое начинает выигрывать и «порождать» собственные дубликаты до тех пор, пока полностью не вытеснит $\mathcal{A}$.

В общем случае, заменяя m «слабых» разбиений β_j в нулевом поколении популяции $\mathcal{B}$ на m «непобедимых» разбиений γ_k (т. е. $S(\gamma_k/\alpha_i) > 0$ для всех $i \in [1, l]$, $k \in [1, m]$) популяция $\mathcal{B}$ полностью вытеснит $\mathcal{A}$ после t_3 сыгранных партий, где $l \leq t_3 \leq 3l - 2m$ (рис. 3в). А при $m = l$ первоначальная картина динамики популяций, показанная на рис. 3а симметрично отражается — популяция $\mathcal{B}$ полностью вытесняет $\mathcal{A}$ после $t_4 = t_1 = l$ партий (рис. 3г показывает, как будет изменяться кривая в б при увеличении числа $m > 1$).

Определение 3. Пусть на множестве всех возможных $(\mathcal{B}, N)$ -разбиений $\mathbb{R}$ задана пара популяций $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ их нулевыми поколениями $\mathcal{A}^0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{l_1}\} \subset \mathbb{A} = \mathbb{R}(I_1)$, $\mathcal{B}^0 = \{\beta_1, \dots, \beta_{l_2}\} \subset \mathbb{B} = \mathbb{R}(I_2)$, где $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — классы разбиений (т. е. подмножества $\mathbb{R}$), заданные некоторыми наборами, обозначенными здесь I_1 и I_2 .⁵

Назовем **ядром популяции $\mathcal{A}$** по отношению к популяции $\mathcal{B}$ подмножество таких «непобедимых» разбиений $\text{core}(\mathcal{A}/\mathcal{B}) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subset \mathcal{A}^0$, что $S(\gamma_i/\beta) > 0 \forall i \in [1, l], \forall \beta \in \mathcal{B}^0$.

Ядром класса $\mathbb{A}$ по отношению к классу $\mathbb{B}$ будем называть такое «непобедимое» подмножество $\text{core}(\mathbb{A}/\mathbb{B}) = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \subset \mathbb{A}$, что $S(\zeta_i/\beta) > 0 \forall i \in [1, n], \forall \beta \in \mathbb{B}$.

⁵ Наборы I_1 и I_2 определяют условия принадлежности разбиений к выбранному классу. В этом качестве могут выступать диапазоны значений собственной силы и уравновешенности.

Числа m и n назовем размерами ядра.

Заметим, что между ядром класса и ядром популяции имеет место соотношение

$$(6) \quad (\mathcal{A}^0 \cap \text{core}(\mathbb{A}/\mathbb{B})) \in \text{core}(\mathcal{A}/\mathcal{B}),$$

т. е. если популяция содержит разбиения из ядра своего класса, то эти разбиения будут принадлежать ядру этой популяции.

Описанные ниже эксперименты свидетельствуют, что такие ядра существуют, а их параметры зависят, в частности, от значений собственной силы и уравновешенности разбиений класса.

Далее приведены результаты двух групп экспериментов: в первой группе *I* «сильные» нулевые поколения выступают против «слабых» и во второй группе *II* исследованы различные сочетания «силы» и «уравновешенности» для конкурирующих разбиений нулевых поколений.

4.3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для проведения компьютерного моделирования был создан комплекс программ, написанных на Python. Большая часть проведенных экспериментов проводилась на множестве всех возможных $(100, 10)$ -разбиений $\mathbb{R}$, которое было построено с помощью алгоритма из [2, с. 446] и содержало 6 292 069 элемента.

Все эксперименты указанных выше групп проводились с двумя популяциями, в нулевом поколении каждой из которых находилось множество разбиений с заданными параметрами собственной силы и уравновешенности F_1, E_1 и F_2, E_2 .

В группе *I* проведено 20 экспериментов с 1000 разбиениями в нулевом поколении каждой популяции, где F_1 это «сильные» разбиения (с диапазоном собственной силы 45–42), а F_2 — «слабые» (с диапазоном 0–27). Значение уравновешенности не ограничивалось в обеих популяциях.

На рис. 4 показано поведение популяций из «сильного» $\mathbb{S}$ и «слабого» $\mathbb{W}$ классов разбиений. На этом и всех последующих рисунках по оси ординат — численность обеих конкурирующих популяций, по оси абсцисс — суммарное количество сыгранных партий. Каждый рисунок состоит из четырех графиков: основной, на котором нанесены эволюционные динамики популяций

всех 20 экспериментов, и три дополнительных с «характерными» поведением в отдельно взятых экспериментах.

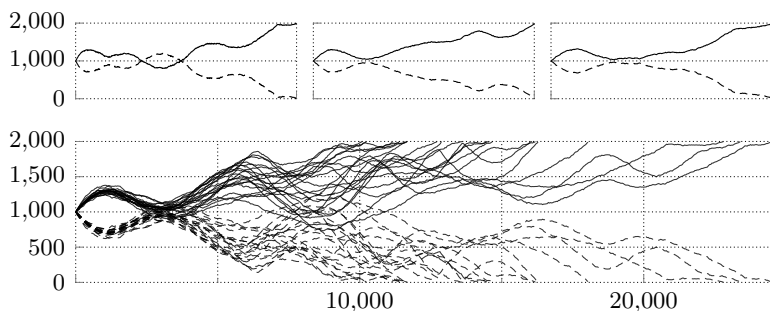


Рис. 4. Динамика популяций классов S — и W ----.

Популяции «сильного» класса S эволюционно выигрывают популяции «слабого» класса W во всех экспериментах.

В группе II изучено поведение четырех классов разбиений каждый из которых характеризуется определенным сочетанием «силы» и «уравновешенности». Значения «силы» выбраны так же, как и в первой группе экспериментов: «сильные» разбиения S с диапазоном собственной силы 45–42, «слабые» W — с диапазоном 0–27. Значения уравновешенности выбраны следующим образом: «уравновешенные» E — сумма первых пяти полей отсортированного по убыванию разбиения ≤ 60 для W и ≤ 62 для S ; «неуравновешенные» NE — сумма первых пяти полей ≥ 75 для W и S . Таким образом, проводились по 20 экспериментов для всех шести типов возможных сочетаний четырех классов: SE , SNE , WE , WNE . Численность нулевого поколения популяций в этих экспериментах была выбрана 200 — требования по сочетания «силы» и «уравновешенности» оказываются достаточно ограниченными.

Покажем вначале примеры эволюционной динамики, когда нулевое поколение одной из популяций состоит из разбиений «слабого» «уравновешенного» класса WE , а другой — из разбиений «сильного» «уравновешенного» класса SE .

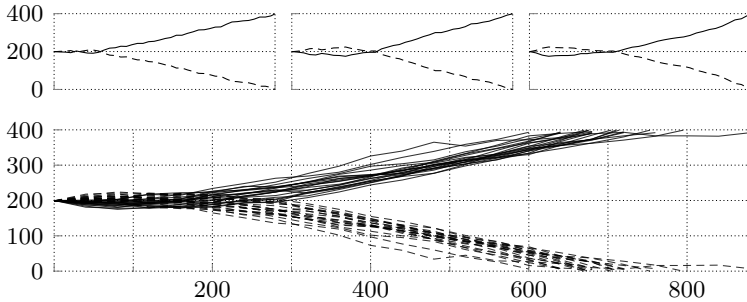


Рис. 5. Динамика популяций классов WE — и SE ----.

Несмотря на то, что сначала «слабый» «уравновешенный» класс WE проигрывает, примерно после второй сотни партий популяции этого класса начинают численно превосходить популяции класса SE и в конечном итоге эволюционно выигрывают, причем во всех экспериментах (рис. 5).

Однако «слабый» и «неуравновешенный» класс WNE эволюционно проигрывает «сильному» и «неуравновешенному» SNE в каждом из наблюдавшихся случаев — рис. 6.

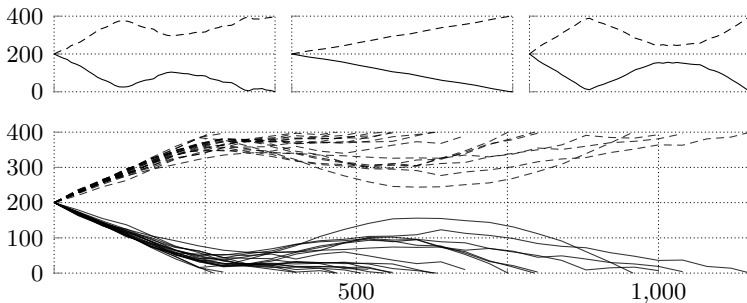


Рис. 6. Динамика популяций классов WNE — и SNE ----.

При этом, класс WNE выигрывает в 6 случаев из 20 у «сильного» и «уравновешенного» класса SE (рис. 7), и в 3 случаях из 20 побеждает «слабый» и «уравновешенный» WE (рис. 8). В схватках WNE со всеми тремя классами встречаются «чистые»

победы соперников, подобные тем, что рассмотрены в 4.2 в случае идеальной игры (рис. 3а,з). А все эксперименты, в которых WNE одерживает победу, демонстрируют X-поведение, схожее с рисунками 3б-в, иллюстрирующие понятие ядра популяции.

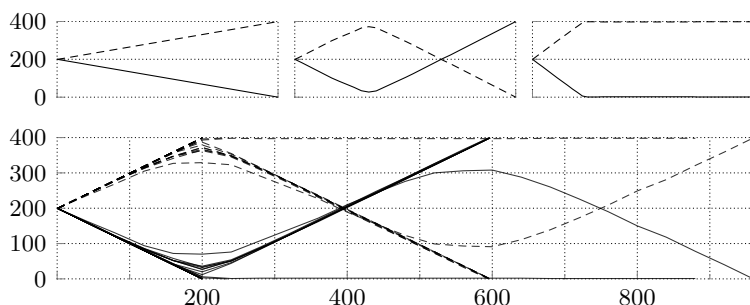


Рис. 7. Динамика популяций классов WNE — и SE ----.

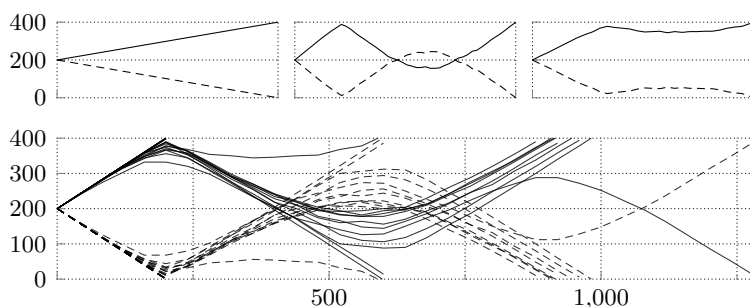


Рис. 8. Динамика популяций классов WE — и WNE ----.

Подобное X-поведение показывают популяции «сильного» и «неуравновешенного» класса SNE во всех схватках с популяциями классов WE (рис. 9) и SE (рис. 10). Класс SNE эволюционно выигрывает у этих классов во всех экспериментах.

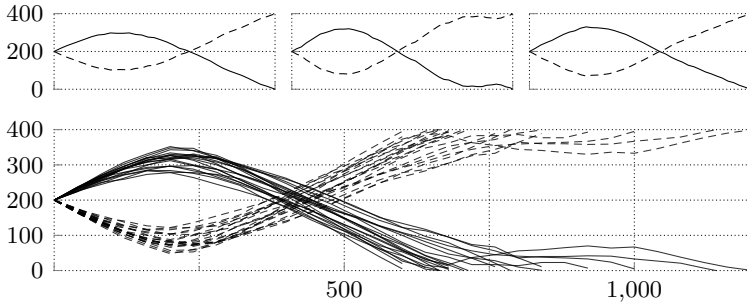


Рис. 9. Динамика популяций классов WE — и SNE ----.

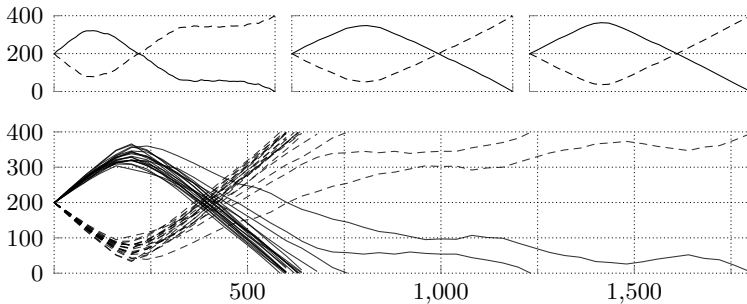


Рис. 10. Динамика популяций классов SE — и SNE ----.

Основные выводы

Группа экспериментов I. На большом временном горизонте «сильные» всегда выигрывают у «слабых». При этом во всех случаях «сильные» приходят к победе через колебательный процесс, амплитуда которого такова, что размер популяции победителя не опускается ниже 80% его исходной численности.

Группа экспериментов II. Среди рассмотренных, класс «сильных» «неуравновешенных» разбиений SNE одерживает победу у всех своих противников. Класс «слабых» «уравновешенных» разбиений WE проигрывает первому, однако выигрывает у всех остальных в большинстве экспериментов. Классы SE и WNE по числу выигрышей примерно равны и уступают первым двум. Следует отметить, что комбинации условий «силы»

и «уравновешенности» для классов разбиений демонстрируют в конкурирующем поведении популяций этих классов эффекты ядер, описанных в 4.2.

Заключение

В математической теории игр преобладает изучение статических или метастабильных состояний, таких, скажем, как равновесие по Нэшу. Между тем исследование динамики игры обещает формирование нового взгляда на общие принципы конкурентной борьбы — не только в эволюционной теории игр, но и во всех случаях повторяющихся игр, от конкурентной борьбы в экономике до спортивных состязаний. Основа такого нового взгляда — поиски особенностей множества стратегий поведения. Фактически, именно обнаружением и применением новой стратегии объясняются выдающиеся успехи, как промышленных корпораций (например, Apple), так и спортивных (например, футбольный клуб Барселона). Тем не менее, никаких формальных моделей, которые позволяют объяснить структуру множества стратегий и их эффективность, до сих пор, насколько нам известно, не появлялось.

Дискретные игры, типа игры Лотто и Блотто, являются благоприятной возможностью заполнить пробел. Хотя множество возможных стратегий в таких играх чрезвычайно велико, их структура интуитивно проста и позволяет с помощью компьютерного моделирования получать почти «окончательные» численные результаты даже при относительно больших размерностях.

Эволюционная динамика разбиений, результаты анализа которой приведены в настоящей работе, лишь первый шаг на пути изучения динамики игр. Тем не менее, уже ясно, что анализ множества стратегий игроков и обнаружение в них общих закономерностей, типа «разнообразия» структуры стратегии и ее «уравновешенности» может предложить убедительную классификацию «силы» той или иной стратегии. Следует заметить, что эвристические соображения о качестве стратегий в том или ином виде известны всем опытным практикам, хотя формальные модели обычно отсутствуют.

Наши результаты убеждают, что, по крайней мере, для рассмотренных моделей, возможен устойчивый прогноз не только финального состояния конкурентной борьбы, но и качественное описание динамики процесса. Эти возможности побуждают продолжать исследования, занявшись расширением модели «наследования» или репликации, в первую очередь, за счет репликации с мутациями, а также изучить влияние общих ограничений, которые накладывает — до сих пор не включенная в модель — среда, в которой происходит конкуренция.

Литература

1. ГОРЯШКО А.П. *Теория игр: от анализа к синтезу. Обзор результатов проектирования рынков* // Cloud of Science – 2014. – Т. 1. №1, с. 112–154, <http://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CloudOfScience01010112.pdf>
2. КНУТ Д.Э. *Искусство программирования, том 4а* // – М.: Вильямс, 2013.
3. ARAD, A., RUBINSTEIN, A. *Multi-dimensional iterative reasoning in action: The case of the Colonel Blotto game* / Journal of Economic Behavior & Organization – 2012 – №84, P. 571–585.
4. BOREL, E. *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique* / Comptes Rendus de l'Académie – 1921. – №173, P. 1304–1308. Translated by SAVAGE, L.J. *The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels* / Econometrica – 1953. – №21, P. 97–100.
5. EASLEY, D., KLEINBERG J. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World* / Cambridge University Press – 2008.
6. GOLMAN, R., PAGE S.E. *General Blotto: Games of Strategic Allocative Mismatch* / University of Michigan, – 2006 – mimeo.
7. HART, S. *Discrete Colonel Blotto and General Lotto Games* / International Journal of Game Theory – 2008 – №36, P. 441–460.

8. MORAN, A.P. *The Statistical Processes of Evolutionary Theory* / Oxford: Clarendon Press, – 1962 – 5.
9. ROBERSON, B. *The Colonel Blotto Game* / Econ. Theory – 2006 – №29, P. 1–24.
10. TAYLOR, C., FUDENBERG, D., SASAKI, A., NOWAK, M.N. *Evolutionary game dynamics in finite populations* / Bulletin of Mathematical Biology – 2004 – v.6 №66, P. 1621–1644.

EVOLUTIONARY DYNAMICS OF PARTITION GAMES

Pavel Bocharov, Wheely, Moscow, Head of Mobile Development (pavel@wheely.com).

Alexander Goryashko, Moscow Technological Institute, Doctor of Science, professor (petrovich4you@gmail.com).

Abstract: We introduce a model of evolutionary game dynamics where actors are the partitions and the rule of game are identical to that for a Lotto game. Our focus is on the computing modelling to classify the partitions depending on “winning ability” in different partitions population. We discuss several examples with unexpected results of game dynamics and practical using of these approach.

Keywords: game theory, colonel Blotto game, Lotto game, evolutionary game.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...*

*Поступила в редакцию ...
Дата опубликования ...*