

МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ СОКРАЩЕНИЯ СРОКОВ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТОВ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЯХ ЗАТРАТ

В.Н. Бурков¹, А.В. Цветков²

*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)*

А.П. Сычев³

(ЦНИИ Транспортного строительства)

Даны постановки задач стимулирования сокращения сроков реализации проектов. Решена задача разработки унифицированной линейной системы стимулирования сокращения сроков реализации проекта. Для решения задачи введены понятия пропускной способности пути и мощности разреза и доказана теорема двойственности о равенстве максимальной пропускной способности путей и минимальной мощности разрезов.

Ключевые слова: механизмы стимулирования, реализация проектов, функции затрат.

1. Введение

Система стимулирования определяет зависимость вознаграждения исполнителя (агента), получаемого им от центра, от

¹ Владимир Николаевич Бурков, доктор технических наук, профессор (vlab17@bk.ru).

² Александр Васильевич Цветков, доктор технических наук, профессор (olvinogr@ipu.ru).

³ Анатолий Петрович Сычев, Кандидат технических наук, генеральный директор ЦНИИТС (mail@tsniis.com)

выбираемых действий. Исследование моделей стимулирования в рамках теории управления началось практически одновременно и независимо что, одновременно и независимо примерно в конце 60-х годов прошлого века.

Основными научными школами по этому направлению являются теория активных систем (научный центр – Институт проблем управления РАН) [2], теория иерархических игр, (научный центр – Вычислительный центр РАН) [3] и теория контрактов, развиваемая в основном зарубежными учеными [4]. В настоящее время в рамках теории активных систем разработаны базовые механизмы стимулирования: компенсаторные (*К*-типа), скачкообразные (*С*-типа), линейные (*Л*-типа), основанные на перераспределении дохода (*Д*-типа) [5]. Различают два вида систем стимулирования – персонифицированные (индивидуальные), и унифицированные. В унифицированных системах зависимость вознаграждения от тех или иных параметров одинакова для всех агентов. На основе базовых систем стимулирования можно строить более сложные системы [5]. Особенностью систем стимулирования в управлении проектами является технологическая зависимость между работами проекта, определяемая сетевым графиком. В работе рассматривается задача построения оптимальной линейной унифицированной системы стимулирования сокращения продолжительности проекта.

2. Постановка задачи

Задан проект из n операций (работ), зависимости между которыми определяются сетевым графиком. Для каждой операции (i, j) определена зависимость

$$(1) \quad Z_{ij} = K_{ij}\tau_{ij}, \quad 0 \leq \tau_{ij} \leq D_{ij}$$

затрат Z_{ij} , требуемых на сокращение продолжительности операции на время τ_{ij} . Унифицированная линейная система стимулирования определяется функцией стимулирования

$$(2) \quad S_{ij}(\tau_{ij}) = \lambda\tau_{ij},$$

определяющей вознаграждение исполнителям операции (i, j) при сокращении ее продолжительности на время τ_{ij} .

Очевидно, что исполнители согласны на сокращение продолжительности операции на время $\tau_{ij} > 0$, если

$$(3) \quad \lambda \geq K_{ij}.$$

Суммарные выплаты вознаграждения равны

$$(4) \quad S(l, t) = \sum_{(i, j)} l t_{ij} = l \sum_{(i, j)} t_{ij}$$

Задача. Определить λ и $\{\tau_{ij}\}$, такие что продолжительность проекта уменьшилась на величину $\Delta > 0$, а суммарное вознаграждение (премия) (4) минимально.

Для решения поставленной задачи сначала рассмотрим вспомогательную задачу.

3. Задача о разрезе минимальной мощности

Рассмотрим $(n+1)$ -вершинную сеть с входом 0 и выходом n . Обозначим $K_{ij} > 0$ пропускную способность дуги $(i, j) \in U$ (U – множество дуг сети). Обозначим через μ – путь в сети, соединяющей вход 0 с выходом n .

Определение 1. Пропускной способностью пути μ называется минимальная из пропускных способностей дуг пути

$$C(\mu) = \min_{(i, j) \in \mu} K_{ij}.$$

Определение 2. Мощностью разреза $q(V)$ называется максимальная пропускная способность дуг, заходящих в разрез

$$q(V) = \max_{(i, j) \in W(V)} K_{ij},$$

где $W(V)$ – множество дуг заходящих в разрез (напомним, что разрезом называется множество вершин сети, содержащее выход и не содержащее вход [5]).

Заметим, что пропускная способность любого пути не превышает мощности любого разреза. Действительно, для любого пути μ и любого разреза V найдется дуга $(i, j) \in \mu$ и заходящая в разрез V . Имеем

$$C(m) \leq K_{ij} \leq q(V).$$

Поэтому, если найдется путь μ и разрез V , такие что $C(m) = q(V)$,

то путь μ имеет максимальную пропускную способность, а разрез V за имеет минимальную мощность.

Задача 1. Определить разрез минимальной мощности.

Теорема 1. (двойственности) Минимальная мощность разрезов равна максимальной пропускной способности путей.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы Форда-Фалкерсона, [5] доказательство проведем конструктивно. Пометим вершину 0 индексом 0, а остальные вершины индексом $\lambda_i = M$, где M – большое положительное число ($M > \max_{(ij)} K_{ij}$).

k-ый шаг. Рассматриваем все дуги сети. Для каждой вершины j проверяем условие

$$l_j \leq \max_{i \in U_j} \min(l_i, K_{ij}),$$

где U_j – множество дуг, заходящих в вершину j .

Если это условие нарушено, то заменяем индекс λ_j на меньший

$$l'_j = \max_{i \in U_j} \min(l_i, K_{ij}).$$

В противном случае оставляем индекс λ_j без изменений. За конечное число шагов индексы установятся. Действительно, последовательность индексов является невозрастающей, причем на каждой итерации уменьшение, если оно происходит, то на конечную величину.

Докажем, что установившиеся индексы λ_i равны максимальной пропускной способности путей из входа в вершину i . Это справедливо для $n=1$. Пусть это справедливо для сети из n вершин. Докажем, что тогда это справедливо и для $(n+1)$ вершин. Покажем, что

$$(5) \quad l_n = \max_{i \in U_n} \min(l_i, K_{in})$$

является максимальной пропускной способностью путей сети. Заметим, что $\min(l_i, K_{in})$ определяет максимальную пропускную способность всех путей, содержащих дугу (i, n) . Следовательно (5) определяет максимальную пропускную способность путей в сети. Теорема доказана.

Для определения разреза минимальной мощности удалим из сети все дуги, такие что $K_{ij} \leq l_n$. Пометим вершину 0 индексом (+). Пусть Q – множество помеченных вершин. Помечаем индексом (+) вершину j , если $(i, j) \in U$, и $i \in Q$, а $j \notin Q$. Покажем, что множество непомеченных вершин является разрезом V сети мощность которого равна λ_n . Во-первых, это разрез сети, поскольку выход $n \notin V$, а вход $0 \in V$. Далее для всех дуг, заходящих в разрез имеет место $K_{ij} \leq l_n$ (в противном случае вершина j была бы помечена), причем существует хотя бы одна дуга $(i, j) \in V$, такая что $K_{ij} = \lambda_n$.

Пример 1. Рассмотрим сеть рис.1

1 шаг. Индексы вершин $\lambda_1=5, \lambda_2=3, \lambda_3=1, \lambda_4=3, \lambda_5=3$

2 шаг. $\lambda_1=5, \lambda_2=3, \lambda_3=1, \lambda_4=3, \lambda_5=3$ индексы установились.

Поэтому

$$\max_m C(m) = 3$$

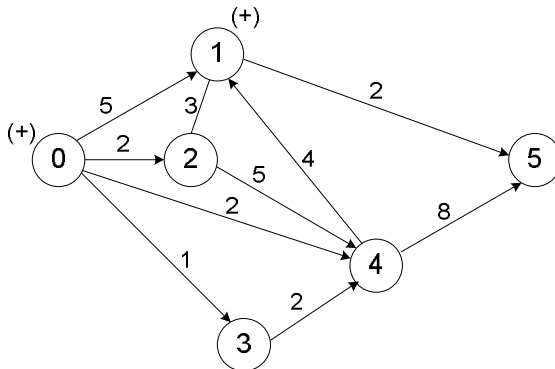


Рис.1. Сеть для примера 1.

Для определения пути с максимальной пропускной способностью удаляем из сети все дуги с $K_{ij} < l_n$. Все оставшиеся пути имеют пропускную способность, равную l_n (Рис. 2).

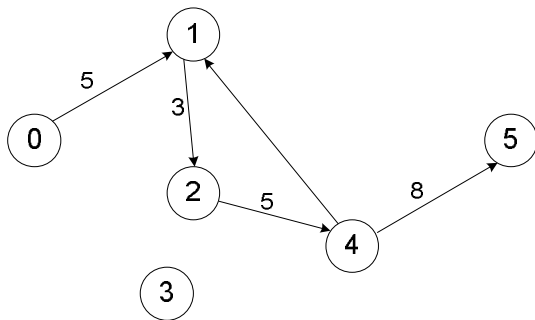


Рис. 2. Сеть без дуг с $k_{ij} < l_n$.

Для определения разреза минимальной мощности помечаем вершины 0,1. Множество вершин 2, 3, 4, 5 образует разрез сети, а множество дуг (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 5) – это множество дуг, заходящих в разрез. Мощность разреза, очевидно, равна 3. Если сеть не имеет контуров и вершины имеют правильную нумерацию, то алгоритм существенно упрощается.

1 шаг. Определяем

$$l_1 = K_{01}.$$

k -ый шаг. Определяем

$$l_k = \max_{i < k} \min(l_i; K_{ik}).$$

n -ый шаг. Определяем

$$l_n = \max_{i < n} \min(l_i, K_{in}).$$

4. Синтез оптимальной унифицированной системы

Перейдем к описанию алгоритма синтеза оптимальной унифицированной линейной системы стимулирования. Обозначим D_{ij} – нормативные продолжительности операций.

1 шаг. Полагаем продолжительности всех операций равными D_{ij} .

2 шаг. Определяем сеть критических путей.

3 шаг. Для сети критических путей решаем задачу определения разреза минимальной мощности q_1 .

Полагаем $\lambda_1 = q_1$ фиксируем продолжительности на уровне D_{ij} для всех операций, таких что $K_{ij} > q_1$, а также для тех, у которых $d_{ij} = D_{ij}$ и определяем разрез сети V_1 с минимальным числом дуг. Дело в том, что при заданном λ задача минимизации фонда стимулирования сводится к задаче минимизации суммарного сокращения продолжительностей операций. Пусть число дуг разреза равно m_1 . В этом случае сокращение продолжительности проекта на 1 требует величины фонда стимулирования $q_1 m_1$.

Увеличим q до q_2 , при котором, число критических операций таких, что $K_{ij} \leq q_2$ увеличивается и снова определяем разрез с минимальным числом заходящих дуг m_2 .

Если, $q_2 m_2 < q_1 m_1$, то очевидно, что норматив q_2 выгоднее, чем q_1 , хотя $q_2 > q_1$. Продолжаем увеличивать q до тех пор, пока на некотором шаге $S \quad q_S = \max_{(i,j) \in M} K_{ij}$, где M – множество критических операций. Определяем τ , такое что $q_\tau m_\tau = \min_j q_j m_j$.

Сокращаем продолжительности дуг, заходящих в разрез V_τ до тех пор, пока в сети не появится новый критический путь либо пока продолжительность, хотя бы одной дуги, заходящей в разрез не будет равна минимальной. Далее возвращаемся к шагу 2. Алгоритм заканчивается, когда в сети появляется хотя бы один критический путь, у которого продолжительности всех работ равны минимальным.

Пример 2. Рассмотрим сеть рис. 3 с данными таблицы 1.

1 шаг. На рис. 4. приведена сеть, состоящая из критических операций.

Числа у дуг в скобках равны пропускным способностям K_{ij} . Числа в квадратных скобках у вершин равны максимальным пропускным способностям путей из входа в соответствующую вершину. Минимальная мощность разрезов равна 3, полагаем $q_1 = 3$.

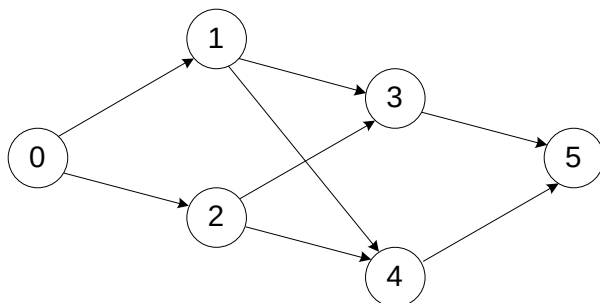


Рис. 3. Сеть для примера 2.

Таблица 1. Данные о параметрах d_i , D_i , и K_i .

(i,j)	(0,1)	(0,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,5)	(4,5)
d_i	2	1	4	1	2	3	2	4
D_i	6	3	7	5	3	7	5	7
K_i	4	5	3	1	3	2	6	7

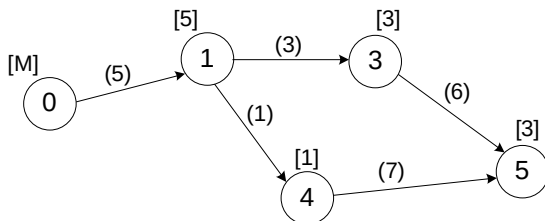


Рис.4. Сеть критических операций на шаге 1.

Для определения разреза с минимальным числом заходящих дуг, таких что $K_{ij} \leq q_1$, полагаем пропускные способности дуг с $K_{ij} \leq q_1$ равными 1, а пропускные способности дуг с $K_{ij} > q_1$, равными M (M – большое число) и определяем максимальный поток и минимальный разрез в полученной сети. В данном случае решение очевидно. В минимальный разрез v_1 заходят дуги (1, 3) (1, 4), число которых равно $m_1 = 2$.

Берем следующее значение $q_2 = 5$. Теперь в минимальный разрез заходит всего одна дуга (0, 1), то есть $m_2 = 1$. Так как $q_1 m_1 = 6 > q_2 m_2 = 5$, то сокращаем продолжительность операции (0, 1) на $\Delta = 1$. Больше нельзя, так как при $\Delta = 1$ в сети появляется новый критический путь (0, 2, 4, 5). Продолжительность проекта равна 17, фонд стимулирования равен 4.

2 шаг. Сеть критических операций приведена ниже

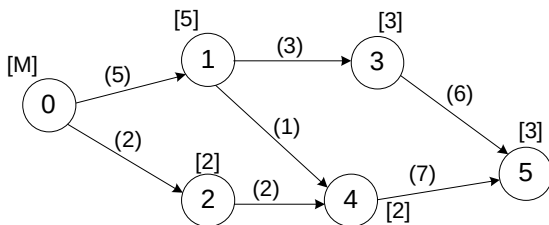


Рис.5. Сеть критических операций на шаге 2.

Минимальная мощность разреза равна 3. Множество дуг, заходящих в разрез: (0, 2); (1, 3); (1, 4). Берем $q_1 = 3$ и определяем разрез с минимальным числом дуг. В этот разрез заходят дуги (0, 2); (1, 3); (1, 4), то есть $m_1 = 3$. Следующее значение $q_2 = 5$. Минимальное число дуг, заходящих в разрез, равно $m_2 = 2$. Дальнейшее увеличение q нецелесообразно, так как нет ни одного разреза с числом заходящих дуг меньше 2. Так как $q_1 m_1 = 9 < q_2 m_2 = 10$, то сокращаем продолжительности дуг (0, 2); (1, 3); (1, 4) на $\Delta = 2$. Больше нельзя, так как при $\Delta = 2$ продолжительность

операции (0, 2) равна минимальной. Продолжительность проекта равна $T = 15$, фонд стимулирования увеличился на $\Delta\Phi = 18$.

3 шаг. Сеть критических операций приведена на рис. 6.

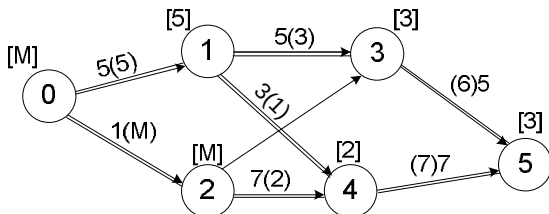


Рис. 6. Сеть критических операций на шаге 3.

Минимальная мощность разрезов по-прежнему равна 3. Берем $q_1 = 3$ и определяем разрез с минимальным числом заходящих дуг. Это дуги (1, 3); (1, 4); (2, 4), $m_1 = 3$. Увеличение q и $q_2 = 5$ не дает выигрыша как в предыдущем случае. Сокращаем продолжительности операций на $\Delta = 1$. Больше нельзя, поскольку при $\Delta = 1$ продолжительность операции (1, 3) равна минимальной. Продолжительность проекта равна 14, фонд стимулирования увеличился на $\Delta\Phi = 9$.

4 шаг. Сеть критических путей не изменилась. Полагаем $K_{13} = M$ и определяем минимальную мощность разрезов. В данном случае она равна 5. Полагаем $q_1 = 5$. Минимальное число заходящих дуг равно $m_1 = 2$. Это дуги (0, 1) и (2, 4). Сокращаем продолжительности операций (0, 1) и (2, 4) на $\Delta = 3$. Больше нельзя, так как их продолжительности становятся равными минимальным. Продолжительность проекта равна $T = 11$, фонд стимулирования увеличился на $\Delta\Phi = 30$.

5 шаг. Сеть критических путей не изменилась, однако, $K_{01} = K_{24} = M$ рис 7.

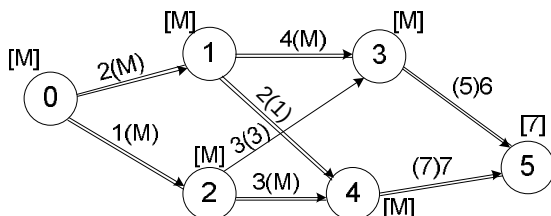


Рис. 7. Сеть критических операций на шаге 4.

Минимальная мощность разрезав равна 7. Берем $q_1 = 7$. В разрез с минимальным числом заходящих дуг заходят дуги (3, 5) и (4, 5). Сокращаем их продолжительности на $\Delta = 3$. Продолжительность проекта равна 8, фонд стимулирования увеличился на $\Delta\Phi = 42$.

Алгоритм окончен, так как в сети появились два критических пути, продолжительности операций которых равны минимальным. 5 страниц из 11 посвящены примерам.

Заключение

Рассмотренный подход к разработке унифицированных линейных механизмов сокращения сроков реализации проекта можно обобщать в различных направлениях. Во-первых, можно рассмотреть унифицированные скачкообразные системы стимулирования сроков сокращения проектов. Во-вторых, обобщить метод решения на случай нелинейных (кусочно-линейных) функций затрат. Наконец, представляют интерес групповые системы стимулирования, в которых исполнители разбиты на группы, так что для каждой группы применяется своя унифицированная система стимулирования. Эти и другие задачи, связанные с разработкой механизмов стимулирования в управлении проектами, требуют дальнейших исследований.

Литература

1. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. = М.: СИНТЕГ, 2001 – 124 с.
2. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: СИНТЕГ. 1999. – 128 с.
3. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука. 1976. – 327 с.
4. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир. 1991. – 464 с.
5. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами М.: Московский психолого-социальный институт, 2005 – 584 с.

INSENTIVE MECHANISMS OF TIME PROJECTS REALIZATION DECREASING WITH LINEAR FUNCTIONS OF EXPENSES

Vladimir Burkov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Doctor of Science, professor (vlab17@bk.ru).

Alexandr Tsvetkov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (olvinogr@ipu.ru).

V Sychev, Research Institute of Transport Construction, Moscow, General Director (mail@tsniis.com).

Abstract: Statements of incentive problems of stimulation of time projects decreasing is given. The case of the unified linear incentive system is considered. For a task solution concepts of capacity of a way and power of a cut are entered and the duality theorem about equality of the maximum capacity of ways and the minimum power of cuts is proved.

Keywords: incentive mechanisms, realisation of projects, functions of expenses.