УДК 517.977.5
ББК 3151

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Н.Е. Родницев[1], Р.А. Аюкасов[2]
(Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, Казань)

Исследуются необходимые условия оптимальности управления нелинейными системами, описываемыми стохастическими дифференциально-разностными уравнениями.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием, оптимальное управление, методы оптимизации, уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка, схема Дубовицкого-Милютина.

1. Введение.

В статье исследуются необходимые условия оптимальности управления нелинейными стохастическими системами с запаздыванием. Используя расширение фазового пространства [4], исходный процесс, описываемый системой стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием, сводится к диффузионному Марковскому процессу [4,9]. Это позволяет представить исходную стохастическую задачу с запаздыванием в виде последовательности детерминированных задач с распределенными параметрами относительно плотности распределения компонент расширенного вектора состояний, удовлетворяющих параболическому уравнению Колмогорова-Фоккера-

---

[1] *Николай Егорович Родницев, доктор технических наук, профессор (Казань, ул. Большая Красная д. 55, тел (843)231-00-86*
[2] *Рустам Анатольевич Аюкасов, соискатель* (Rustam.Aukasov@tatar.ru)

Планка (КФП) [7]. Для исследования необходимых условий оптимальности используются конструкции доказательств, изложенные в работах [6,7]

2. .Постановка задачи.

Требуется определить оптимальное управление u, доставляющее минимум терминальному функционалу

$$I_0(u)=\int_{\Omega}\Phi_0(x)p(t_k,x)dx, \qquad (1)$$

характеризующему эффективность функционирования управляемой системы, поведение которой на отрезке времени $[t_0,t_k]$ описывается нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями с запаздыванием

$$\begin{aligned} &dX_i=\varphi_i(t,X(t),X(t-\tau),u)dt+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t,X(t))d\eta_j(t) \\ &X(t)=\phi(t),\ t\in[t_0-\tau,t_0] \end{aligned} . \qquad (2)$$

Здесь t – время; t_0, t_k – начальная и конечная точка рассматриваемого интервала времени $[t_0,t_k]$; τ – постоянное запаздывание; $X(t)$ – n-мерная вектор-функция состояния фазовых координат системы, определенная на отрезке времени $[t_0\text{-}\tau,t_0]$ векторфункцией $\phi(t)$; $d\eta_j(t)$ − стохастические дифференциалы Стратоновича некоррелированных Винеровских процессов $\eta_j(t)$, с интенсивностями G_j^{η}; $u(t)$ – кусочно-непрерывная детерминированная r-мерная вектор-функция управления. $p(t_k,x)$ − плотность распределения компонент вектора состояний системы в конечный момент времени t_k. x – реализация вектора состояний. $\int_{\Omega}=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n}$ − n-кратный интеграл. $\Phi_0(x)$ заданная функция, определяющая эффективность управления системы.

Как известно [9] процесс, описываемый уравнениями (2), в общем случае не является Марковским и к нему не применим аппарат КФП-уравнений. Поэтому, для сведения процесса (2) к Марковскому, расширим фазовое пространство [4], исключив из системы (2) запаздывание. Для этого покроем отрезок времени $[t_0,t_k]$ сеткой с шагом τ и узлами $t_q=t_0+q\tau$, $q=1,\ldots,N$, где q номер интервала $[t_{q-1},t_q]$ длиной $t_q-t_{q-1}=\tau$, N − количество интервалов, $t_k=t_0+N\tau$. Точки t_q представляют собой «правильные точки» в смысле [5]. Обозначим через s текущее время на интервале $[t_{q-1},t_q]=\tau$. Введем на интервале $[t_{q-1},t_q]$ вектор состояния системы $X^q(s)=[X_1(t_{q-1}+s),\ X_2(t_{q-1}+s),\ \ldots,\ X_n(t_{q-1}+s)]$, где $s\in[0,\tau]$, верхний индекс обозначает номер интервала, а нижний − номер компоненты вектора состояний.

Аналогично обозначим управление на интервале $[t_{q-1},t_q]$ векторфункцией $u^q(s)=[u_1(t_{q-1}+s),\ u_2(t_{q-1}+s),\ \ldots,\ u_r(t_{q-1}+s)]$ и аддитивные возмущения $\eta^q(s)=[\eta_1(t_{q-1}+s),\ \eta_2(t_{q-1}+s),\ \ldots,\ \eta_n(t_{q-1}+s)]$

Введем расширенный вектор состояний $X_{1,2,\ldots,q}(s)=[X^1(s),\ X^2(s),\ \ldots,\ X^q(s)]$ с компонентами фазовых состояний системы на последовательно примыкающих интервалах $[t_{q-1},t_q]$, $q=1,\ldots,N$.

Тогда, в соответствии с принципом оптимальности Беллмана, исходная задача (1) – (2) сводится к определению по интервалам оптимального управления $u_{1,2,\ldots,q}(s)=[u^1(s),\ u^2(s),\ \ldots,\ u^q(s)]$ с компонентами управления системы на последовательно примыкающих интервалах $[t_{q-1},t_q]$, $q=1,\ldots,N$, которое доставляет минимум функционалу

$$(3)\qquad I_0(u)=\int\limits_{\Omega_N}\Phi_0(x^q)\,p(\tau,x_{1,2,\ldots,N})\,dx_{1,2,\ldots,N}\rightarrow min,$$

характеризующему эффективность управления системы, поведение которой на отрезке времени $[t_0,t_k]$ по последовательно примыкающим участкам $[t_{q-1},t_q]$, $q=1,\ldots,N$ описывается стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dX_i^m = \varphi_i\left(t_{m-1} + s, X^m, X^{m-1}, u^m\right)ds +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\left(t_{m-1} + s, X^m\right)d\eta^m, s \in [0,\tau]$$

(4)
$$X_i^1(t_0) = x_{i0}(s) = \phi_i\left(t_0 - \tau + s\right),$$
$$X_i^m(t_{m-1}) = X_i^{m-1}(t_{m-2} + \tau)$$
$$(i = 1,\dots,n),(m = 1,\dots,q),\ (q = 1,\dots,N)$$

Здесь $\varphi(t_{m-1}+s,x^m,x^{m-1},u^m)$, $\sigma_{ij}(t_{m-1}+s,x^m)$ заданные неслучайные, неупреждающие функции. Правые части (4) равномерно по управлению u^m удовлетворяют известным требованиям [2] существования (4).

Управление $u^q(s)$, определяемое на интервале $[t_{q-1},t_q]$, в соответствии с принципом оптимальности Беллмана, не ухудшает оптимальное управление на предшествующих интервалах. Поэтому при расширении вектора состояния системы по последовательно примыкающим участкам $[t_{q-1},t_q]$ в уравнениях (4) рассматривается управление $u_{1,2,\dots,q}(s)=[u^{*1}(s),\ u^{*2}(s),\ \dots,\ u^q(s)]$, где звездочкой обозначены оптимальные управления, определенные на предшествующих интервалах.

Уравнения (4) описывают на отрезке времени $[t_0,t_k]$ последовательно по примыкающим участкам $[t_{q-1},t_q]$ диффузионный Марковский процесс. Плотность вероятности $p(s,x_{1,2,\dots,q})$ состояний процесса $X_{1,2,\dots,q}(s)=[X^1(s), X^2(s), \dots, X^q(s)]$ по последовательно примыкающим участкам $[t_{q-1},t_q]$ удовлетворяет уравнению КФП (6), а в узлах t_q условиям сопряжения (7).

Таким образом, при расширении вектора состояний системы стохастическая задача (3), (4) сводится к эквивалентной детерминированной задаче с распределенными параметрами (5) − (7) относительно плотности вероятности $p(s,x_{1,2,\dots,q})$ вектора состояний системы:

(5) $$I_0(u) = \int_{\Omega_N} \Phi_0(x^q)\, p(\tau, x_{1,2,\dots,N})\, dx_{1,2,\dots,N} \to min,$$

$$\frac{\partial p\left(s,x_{1,2,\ldots q}\right)}{\partial s}-L\left(s,x_{1,2,\ldots q},u^{q}\right)p\left(s,x_{1,2,\ldots q}\right)=0,$$

(6) $$p(s,x_{1,2,\ldots q})=p(s,x^{1})p(s,x^{2}\mid\tau,x^{1})\times \\ \times p(s,x^{3}\mid\tau,x^{2})\cdots p(s,x^{q}\mid\tau,x^{q-1}),$$

$$q=1,\ldots,N,\ s\in[0,\tau]$$

(7) $$p(0,x^{1})=\delta(x_{1}-\phi),\ p\left(0,x^{q}\right)=p\left(\tau,x^{q-1}\right),(\ q=2,\ldots,N\ ).$$

Здесь $\Omega_{N}=\bigcup_{m=1}^{N}\Omega_{m}$, $\int\limits_{\Omega_{n}}=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}}_{n}$,

$$L\left(s,x_{1,2,\ldots,},u^{q}\right)p(s,x_{1,2,\ldots q})=$$

$$=-\sum_{m=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{i}^{m}}\left[A_{i}^{m}\left(s,x^{m},x^{m-1},u^{m}\right)p(s,x_{1,2,\ldots q})\right]+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2}}{\left(\partial x_{i}^{m}\right)^{2}}\left[B_{ii}^{m}\left(s,x^{m}\right)p(s,x_{1,2,\ldots q})\right],$$

где $A_i^m(s,x^m,x^{m-1},u^m)$ коэффициенты сноса процесса (4)

$$A_{i}^{m}\left(s,x^{m},x^{m-1},u^{m}\right)=\varphi_{i}\left(t_{m-1}+s,x^{m},x^{m-1},u^{m}\right)+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\sigma_{ij}\left(t_{m-1}+s,x^{m}\right)}{\partial x_{i}^{m}}\sigma_{ij}\left(t_{m-1}+s,x^{m}\right)G_{j}^{\eta},$$

а $B^m_{ii}(s,x^m)$ коэффициенты диффузии

$$B_{ii}^{m}\left(s,x^{m}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma_{ij}\left(t_{m-1}+s,x^{m}\right)\right)^{2}G_{j}^{\eta}.$$

3. Необходимые условия оптимальности.

Для исследования необходимых условий оптимальности задачи (5) − (7) используется конструкция доказательств [6,7]. Необходимые условия оптимальности управляемой стохастической системы в форме принципа минимума, устанавливаются теоремой 1.

Теорема 1 (слабый принцип минимума). Пусть (p^*,u^{*q}) − оптимальное решение задачи (5) − (7). Тогда существует не равная тождественно нулю функция $\lambda(s,x_{1,2,\ldots,q})\in C^{1,2}$ такая, что

а) $\lambda(s,x_{1,2,\ldots,q})$ удовлетворяет решению задачи Коши

(8) $$\frac{\partial\lambda(s,x_{1,2,\ldots q})}{\partial s}+L^*\left(s,x_{1,2,\ldots q},u^{*q}\right)\lambda(s,x_{1,2,\ldots q})=0,\ s\in[\tau,0],$$
$$\lambda\left(\tau,x_{1,2,\ldots q}\right)=\Phi_0\left(x^q\right)$$

б) для почти всех $s\in[0,\tau]$ и всех $u^q(s)\in L_2[0,\tau]$

(9) $$M\left(\frac{\partial R_q}{\partial u^{(q)}}\right)\left(u^{(q)}-u^{*q}\right)\geq 0\,.$$

В выражении (8)

$$L^*\left(s,x_{1,2,\ldots q},u^q\right)\lambda(s,x_{1,2,\ldots q})=$$
$$=\sum_{m=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda(s,x_{1,2,\ldots q})}{\partial x_i^m}A_i^m(s,x^m,x^{m-1},u^m)+ \qquad ,$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda(s,x_{1,2,\ldots q})}{\left(\partial x_i^m\right)^2}B_{ii}^m(s,x^m)$$

в (9) $R_q=L^*(s,x_{1,2,\ldots,q},u^q)\lambda(s,x_{1,2,\ldots,q})$.

Следствие. Оптимальное управление удовлетворяет соотношению

$$M\left(\frac{\partial R_q}{\partial u^q}\right)=0\,.$$

Для установления необходимых условий оптимальности сильного экстремума, используется преобразование времени [1] $s\to\mu$, которое переводит $[t_{q-1},t_q]$ в отрезок единичной длины $[0,1]$:

(10) $$s(\mu)=\int_0^{\mu}w(\mu)d\mu,\ \mu\in[0,1],\ \mu(1)=\tau,\ w(\mu)\geq 0.$$

Тогда задача (5) − (7) приводится к эквивалентной задаче (11) − (15)

(11) $$I_0(u)=\int\limits_{\Omega_N}\Phi_0(x^q)p(\mu(1),x_{1,2,\ldots,N})dx_{1,2,\ldots,N}\to min,$$

(12) $$\frac{\partial p(\mu,x_{1,2,\ldots q})}{\partial\mu}-w(\mu)L(\mu,x_{1,2,\ldots q},u^q)p(\mu,x_{1,2,\ldots q})=0,$$,

$q=1,\ldots,N,\ \mu\in[0,1]$

(13) $$p(\mu,x_q)=p(\mu,x^1)p(\mu,x^2\mid\mu(1),x^1)\times$$
$$\times p(\mu,x^3\mid\mu(1),x^2)\cdots p(\mu,x^q\mid\mu(1),x^{q-1}),$$

(14) $$p(0,x^1)=\delta(x_1-x_0),\ p(0,x^q)=p(\mu(1),x^{q-1}),$$
$$q=2,\ldots,N$$;

(15) $$w(\mu)\geq 0.$$

Здесь

$$u^q(\mu)=\begin{cases}u^q(s(\mu)) & \text{при } \mu\in R_1=\{\mu\in[0,1]:w(\mu)>0\},\\ \text{произвольно} & \text{при } \mu\in R_1=\{\mu\in[0,1]:w(\mu)=0\}.\end{cases}$$

Совершенно очевидно, что решение (p^*,u^{*q},w^*) задачи (11) − (15) является также решением задачи, которая отличается от (11) − (15) тем, что управление u^{*q} фиксируется и решение (11) − (15) ищется по $w(\mu)$.

Поскольку ограничение (15) имеет вид $w(\mu)\in M\subset E_1$, M – выпуклое в E_1 множество с внутренней точкой (положительная полуось), то, применяя к задаче (11) − (15) при фиксированном управлении u^{*q} локальный принцип минимума (теорема 1), относительно управления $w(\mu)$ получим, что для $w^*(\mu)$ согласно (9) выполняется условие

(16) $$M\left(\frac{\partial\overline{R}_q}{\partial w}\right)(w-w^*)\geq 0,$$

где $\overline{R}_q = w(\mu)L^*\left(\mu, x_{1,2,\dots q}, u^{*q}\right)\lambda(\mu, x_{1,2,\dots q})$. Принимая во внимание определение $\overline{R}_q$ из (16) получим

(17) $M[R_q(\mu, x_{1,2,\dots q}, u^{*q}, \lambda)](w - w^0) \geq 0$

для почти всех $\mu \in [0,1]$ и $w(\mu) \geq 0$. Отсюда следует:

а) $M[R_q(\mu, x_{1,2,\dots,q}, u^{*q}, \lambda)]=0$ для почти всех $\mu \in \mathrm{R}_1=\{\mu: w^*(\mu)>0\}$,

б) $M[R_q(\mu, x_{1,2,\dots,q}, u^{*q}, \lambda)] \geq 0$ для почти всех $\mu \in \mathrm{R}_1=\{\mu: w^*(\mu)=0\}$.

Проводя аналогично [1] построение $w^*(\mu)$, $u^*(\mu)$, где $w^*(\mu)$ задается в виде

$$w^*(\mu) = \begin{cases} \tau - 0, & \mu \in R_1, \\ 0 \quad , & \mu \in R_2 = [0,1] \setminus R_1, \end{cases}$$

после перехода $\mu \to s$: $\mu(s) = inf\{\mu: s(\mu) = s\}$ получим:

а) $M[R_q(\mu, x_{1,2,\dots,q}, u^{*q}, \lambda)]=0$ для почти всех $s \in [0, \tau]$,

б) $M[R_q(\mu, x_{1,2,\dots,q}, u^{q}, \lambda)] \geq 0$ для почти всех $s \in [0, \tau]$.

Таким образом, используя редукцию задачи (11) − (15) и применяя к ней теорему 1, получим необходимые условия оптимальности сильного экстремума, сформулированного в форме принципа минимума теоремой 2 .

Теорема 2 (сильный локальный минимум). Пусть (p^*, u^{*q}) − оптимальное решение задачи (5) − (7). Тогда существует не равная тождественно нулю функция $\lambda(s, x_{1,2,\dots,q})$ такая, что

а) $\lambda(s, x_{1,2,\dots,q})$ удовлетворяет решению краевой задачи (8),

б) при почти всех $s \in [0, \tau]$ оптимальному управлению u^{*q} соответствует минимум $M[R_q(\mu, x_{1,2,\dots,q}, u^q, \lambda)]$ по переменной u^q.

4. *Необходимые условия оптимальности управления с обратной связью.*

Из теоремы 2 при фиксировании реализации вектора состояний $X^q(s)$, как предельные вытекают условия оптимальности управления с обратной связью.

Оптимальное управление $u^{*q}=u^{*q}(s, x^q)$ определяется как локальное управление, связанное в каждый момент времени s и соответствующим ему состоянием $x^q = X^q(s)$ с программным управлением $u^{*q}(t)=u^{*q}(s,x^q,t)$, $t\in[s,\tau]$ относительно фиксированной начальной точки (s,x^q) соотношением:

$$u^{*q}(t)=u^{*q}\left(s,x^q,t\right)\Big|_{t=s}=u^{*q}\left(s,x^q\right).$$

Относительно точки (s,x^q) решение уравнения КФП (6) определяется плотностью вероятности перехода $p(t,y^q|s,x^q)$, где $y^q=X^q(t)$ состояние системы в момент времени $t\in[s,\tau]$ на отрезке времени $[t_{q-1},t_q]$.

В качестве оценки эффективности управления рассматривается критерий

$$(18)\quad I_0^q\left(s,x^q\right)=min M_{s,x^q}\left(\Phi_0\left[X^q(\tau)\right]\right),(q=1,\dots,N).$$

представляющий собой функцию точки $x^q = X^q(s)$ фазового пространства системы в момент времени s, который характеризует эффективность управления $u^q(t)$ на отрезке времени $[s,\tau]$ при условии, что в момент времени s изображающая точка в фазовом пространстве находилась в состоянии $X^q(s)=x^q$. Функционал (18) относительно точки (s,x^q) и плотности вероятности перехода $p(t,y^q|s,x^q)$, рассматривается при этом как условное математическое ожидание в момент времени τ при условии, что в момент времени s система находилась в состоянии $X^q(s)=x^q$.

Необходимые условия оптимальности управления $u^q=u^q(s,x^q)$ устанавливает теорема 3.

Теорема 3. Пусть $u^{*q}=u^{*q}(s,x^q)$ − оптимальное управление, доставляющее при каждом (s,x^q) минимум критерию (18). Тогда существуют, не равная тождественно нулю функция $\lambda(s,x_{1,2,\dots,q})\in C^{1,2}$, что

а) функция $\lambda(s,x_{1,2,\dots,q})$ удовлетворяет уравнению Беллмана

$$(19)\quad \frac{\partial\lambda(s,x_{1,2,\dots q})}{\partial s}+\min_{u^q\in U}L^*\left(s,u^q,x_{1,2,\dots q}\right)\lambda(s,x_{1,2,\dots q})=0,\ s\in[0,\tau],\quad \lambda\left(\tau,x_{1,2,\dots q}\right)=\Phi_0(x^q)$$

б) оптимальное управление $u^{*q}=u^{*q}(s,x^q)$ при всех $s\in[0,\tau]$ удовлетворяет условию

$$(20)\quad L^*\left(s,u^{*q},x_{1,2,\dots q}\right)\lambda\left(s,x_{1,2,\dots q}\right)=\min_{u^q}L^*\left(s,u^q,x_{1,2,\dots q}\right)\lambda\left(s,x_{1,2,\dots q}\right)$$

Доказательство приводится аналогично конструкциям доказательств в [6,7].

5. Пример.

В качестве примера рассмотрим задачу синтеза оптимального управления, которая формулируется следующим образом.

Требуется определить управление u=u(t,x) при ограничении |u|≤1, которое минимизирует разброс состояния системы X(t) относительно математического ожидания $m_x(t)$=0 при t=3:

(21) $M\left(\left(m_x(3)-X(3)\right)^2\right)\to min.$

Функционирование системы описывается уравнением

(22) $\dot{X}(t)=-3.2X(t)+3.2X(t-1)+3.2u+\eta(t)$

с постоянным запаздыванием τ=1 и аддитивным возмущением белого шума $\eta(t)$ на отрезке [0,3] с начальным состоянием $x(t)$=0 на отрезке [-1,0].

Для исключения запаздывания введем следующие обозначения:

$s\in[0;1]$

(23) $$\begin{array}{l} X^1(s)=X(s);\, X^1(s)=X(1+s);\, X^3(s)=X(2+s) \\ u^1(s)=u(s);\, u^2(s)=u(1+s);\, u^3(s)=u(2+s) \\ \eta^1(s)=\eta(s);\, \eta^2(s)=\eta(1+s);\, \eta^3(s)=\eta(2+s) \end{array}.$$

Тогда с учетом (23) задача (21) − (22) сводится к следующей последовательности задач:

(24) $$\begin{array}{l} M\left(\left(m_x(1)-X^1(1)\right)^2\right)\to min \\ \dot{X}^1(s)=-3.2X^1(s)+3.2u^1(s)+\eta^1(s) \end{array};$$

(25) $$\begin{array}{l} M\left(\left(m_x(2)-X^2(2)\right)^2\right)\to min \\ \begin{cases} \dot{X}^1(s)=-3.2X^1(s)+3.2u^{*1}(s)+\eta^1(s) \\ \dot{X}^2(s)=-3.2X^2(s)+3.2X^1(s)+3.2u^2(s)+\eta^2(s) \end{cases} \end{array};$$

$$M\left(\left(m_x(3)-X^3(3)\right)^2\right)\to min$$

(26) $$\begin{cases}\dot X^1(s)=-3.2X^1(s)+3.2u^{*1}(s)+\eta^1(s) \\ \dot X^2(s)=-3.2X^2(s)+3.2X^1(s)+3.2u^{*2}(s)+\eta^2(s) \\ \dot X^3(s)=-3.2X^3(s)+3.2X^2(s)+3.2u^3(s)+\eta^3(s)\end{cases},$$

где u^{*1} и u^{*2} оптимальные управления на отрезках времени [0,1] и [1,2], определенные из решений задач (24) и (25).

В соответствии с теоремой 3 оптимальное управление u^{*1} задачи (24) определяется из условия (20) минимума функции

$$R_1\left(s,x^1,u^1,\lambda_1\right)=-3.2x^1\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}+3.2u^1\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_1}{\left(\partial x^1\right)^2}.$$

Отсюда следует, что

(27) $$u^{*1}(s)=-sign\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}$$

где $\lambda_1(s,x^1)$ определяется на отрезке времени [0,1] решением

(28) $$\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial s}=3.2x^1\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x^{(1)}}+3.2\left|\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}\right|-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\left(\partial x^1\right)^2} \\ \lambda_1\left(1,x^1\right)=\left(m_x(1)-x^1(1)\right)^2\end{cases}$$

Введение обратного времени τ=1-s, позволяет свести (28) к виду (29):

(29) $$\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial \tau}=-3.2x^1\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}-3.2\left|\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}\right|+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\left(\partial x^1\right)^2} \\ \lambda_1\left(0,x^1\right)=\left(m_x(1)-x^1(1)\right)^2\end{cases}$$

Решение $\lambda_1(\tau,x^1)$ в (29), будем искать в виде линейно-квадратичной формы с неопределенными коэффициентами

(30) $$\lambda_1(\tau;x^1)=k_0(\tau)+k_1(\tau)x^1+k_{11}(\tau)\left(x^1\right)^2,$$

при начальных условиях, которые в общем случае, согласно работе [3], определяются по формуле:

(31) $$k_{1,2,..,m}(0)=\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^m\lambda_1}{\partial x^1\partial x^2...\partial x^m}\right)_{x^1=x^2=\ldots=x^m=0}.$$

Подставляя значения производных $\lambda_1(\tau,x^1)$, в уравнение (29) и приравнивая коэффициенты при x^1, получим следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $k(s)$ на отрезке [0,1], которые связаны с производными функции в начале координат [3] начальными условиями (31):

$$(32)\ \begin{cases} \dot{k}_0 = -3.2k_1 + k_{11} \\ \dot{k}_1 = -3.2k_1 - 6.4k_{11} \\ \dot{k}_{11} = -6.4k_{11} \end{cases};$$

$$(33)\ \begin{cases} \dot{k}_0 = 3.2k_1 + k_{11} \\ \dot{k}_1 = -3.2k_1 + 6.4k_{11} \\ \dot{k}_{11} == -6.4k_{11} \end{cases};$$

при начальных условиях: $k_0(0) = k_1(0) = 0$, $k_{11}(0) = 2$.

Решив (32) и (33), получим:

$$k_1(\tau) = \begin{cases} 4e^{-6.4\tau} - 4e^{-3.2\tau} \ \textit{при} \ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x^1} \geq 0 \\ 4e^{-3.2\tau} - 4e^{-6.4\tau} \ \textit{при} \ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x^1} < 0 \end{cases}$$

$$k_{11}(\tau) = 2e^{-6.4\tau}$$

Принимая во внимание, что $\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x^1} = k_1(\tau) + 2k_{11}(\tau)x^1$, определим оптимальное управление на отрезке [0,1]:

$$(34)\ u^{*1} = \begin{cases} 1, \ \textit{при} \ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x^1} = 4(e^{-3.2\tau} - e^{-6.4\tau} + x^1 e^{-6.4\tau}) < 0 \\ -1, \ \textit{при} \ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x^1} = 4(e^{-6.4\tau} - e^{-3.2\tau} + x^1 e^{-6.4\tau}) \geq 0 \end{cases}$$

Для определения оптимального управления $u^{*2}=u^{*2}(s,x^2)$ подставим полученные значения для u^{*1} (34) в (25).

Тогда для $\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x^1} = 4(e^{-6.4\tau} - e^{-3.2\tau} + x^1 e^{-6.4\tau}) \geq 0$

$$M\left(\left(x^2(1)\right)^2\right) \to min$$

$$\begin{cases} \dot{x}^1(s) = -3.2x^1(s) - 3.2 + \eta^1 \\ \dot{x}^2(s) = -3.2x^2(s) + 3.2x^1(s) + 3.2u^2(s) + \eta^2 \end{cases}.$$

Для $\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x^1} = 4(e^{-3.2\tau} - e^{-6.4\tau} + x^1 e^{-6.4\tau}) < 0$

$$M\left(\left(x^2(1)\right)^2\right) \to min$$

$$\begin{cases} \dot{x}^1(s) = -3.2x^1(s) + 3.2 + \eta^1 \\ \dot{x}^2(s) = -3.2x^2(s) + 3.2x^1(s) + 3.2u^2(s) + \eta^2 \end{cases}.$$

Оптимальное управление будем определять из условия (20) минимума функции R_2, которая с учетом (34) имеет вид:

$$R_2\left(s, x^1, x^2, u^2, \lambda_2\right) = -3.2x^1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^1} - 3.2\frac{\partial \lambda_2}{\partial x^1} - 3.2x^2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^2} +$$

$$+3.2x^1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^2} + 3.2u^2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_2}{\left(\partial x^1\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_2}{\left(\partial x^2\right)^2}$$

для $\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x^1} = 4(e^{-6.4\tau} - e^{-3.2\tau} + x^1 e^{-6.4\tau}) \geq 0$

(35) и .

$$R_2\left(s, x^1, x^2, u^2, \lambda_2\right) = -3.2x^1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^1} + 3.2\frac{\partial \lambda_2}{\partial x^1} - 3.2x^2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^2} +$$

$$+3.2x^1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^2} + 3.2u^2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_2}{\left(\partial x^1\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_2}{\left(\partial x^2\right)^2}$$

для $\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x^1} = 4(e^{-3.2\tau} - e^{-6.4\tau} + x^1 e^{-6.4\tau}) < 0$

Из (35) следует, что

$$u^{*2}(s) = -sign\frac{\partial \lambda_2}{\partial x^2},$$

где $\lambda_2(s,x^1,x^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\lambda_2\left(s,x^1,x^2\right)}{\partial s}=3.2x^1\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^1}+3.2\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^1}+3.2x^2\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}-$$

$$-3.2x^1\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}+3.2\left|\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}\right|-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\left(\partial x^1\right)^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\left(\partial x^2\right)^2},\tag{36}$$

$$\lambda_2\left(1,x^1,x^2\right)=\left(m_x(2)-x^2(1)\right)^2$$

$$\text{для}\quad\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}=4(e^{-6.4\tau}-e^{-3.2\tau}+x^1e^{-6.4\tau})\geq 0$$

и

$$\frac{\partial\lambda_2\left(s,x^1,x^2\right)}{\partial s}=3.2x^1\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^1}-3.2\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^1}+3.2x^2\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}-$$

$$-3.2x^1\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}+3.2\left|\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}\right|-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\left(\partial x^1\right)^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\left(\partial x^2\right)^2}.\tag{37}$$

$$\lambda_2\left(1,x^1,x^2\right)=\left(m_x(2)-x^2(1)\right)^2$$

$$\text{для}\quad\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}=4(e^{-3.2\tau}-e^{-6.4\tau}+x^1e^{-6.4\tau})<0$$

Введение замены переменных τ=1-s позволяет привести (36) и (37) к виду:

$$\frac{\partial\lambda_2\left(\tau,x^1,x^2\right)}{\partial \tau}=-3.2x^1\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^1}-3.2\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^1}-3.2x^2\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}+$$

$$+3.2x^1\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}-3.2\left|\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}\right|+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\left(\partial x^1\right)^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\left(\partial x^2\right)^2},\tag{38}$$

$$\lambda_2\left(0,x^1,x^2\right)=\left(m_x(2)-x^2(1)\right)^2$$

$$\text{для}\quad\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}=4(e^{-6.4\tau}-e^{-3.2\tau}+x^1e^{-6.4\tau})\geq 0$$

и

$$\frac{\partial\lambda_2\left(\tau,x^1,x^2\right)}{\partial\tau}=-3.2x^1\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^1}+3.2\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^1}=3.2x^2\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}+$$

$$+3.2x^1\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}=3.2\left|\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}\right|+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\left(\partial x^1\right)^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\left(\partial x^2\right)^2} \quad . \tag{39}$$

$$\lambda_2\left(0,x^1,x^2\right)=\left(m_x(2)-x^2(1)\right)^2$$

$$\text{для } \frac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}=4(e^{-3.2\tau}-e^{-6.4\tau}+x^1e^{-6.4\tau})<0$$

Решение (38) и (39) также определяется в линейно-квадратичной форме с неопределенными коэффициентами:

$$\lambda_2\left(\tau,x^1,x^2\right)=k_0(\tau)+k_1(\tau)x^1+k_{11}(\tau)\left(x^1\right)^2+ \\ +k_{12}(\tau)x^1x^2+k_2(\tau)x^2+k_{22}(\tau)\left(x^2\right)^2 . \tag{40}$$

Подставляя значения производных $\lambda_2(\tau,x^1,x^2)$, в уравнения (38)-(39) и приравнивая коэффициенты при x^1 и x^2, получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов в (40) на отрезке [1,2]. Решая эти уравнения, получим

$$\frac{\partial\lambda_2\left(\tau,x^1,x^2\right)}{\partial x^2}=k_{12}(\tau)x^1+k_2(\tau)+2k_{22}(\tau)x^2 .$$

и управление:

$$u^{*2}(s)=\begin{cases}1,\ \textit{при}\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}=12.8x^1\tau e^{-6.4\tau}+12.8\tau e^{-6.4\tau}+4x^2e^{-6.4\tau}<0\\ -1,\ \textit{при}\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}=12.8x^1\tau e^{-6.4\tau}+8e^{-6.4\tau}-\\ \qquad -8e^{-3.2\tau}+12.8\tau e^{-6.4\tau}+4x^2e^{-6.4\tau}\geq 0\end{cases}$$

$$\text{при условии, что } \frac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}=4(e^{-6.4\tau}-e^{-3.2\tau}+x^1e^{-6.4\tau})\geq 0$$

$$u^{*2}(s)=\begin{cases}1,\ при\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}=12.8x^1\tau e^{-6.4\tau}+8e^{-3.2\tau}-12.8\tau e^{-6.4\tau}-\\ \qquad\qquad -8e^{-6.4\tau}+4x^2e^{-6.4\tau}<0\\ -1,\ при\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}=12.8x^1\tau e^{-6.4\tau}-12.8\tau e^{-6.4\tau}+4x^2e^{-6.4\tau}\geq 0\end{cases}.$$

при условии, что $\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}=4(e^{-3.2\tau}-e^{-6.4\tau}+x^1e^{-6.4\tau})<0$

Поиск оптимального управления u^{*3} задачи (26) осуществляется аналогично, поиску оптимального управления задач (24) и (25). Решая (26) с учетом значений u^{*1} и u^{*2} определенных на отрезках [0,1] и [1,2], получим:

$$u^{*3}(s)=\begin{cases}1,\ при\ \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x^3}=4e^{-3.2\tau}+10.24\tau^2e^{-6.4\tau}-4e^{-6.4\tau}\\ \qquad +10.24x^1\tau^2e^{-6.4\tau}+6.4x^2\tau e^{-6.4\tau}+4x^3e^{-6.4\tau}<0\\ -1,\ при\ \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x^3}=-4e^{-3.2\tau}+10.24\tau^2e^{-6.4\tau}+4e^{-6.4\tau}+\\ \qquad +10.24x^1\tau^2e^{-6.4\tau}+6.4x^2\tau e^{-6.4\tau}+4x^3e^{-6.4\tau}\geq 0\end{cases}$$

при условии, что

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}=4(e^{-6.4\tau}-e^{-3.2\tau}+x^1e^{-6.4\tau})\geq 0\ \ и$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}=12.8x^1\tau e^{-6.4\tau}+12.8\tau e^{-6.4\tau}-8e^{-6.4\tau}+4x^2e^{-6.4\tau}<0$$

$$u^{*3}(s)=\begin{cases} 1,\ при\ \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x^3}=10.24\tau^2e^{-6.4\tau}+12.8\tau e^{-6.4\tau}+ \\ \qquad +10.24x^1\tau^2e^{-6.4\tau}+6.4x^2\tau e^{-6.4\tau}+4x^3e^{-6.4\tau}<0 \\ -1,\ при\ \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x^3}=-8e^{-3.2\tau}+10.24\tau^2e^{-6.4\tau}+12.8\tau e^{-6.4\tau}+8e^{-6.4\tau}+ \\ \qquad +10.24x^1\tau^2e^{-6.4\tau}+6.4x^2\tau e^{-6.4\tau}+4x^3e^{-6.4\tau}\geq 0 \end{cases}$$

при условии, что

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}=4(e^{-6.4\tau}-e^{-3.2\tau}+x^1e^{-6.4\tau})\geq 0 \text{ и}$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}=12.8x^1\tau e^{-6.4\tau}+8e^{-6.4\tau}-8e^{-3.2\tau}+12.8\tau e^{-6.4\tau}+4x^2e^{-6.4\tau}\geq 0$$

$$u^{*3}(s)=\begin{cases} 1,\ при\ \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x^3}=8e^{-3.2\tau}-10.24\tau^2e^{-6.4\tau}-12.8\tau e^{-6.4\tau}-8e^{-6.4\tau}+ \\ \qquad +10.24x^1\tau^2e^{-6.4\tau}+6.4x^2\tau e^{-6.4\tau}+4x^3e^{-6.4\tau}<0 \\ -1,\ при\ \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x^3}=-10.24\tau^2e^{-6.4\tau}-12.8\tau e^{-6.4\tau}+ \\ \qquad +10.24x^1\tau^2e^{-6.4\tau}+6.4x^2\tau e^{-6.4\tau}+4x^3e^{-6.4\tau}\geq 0 \end{cases}$$

при условии, что

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}=4(e^{-3.2\tau}-e^{-6.4\tau}+x^1e^{-6.4\tau})<0 \text{ и}$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}=12.8x^1\tau e^{-6.4\tau}+8e^{-3.2\tau}-12.8\tau e^{-6.4\tau}-8e^{-6.4\tau}+4x^2e^{-6.4\tau}<0$$

$$u^{*3}(s)=\begin{cases} 1,\ при\ \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x^3}=4e^{-3.2\tau}-10.24\tau^2e^{-6.4\tau}-4e^{-6.4\tau}+ \\ \qquad +10.24x^1\tau^2e^{-6.4\tau}+6.4x^2\tau e^{-6.4\tau}+4x^3e^{-6.4\tau}<0 \\ -1,\ при\ \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x^3}=-4e^{-3.2\tau}-10.24\tau^2e^{-6.4\tau}+4e^{-6.4\tau}+ \\ \qquad +10.24x^1\tau^2e^{-6.4\tau}+6.4x^2\tau e^{-6.4\tau}+4x^3e^{-6.4\tau}\geq 0 \end{cases}$$

при условии, что

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^1}=4(e^{-3.2\tau}-e^{-6.4\tau}+x^1e^{-6.4\tau})<0 \text{ и}$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial x^2}=12.8x^1\tau e^{-6.4\tau}-12.8\tau e^{-6.4\tau}+4x^2e^{-6.4\tau}\geq 0$$

6. Заключение.

Расширение фазового пространства позволяет применить к поиску оптимального управления стохастических систем с запаздыванием теорию Марковских процессов.

Сформулированный принцип минимума позволяет применять единую методологию исследования стохастических дифференциально-разностных систем с постоянным запаздыванием, а также устанавливает взаимосвязь с принципом оптимальности Беллмана. Эта связь обусловлена тем, что сопряженное (обратное) уравнение КФП позволяет дать единообразное и компактное представление уравнения Беллмана для различных типов Марковских процессов, а различные способы определения решения $\lambda(s, x_{1,2,\dots,q})$ сопряженного уравнения КФП определяют соответственно разные способы построения управления и алгоритмы решения рассматриваемых задач

Следует отметить, что использование сформулированных условий оптимальности требует нахождения решений уравнения Беллмана и КФП. Решение этих уравнений в явном виде, как известно [3], можно получить только для линейных систем и для некоторых типов нелинейных систем не выше второго порядка. Для нелинейных систем более высокого порядка условия оптимальности позволяют строить численные методы поиска оптимального управления со сходимостью алгоритмов к условиям оптимальности сформулированных теорем.

В тех случаях, когда решение уравнения КФП невозможно, целесообразно использовать приближенные методы [8], базирующиеся на разложении плотности вероятности в функциональный ряд по семиинвариантам случайного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. ГИРСАНОВ И.В. *Лекции по математической теории экстремальных задач.* – М.: Изд-во МГУ, 1970 – 118 с.
2. ГИХМАН И.И., СКОРОХОД А.В. *Управляемые случайные процессы.* – М.: Наука, 1997 – 252 с.
3. КРАСОВСКИЙ А.А. *Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем.* – М.: Наука, 1974 – 232 с.
4. ПОЛОСКОВ И.Е. *Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом* // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 9. – С. 58-73.
5. ПОНТРЯГИН Л.С., БОЛТЯНСКИЙ В.Г., ГАМКРЕЛИДЗЕ Р.В., МИЩЕНКО Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* – М.: Наука, 1969 – 384 с.
6. РОДНИЩЕВ Н.Е. *Необходимые условия оптимальности управления разрывных нелинейных стохастических систем с ограничениями* // Известия АН «Теория и системы управления». – 2001. – №6. – С. 38-50
7. РОДНИЩЕВ Н.Е. *Оптимизация управления нелинейных стохастических систем с ограничениями.* // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 2. – С. 87-100.
8. РОДНИЩЕВ Н.Е. *Приближенный метод поиска оптимального управления нелинейных стохастических систем с ог-*

раничениями. //Автоматика и телемеханика. – 2001. – №3. – С. 63-71.
9. ЦАРЬКОВ Е.Ф. *Системы стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием* // Известя АН Латвийской ССР. – 1968. – №1. – С. 57-64

ARTICLE TITLE (OPTIMAL CONTROL CONDITIONS OF NON-LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS WITH DELAY)

Nikolay Rodnishev, Kazan State Technical University, Kazan, Doctor of Science, professor (Kazan, B. Krasnaya st. 55 (843)231-00-86).
Rustam Aukasov, Kazan State Technical University, Kazan, graduate student (Rustam.Aukasov@tatar.ru)

Abstract: The optimal control conditions of non-linear stochastic systems with delay are being investigated.

Keywords: stochastic differential equations with delay, optimal control, Kolmogorov-Fokker-Plan equation, Dubovitzky-Milutin scheme.