УДК 519.837.3
ББК (В) 22.18

ТОЧНОЕ АГРЕГИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ В МНОГОШАГОВЫХ ИГРАХ ДВУХ ЛИЦ С ФИКСИРОВАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ХОДОВ ПРИ АГРЕГИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИИ О ВЫБОРЕ ПАРТНЕРА

Алиев В. С.[1]
(ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве Российской Федерации», Москва)

Рассматривается многошаговая игра двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при информации на каждом ходу о сложившейся к моменту принятия решения предыстории игры и агрегированной информации о выборе игрока 2 на этом ходу. Игрок 1, обладая на каждом шаге i этой информацией, первым выбирает на этом шаге стратегию $\boldsymbol{x}_i(\cdot)$, *и в начале игры, сразу на n ходов сообщает свою стратегию* $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ *игроку 2. Игрок 2, получая информацию о выборе игрока 1 и обладая информацией на каждом ходу о сложившейся к моменту принятия решения предыстории, выбором своей стратегии* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *стремится к увеличению своей функции выигрыша. В данной работе, используя результатов теории групп Ли, найдены достаточные условия точного агрегирования в рассматриваемой игре.*

Ключевые слова: игра, агрегирование, оптимальная стратегия, максимальный гарантированный результат, теория групп Ли, точное агрегирование.

1. Введение

В результате решения агрегированной задачи мы получаем значения укрупненных переменных, которые обычно не совпадают со значениями аналогичных агрегатов, получаемых при укрупнении точного решения первоначальной задачи. Разность между этими величинами называется ошибкой агрегирования. Классическая теория агрегирования изучает методы нахождения наилучшего способа агрегирования, которые дали бы точное агрегирование или максимально уменьшали бы ошибку агрегирования.

Теория классического агрегирования, за исключением конкретных случаев, не решила проблемы устранения ошибки агрегирования и, главное, – проблемы дезагрегирования, т.е. получить решения исходной задачи. Для устранения этих недостатков методов классического агрегирования в экономико-математических исследованиях появились методы итеративного агрегирования, позволяющие получать значения укрупненных и детализированнных показателей плана с любой заранее заданной точностью.

К сожалению, для большинства оптимизационных задач, решаемых методами итеративного агрегирования, вопрос сходимости процесса итеративного агрегирования до сих пор остается открытым, несмотря на то, что для них доказаны теоремы, дающие условие окончания процесса, а именно, доказана оптимальность неподвижной точки этих процессов для исходной задачи.

Вопросы точного агрегирования до сих пор остаются актуальными.

Настоящая работа посвящена вопросам точного агрегирования в многошаговых играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о выборе игрока 2 на этом ходу и информации о сложившейся к моменту принятия решения предыстории игры, рассмотренных в [1].

2. Постановка задачи

Определение. Агрегирование в играх с фиксированной последовательностью ходов называется точным, если максимальные гарантированные результаты игрока, имеющего право сделать ход первым, при агрегированной и полной информации о выборах других игроков (другого игрока) совпадают.

Прежде чем сформулировать достаточные условия точного агрегирования, в соответствии с [1], где рассматривалась игра $\Gamma_2^1(T)$, введем обозначения, приведем формулировки задач и полученные там результаты.

---

[1] *Алиев Вагиф Судеиф оглы, доцент, кандидат физико-математических наук (Aliev_VS@mail.ru, тел. 8-499-760-9622, 8-916-128-0792).*

Рассматриваются многошаговые игры двух лиц. Функции выигрыша игроков, соответственно, $f_i(x,v)$, i=1, 2, к увеличению значения которых каждый из них стремится, предполагаются непрерывными, а x, v выбираются из соответствующих множеств

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i \subset E^k, \ V = \prod_{i=1}^{n} V_i \subset E^m,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $x_i \in X_i \subset E^{k_i}$, $v_i \in V_i \subset E^{m_i}$, $i = 1, \ldots, n$, $n < m$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$; X, V, X_i, V_i, $i = 1, \ldots, n$ – компактные множества; E^k, E^m, E^{k_i}, E^{m_i}, $i = 1, \ldots, n$ – евклидовы пространства соответствующей размерности.

В отличие от [2], [3] будем предполагать, что агрегированный вектор выбора игрока 2 $y = (y_1, ..., y_n) = (T_1(v_1), \ldots, T_n(v_n))$ при отсутствии информации о выборе v будет известен игроку 1 последовательно в n шагов, где $v_i \in V_i$, $y_i \in E^{r_i}$, $r_i < m_i$, $i = 1, \ldots, n$, а $T_i(\cdot) : E^{m_i} \to E^{r_i}$ – известные игрокам непрерывные на V_i операторы, $i = 1, \ldots, n$.

Введем следующие обозначения:

$\bar{x}_i = (x_1,...,x_i)$, $\bar{y}_i = (y_1,...,y_i)$, $\bar{v}_i = (v_1,...,v_i)$;

$\bar{T}_i(\bar{v}_i) = (T_1(v_1),...,T_i(v_i))$, $\bar{x}_i(\bar{T}_i(\bar{v}_i)) = (x_1(\bar{T}_1(\bar{v}_1)),...,x_i(\bar{T}_i(\bar{v}_i)))$;

$Y_i(T_i) = T_i(V_i)$ – образ множества V_i;

$V_i(y_i,T_i) = T_i^{-1}(y_i)\bigcap V_i$ – пересечение прообраза $y_i \in Y_i(T_i)$ с множеством V_i;

$\bar{V}_i(\bar{y}_i,\bar{T}_i) = \prod_{k=1}^{i} V_k(y_k,T_k)$, $\bar{V}_i = \prod_{k=1}^{i} V_k$;

$\bar{X}_i = \prod_{k=1}^{i} X_k$, $\bar{Y}_i(\bar{T}_i) = \prod_{k=1}^{i} Y_k(T_k)$, $i = 1, \ldots, n$;

$T(\cdot) = (T_1(\cdot),...,T_n(\cdot))$, $V(y,T) = \prod_{i=1}^{n} V_i(y_i,T_i)$.

Будем предполагать, что множеством стратегий игрока 1 на i-ом ходу является множество произвольных функций $\tilde{x}_i(\cdot)$, аргументами, которых являются сложившаяся к моменту принятия решения агрегированная предыстория $\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}$ и агрегированный выбор игрока 2 на i-ом ходу y_i где значение функции $\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i)$ принадлежить множеству X_i, т.е. $\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i) \in X_i$. Обозначим множество таких функций $\tilde{x}_i(\cdot)$ через $\tilde{X}_i$:

$$\tilde{X}_i = \left\{ \tilde{x}_i(\cdot) : E^{r_i + \sum_{s=1}^{i-1}(k_s + r_s)} \to E^{k_i} \;\middle|\; \tilde{x}_i(\bar{X}_{i-1}, \bar{Y}_i(\bar{T}_i)) \subseteq X_i \right\}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что стратегии игрока 1 могут быть представлены в следующем виде $x_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i) = x_i(\bar{y}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. В нашем изложении $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ – символы отсутствия аргумента.

Стратегией игрока 2 на i-ом ходу $(1 \le i \le n)$ является $v_i \in V_i$, а агрегированной стратегией $y_i \in Y_i(T_i)$.

Игрок 1, обладая на каждом шаге i точной информацией о векторе $(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i)$, первым выбирает $x_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, n$, и в начале игры сразу на n ходов сообщает свою стратегию $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ игроку 2.

Введем следующие обозначения:

$$L_n^1(x, y, T) = F_2(x, y, T) = \max_{v \in V(y,T)} f_2(x, v),$$

$$L_{i-1}^1(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T) = \max_{y_i \in Y_i(T_i)} \max_{x_i \in X_i} L_i^1(\bar{x}_i, \bar{y}_i, T), \ i = 1, \ldots, n.$$

Тогда $L_{i-1}^1(\bar{x}_{i-1},, \bar{y}_{i-1}, T)$ выступает как максимальный гарантированный результат игрока 2 на i-м ходу.

При известной стратегии игрока 1, в соответствии со своим правилом поведения, игрок 2 свою стратегию $v \in V$ выбирает из множества

$$R_2(x(\cdot),T) = \Big\{ v \in V \;\mid\; f_2(x(T(v)), v) = L_n^1(x(T(v)), T(v), T) \geq$$

$$\geq \max \Big\{ \max_{0 \leq i \leq n-1} L_i^1(\bar{x}_i(\bar{T}_i(\bar{v}_i)), \bar{T}_i(\bar{v}_i), T);\; \sup_{z \in V} f_2(x(T(z)), z) - \delta(x(\cdot)) \Big\} \Big\}$$

где $\delta(\cdot)$ – известный игроку 1 функционал, причем $\delta(\cdot) = 0$, если в определении $R_2(x(\cdot), T)$ супремум достигается, и равен числу $\delta(\cdot) = \delta_0 > 0$ в противном случае.

Игрок 1, зная о таком правиле поведения игрока 2, выбором своей стратегии $x(\cdot)$, стремится получить (может быть, с ε'-точностью ($\varepsilon' > 0$)) свой максимальный гарантированный выигрыш

$$\gamma_2^1(T) = \sup_{x(\cdot) \in \tilde{X}} \; \inf_{v \in R_2(x(\cdot),T)} f_1(x(T(v)), v), \text{ где } \tilde{X} = \prod_{i=1}^{n} \tilde{X}_i .$$

Введем следующие обозначения:

$$X_i^{н}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T) = Arg \min_{x_i \in X_i} L_i^1(\bar{x}_i, \bar{y}_i, T), \; i = 1, \ldots, n;$$

$$E_i^1(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T) = Arg \max_{y_i \in Y_i} \min_{x_i \in X_i} L_i^1(\bar{x}_i, \bar{y}_i, T), \; i = 1, \ldots, n;$$

$$V^+(x, y, T) = Arg \max_{v \in V(y,T)} f_2(x, y);$$

$$M_n^1(x, y, T) = F_1(x, y, T) = \min_{v \in V^+(x, y, T)} f_1(x, v);$$

$$M_{i-1}^1(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T) = \inf_{y_i \in E_i^1(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T)} \; \sup_{x_i \in X_i^{н}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T)} M_i^1(\bar{x}_i, \bar{y}_i, T),$$

$$D_i^1(T) = \Big\{ (\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \bar{X}_i \times \bar{Y}_i(\bar{T}_i) \;\Big|\; L_i^1(\bar{x}_i, \bar{y}_i, T) > \max_{0 \leq k \leq i-1} L_k^1(\bar{x}_k, \bar{y}_k, T) \Big\},$$

$$K_i^1(T) = \sup_{(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in D_i^1(T)} M_i^1(\bar{x}_i, \bar{y}_i, T), \; i = 1, \ldots, n; \quad K_0^1(T) = M_0^1(T);$$

$$I(T) = \Big\{ i \in \{0, 1, \ldots, n\} \;\Big|\; \max_{0 \leq p \leq n} K_p^1(T) = K_i^1(T) \Big\}; \qquad s = \max_{i \in I(T)} i .$$

Если $s \neq 0$, то для достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ определим точку $(\bar{x}_s^{s,\varepsilon}, \bar{y}_s^{s,\varepsilon})$ такую, что выполнились следующие соотношения

$$(\bar{x}_s^{s,\varepsilon}, \bar{y}_s^{s,\varepsilon}) \in D_s^1(T): \; M_s^1(\bar{x}_s^{s,\varepsilon}, \bar{y}_s^{s,\varepsilon}, T) \geq K_s^1(T) - \varepsilon .$$

Определим точки y_i^+, $x_i^{н,\varepsilon}(\bar{y}_i)$, удовлетворяющие соответственно следующим условиям:

$$y_i^+ \in E_i^1(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T),$$

$$M_{i-1}^1(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T) + \beta) \geq \sup_{x_i \in X_i^{н}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y_i^+, T)} M_i^1(\bar{x}_i, \bar{y}_{i-1}, y_i^+, T), \; i = 1, \ldots, n;$$

$$x_i^{н,\varepsilon}(\bar{y}_i) \in X_i^{н}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T): \; M_i^1(\bar{x}_{i-1}, x_i^{н,\varepsilon}(\bar{y}_i), \bar{y}_i, T) \geq$$

$$\geq \sup_{x_i \in X_i^{н}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T)} M_i^1(\bar{x}_i, \bar{y}_i, T) - \frac{\varepsilon}{n}, \; i = 1, \ldots, n;$$

где $\beta > 0$ – достаточно малое число.

Теорема 1. В сформулированных условиях максимальный гарантированный результат игрока 1 в игре $\Gamma_2^1(T)$ равен $\gamma_2^1(T) = K_s^1(T)$. Получение такого результата (может быть, с точностью до ε) обеспечивает этому игроку стратегия $x^s(\cdot) \in \widetilde{X}$:

$$x_i^s(\bar{y}_i) = \begin{cases} x_i^{s,\varepsilon}, & \text{если } \bar{y}_i = \bar{y}_i^{s,\varepsilon},\ 1 \le i \le s, \\ x_i^{s,\varepsilon}(\bar{y}_i), & \text{если } \bar{y}_i \ne \bar{y}_i^{s,\varepsilon},\ 1 \le i \le s, \\ x_i^{s,\varepsilon}(\bar{y}_i), & \text{при } s+1 \le i \le n; \qquad i = 1,\ \dots,\ n. \end{cases}$$

А теперь приступим к формулировке достаточных условий точного агрегирования.

3. *Достаточные условия точного агрегирования*

Пусть в игре $\Gamma_2^1(T)$ из [1] непрерывные операторы $T_i(\cdot)$, определены следующим образом: $T_i(\cdot) = (t_i^1(\cdot), \dots, t_i^{r_i}(\cdot))$, , где $t_i^j(\cdot),\ j = 1,\ \dots,\ r_i,\ i = 1, \dots, n$ непрерывно дифференцируемые и функционально независимые функции v_i; функции $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемые, а вектора $\partial f_i / \partial x_j$, $\partial f_i / \partial v_j$, $i = 1, 2; j = 1, \dots, n$ не равны тождественно нулю.

Для того чтобы найти достаточные условия точного агрегирования в игре $\Gamma_2^1(T)$, рассмотрим непрерывную группу преобразований G пространства E^{k+m} в себя, каждое преобразование

$g(\cdot) \in G,\ g(\cdot) = (g_0(\cdot), g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot))$:

$x' = g_0(x,v),\ v_i' = g_i(x,v),\quad i = 1, \dots, n;\ (x,v),\ (x',v') \in E^k \times E^m$

которой обладает свойством, $f_i(g(x,v)) = f_i(x,v)$, i=1, 2, т.е. функции $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ являются инвариантами группы G.

Найдем, как и в [4, 5], подгруппу G' группы G такую, что функции $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ являются ее инвариантами, и любой другой ее инвариант выражается в виде функций от $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$.

Пусть инфинитезимальный оператор некоторой однопараметрической подгруппы группы G' имеет вид:

$$Q(\cdot) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} a_i^j(x,v)\frac{\partial}{\partial x_i^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{m_i} b_i^p(x,v)\frac{\partial}{\partial v_i^p}$$

Рассмотрим систему уравнений относительно $a_i^j(\cdot)$, $b_i^p(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k_i$, $p = 1, \dots, m_i$:

(1) $\quad Q(f_1(x,v)) = 0,\quad Q(f_2(x,v)) = 0$.

Пусть для $\forall (x,v) \in X \times V$ ранг матрицы этой системы ρ равен ее рангу на $X \times V$ (очевидно ρ=1 либо ρ=2), а коэффициенты $c_l(x_1, x_2)$, $l = 1, \dots, \rho$ ($c_l(x_1, x_2)$ равен $a_i^j(x,v)$ либо $b_i^p(x,v)$), соответствуют ρ линейно независимым столбцам этой матрицы.

Подставляя поочередно вместо остальных коэффициентов $(c_{\rho+1,s}, \dots, c_{k+m,s}) = e_s$, s=1, ..., k+m-ρ (e_s – единичный вектор с размерностью k+m-ρ, s-й компонент которого равен единице, а остальные равны нулю), решим рассматриваемую систему уравнений (1) относительно $c_l(\cdot)$, $l = 1, \dots, \rho$. Получим $a_{i,s}^j(\cdot)$, $b_{i,s}^p(\cdot)$, $j = 1, \dots, k_i$, $p = 1, \dots, m_i$, $i = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, k$+m-ρ решения рассматриваемой нами системы уравнений и систему операторов

(2) $$A_s(\cdot) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} a_{i,s}^j(x,v)\frac{\partial}{\partial x_i^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{m_i} b_{i,s}^p(x,v)\frac{\partial}{\partial v_i^p},\ s = 1, \dots, k+m-\rho,$$

которая является линейно независимой и якобиевой, т.е. $(A_i, A_j) = A_iA_j - A_jA_i = 0$, $i, j = 1, \dots, k$+m-ρ. Поэтому эта система операторов в силу обратной второй основной теоремы Ли определяет (k+m-ρ) – параметрическую группу Ли G' (см. теорему 24 [6, §8, гл.2]).

Теорема 2. При сформулированных условиях для того, чтобы в игре $\Gamma_2^1(T)$ агрегирование было точным, достаточно, чтобы для каждой окрестности $W(x,v)$ и для каждого шага q ($1\le q\le n$) существовали не все тождественно равные нулю функции $v_{s,\beta}^q(x,v)$, $s = 1, \ldots, k+m-\rho$, $\beta = 1, \ldots, B_q$, $B_q \ge m_q - r_q$, $q = 1, \ldots, n$ удовлетворяющие следующим условиям:

(3) $\sum\limits_{s=1}^{k+m-\rho} v_{s,\beta}^q(x,v)a_{i,s}^j(x,v) = 0$, $\beta = 1, \ldots, B_q, j = 1, \ldots, k_i, i = 1, \ldots, n, q = 1, \ldots, n$;

(4) $\sum\limits_{s=1}^{k+m-\rho} v_{s,\beta}^q(x,v)b_{i,s}^j(x,v) = 0$, $\beta = 1, \ldots, B_q, j = 1, \ldots, m_i, i = \{1, \ldots, n\} \setminus \{q\}$;

(5) $\dfrac{\partial}{\partial x}\sum\limits_{s=1}^{k+m-\rho} v_{s,\beta}^q(x,v)b_{i,s}^j(x,v) = 0$, $\beta = 1, \ldots, B_q, j = 1, \ldots, m_i, i = 1, \ldots, n$;

(6) $\dfrac{\partial}{\partial v_h}\sum\limits_{s=1}^{k+m-\rho} v_{s,\beta}^q(x,v)b_{i,s}^j(x,v) = 0$, $\beta = 1, \ldots, B_q, , h = \{1, \ldots, n\} \setminus \{q\}, j = 1, \ldots, m_i, i = 1, \ldots, n$;

(7) $C_{\beta,q}(t_q^\alpha(v_q)) = \sum\limits_{j=1}^{m_q}\sum\limits_{s=1}^{k+m-\rho} v_{s,\beta}^q(x,v)b_{q,s}^j(x,v)\dfrac{\partial t_q^\alpha(v_q)}{\partial v_q^j} = 0$, $\beta = 1, \ldots, B_q, \alpha = 1, \ldots, r_q, q = 1, \ldots, n$;

(8) $rank\left[\sum\limits_{s=1}^{k+m-\rho} v_{s,\beta}^q(x,v)b_{q,s}^j(x,v)\right]_{\beta=1,\ldots,B_q}^{j=1,\ldots,m_q} = m_q - r_q$, $q = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Учитывая результаты примера 2 из [7] можно утверждать, что если у группы G' существует подгруппа H_q, инфинитезимальные операторы которые имеют вид

(9) $C_{\beta,q}(\cdot) = \sum\limits_{j=1}^{m_q} c_{\beta,q}^j(x,v)\dfrac{\partial}{\partial v_q^j}$, $\beta = 1, \ldots, B_q$

и ранг матрицы $\left[c_{\beta,q}^j(x,v)\right]_{\beta=1,\ldots,B_q}^{j=1,\ldots,m_q}$ равен $m_q - r_q$, то $f_i(x, v)$, $i = 1, 2$ выражаются через инварианты $x_1^1,\ldots,x_1^{k_1},\ldots,x_n^1,\ldots,x_n^{k_n}$, $v_1^1,\ldots,v_1^{m_1}$, …, $z_q^1(v_q),\ldots,z_q^{r_q}(v_q)$, …, $v_n^1,\ldots,v_n^{m_n}$, $q = 1, \ldots, n$ этой подгруппы, т.е. существуют такие непрерывно дифференцируемые функции $f_1^*(\cdot)$, $f_2^*(\cdot)$, что $f_i(x, v) = f_i^*(x, z_1(v_1),\ldots,z_n(v_n))$, где $z_q(v_q) = (z_q^1(v_q),\ldots,z_q^{r_q}(v_q))$, $q = 1, \ldots, n$.

Так как инфинитезимальный оператор любой однопараметрической группы G' является линейной комбинацией с переменными коэффициентами операторов (2), то для того, чтобы существовал оператор вида (9), представляющий однопараметрическую подгруппу, необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $v_{s,\beta}^q(x,v)$, $s = 1, \ldots, k+m-\rho$, $\beta = 1, \ldots, B_q$, $B_q \ge m_q - r_q$, $q = 1, \ldots, n$, для которых выполнились соотношения (3)-(6).

В этом случае операторы $C_{\beta,q}(\cdot)$ будут иметь вид:

$$C_{\beta,q}(\cdot) = \sum_{j=1}^{m_q}\sum_{s=1}^{k+m-\rho} v_{s,\beta}^q(x,v)b_{q,s}^j(x,v)\frac{\partial}{\partial v_q^j} = 0,\ \beta = 1, \ldots, B_q;\ q = 1, \ldots, n.$$

Значить выполнение условий (7)-(8) являются достаточными условиями, чтобы $t_q^1(v_q),\ldots,t_q^{r_q}(v_q)$, $q = 1, \ldots, n$ были инвариантами подгруппы H_q, $q = 1, \ldots, n$, т.е. выполнились соотношения $f_i(x, v) = f_i^*(x, T_1(v_1),\ldots,T_n(v_n))$, $i = 1, 2$ для произвольных стратегий $x\in X$, $v\in V$.

Напомним, что игра $\Gamma_2^1(T)$ является агрегированным аналогом игры, рассмотренной в [4], где выбор игроком 1 i-й компоненты стратегии на i-м ходе производится при полной информации о сложившейся предыстории $(\overline{x}_{i-1}, \overline{v}_{i-1})$ к моменту принятия решения и о выборе игрока 2 v_i на i-м ходу.

Для завершения доказательство теоремы, в соответствии с [8], введем обозначения:

$L_n(x, v) = f_2(x, v)$;

$L_{i-1}(\overline{x}_{i-1}, \overline{v}_{i-1}) = \max\limits_{v_i\in V_i}\ \min\limits_{x_i\in X_i} L_i(\overline{x}_i, \overline{v}_i)$, $i = 1, \ldots, n$;

$$X_i^*(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_i) = Arg \min_{x_i \in X_i} L_i(\bar{x}_i, \bar{v}_i), \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$E_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}) = \left\{ v_i \in V_i \;\middle|\; L_{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}) = \min_{x_i \in X_i} L_i(\bar{x}_i, \bar{v}_i) \right\}, \; i = 1, \ldots, n;$$

$$D_i^1 = \left\{ (\bar{x}_i, \bar{v}_i) \in \bar{X}_i \times \bar{V}_i \;\middle|\; L_i(\bar{x}_i, \bar{v}_i) > \max_{0 \le k \le i-1} L_k(\bar{x}_k, \bar{v}_k) \right\}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Введем также обозначения:

$M_n(x, v) = f_1(x, v)$;

$$M_i(\bar{x}_i, \bar{v}_i) = \inf_{v_{i+1} \in E_{i+1}(\bar{x}_i, \bar{v}_i)} \; \sup_{x_{i+1} \in X^*_{i+1}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i+1})} M_{i+1}(\bar{x}_{i+1}, \bar{v}_{i+1}), \; i = 1, \ldots, n\text{-}1;$$

$$K_i = \sup_{(\bar{x}_i, \bar{v}_i) \in D_i^1} M_i(\bar{x}_i, \bar{v}_i), \; i = 1, \ldots, n, \quad K_0 = M_0;$$

$$I = \left\{ i = \{0, 1, \ldots, n\} \;\middle|\; \max_{0 \le p \le n} K_p = K_i \right\}; \qquad s = \max_{i \in I} i.$$

Введем достаточно малое число $\varepsilon > 0$. Если $s \ne 0$, определим точку $(\bar{x}_s^{s,\varepsilon}, \bar{v}_s^{s,\varepsilon}) \in D_s^1$ такую, что выполнилось неравенство $M_s(\bar{x}_s^{s,\varepsilon}, \bar{v}_s^{s,\varepsilon}) \ge K_s - \varepsilon$.

Определим точки $x_i^{*\varepsilon}(\bar{v}_i) \in X_i^*(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяющие условиям:

$$M_i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{*\varepsilon}(\bar{v}_i), \bar{v}_i) \ge \sup_{x_i \in X_i^*(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_i)} M_i(\bar{x}_i, \bar{v}_i) - \frac{\varepsilon}{n}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Тогда легко проверить, что выполняются следующие соотношения:

$F_i(x, y, T) = f_i^*(x, y) = f_i(x, v)$ – при фиксированном $y \in Y(T)$ и для любого $v \in V(y, T)$ или при фиксированном $v \in V$ и для $y = T(v)$;

$V^+(x, y, T) = V(y, T)$ – для произвольных $x \in X, y \in Y$;

$L_i^1(\bar{x}_i, \bar{y}_i, T) = L_i(\bar{x}_i, \bar{v}_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$;

$E_{i+1}^1(\bar{x}_i, \bar{y}_i, T) = T_{i+1}(E_{i+1}(\bar{x}_i, \bar{v}_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$;

$X_i^н(\bar{x}_{i-1}, y_i, T) = X_i^*(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_i)$, $i = 1, \ldots, n$;

$M_i^1(\bar{x}_i, \bar{y}_i, T) = M_i(\bar{x}_i, \bar{v}_i)$, $i = 1, \ldots, n\text{-}1$ – при фиксированном $\bar{y}_i \in \bar{Y}_i(\bar{T}_i)$ и для любого $\bar{v}_i \in \bar{V}_i(\bar{y}_i, \bar{T}_i)$ или при фиксированном $\bar{v}_i \in \bar{V}_i$ и для $\bar{y}_i \in \bar{T}_i(\bar{v}_i)$;

$D_i^1(T) = \tilde{T}_i(D_i^1)$, $i = 1, \ldots, n$ – где отображения $\tilde{T}_i(\cdot)$ определяются следующим образом: $\tilde{T}_i(\bar{x}_i, \bar{v}_i) = (\bar{x}_i, \bar{T}_i(\bar{v}_i))$ для любых $\bar{x}_i \in \bar{X}_i$, $\bar{v}_i \in \bar{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$;

$K_i^1(T) = K_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$;

Отсюда, учитывая результаты, полученные в теореме 1 и в работе [8], получаем, что максимальный гарантированный результат игрока 1 в игре $\Gamma_2^1(T)$ совпадает с соответствующим результатом игры с полной информацией на каждом шаге о выборе игрока 2, рассмотренный в [8], т.е. агрегирование в рассматриваем игре точное. Теорема доказана.

Литература

1. АЛИЕВ В. С., КОНОНЕНКО А. Ф. *Многошаговые игры двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о выборе партнера* // Ж. Автоматика и телемеханика, 2005, №2, с. 108-114.
2. АЛИЕВ В. С., ЦВЕТКОВ А. В. *Игра двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации* // Планирование, оценка деятельности и стимулирование в активных системах: Сб. трудов, М.: Институт проблем управления, 1985, с.35-42.
3. АЛИЕВ В. С., КОНОНЕНКО А. Ф. *Некоторые вопросы принятия решений в играх двух лиц при агрегированной информации* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1997, т.37, №10, с. 1163-1173.

4. АЛИЕВ В. С., КОНОНЕНКО А. Ф. *Об условиях точного агрегирования информации в теоретико-игровых моделях*
5. АЛИЕВ В. С., КОНОНЕНКО А. Ф. Об агрегировании в динамических играх // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1995, т.35, №8, с. 1245-1259.
6. ЧЕБОТАРЕВ Н. Г. *Теория групп Ли.* М.: – Л.:ГИТТЛ, 1960.
7. ПАВЛОВСКИЙ Ю. Н. *Агрегирование сложных моделей и построение иерархических систем управления* // Исследование операций. М.: ВЦ АН СССР, 1974, вып.4, 3-38.
8. ДАНИЛЬЧЕНКО Т. Н., МОСЕВИЧ К. К. *Многошаговые игры двух лиц с фиксированной последовательностью ходов* / Ж. вычисл. матем. и мат. физ. 1974. Т. 14. №4. С. 1047-1052.

ARTICLE TITLE: EXACT AGGREGATION INFORMATION IN MULTISTAGE GAMES OF TWO-PERSONS WITH A FIXED ORDER OF MOVES WITH AGGREGATE INFORMATION ABOUT THE PARTNER'S CHOICE

Vagif Aliev, Federal state educational establishment of the supreme vocational training «Financial academy at the Government of the Russian Federation», Moscow, The candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor (Aliev_VS@mail.ru).

Abstract: Multistage game of two persons with the fixed order of moves at the information on everyone order about usual to the moment of decision making of background of game and the aggregated information on a choice of the player 2 on it order. The player 1, having on each step i this information, the first chooses on this step strategy $x(\cdot)$, *and in the beginning of game, at once on n courses informs the strategy* $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ *to the player 2. The player 2, receiving the information on a choice of the player 1 and having the information on everyone to a course about usual to the moment of decision making of background, a choice of the strategy* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *aspires to increase of the function of a prize. In the given work, whether using results of the Lie group theory, sufficient conditions exact aggregation in considered game are found.*

Keywords: game, aggregation, optimum strategy, the maximal guaranteed result, the Lie group theory, exact aggregation.