УДК 517.93
ББК 78.34

«УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФИЛЬТРУЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ»

Бадоян А.Д.[1]
(Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет), Челябинск)

Основной целью нашей работы является решение задачи управления решениями начально-конечной задачи для для нестационарного уравнения соболевского типа. Полученные теоретические результаты были применены для исследования нестационарной модели свободной поверхности фильтрующейся жидкости.

Ключевые слова: начально-конечная задача, задача оптимального управления, нестационарная модель Дзекцера.

Введение

Большой практический интерес в теории движения грунтовых вод представляет уравнение

$$(\lambda - \Delta)\, x_t = a(t)\left(\alpha\Delta x - \beta\Delta^2 x\right) + u, \tag{1}$$

которое является обобщением уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью и моделирует эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [1]. В силу того, что выражение слева в уравнении (1) может быть нулевым при некоторых значениях параметра λ, данное уравнение относится к обширному классу неклассических уравнений математической

[1] *Ани Давидовна Бадоян, аспирант, (badoyanani@mail.ru).*

физики [5]. Параметры α, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$ и скалярная функция $a : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ описывают систему, а вектор-функция $u(t)$ отвечает внешнему воздействию на систему.

В данной работе мы будем рассматривать начально-конечные условия [2], т.е. часть условий на искомую функцию нам известна в начальный момент времени, а остальные условия, в силу учета особенностей моделируемого процесса, нам известна в конечный момент времени.

Зачастую параметры внешнего воздействия на систему могут быть отрегулированы [6] и поэтому мы будем считать функцию $u(t)$ управляющим воздействием на систему. Физический смысл задачи оптимального управления заключается в эффективном регулировании потоков грунтовых вод в системе пластов с помощью внешнего воздействия. Вопросы управляемости для стационарного уравнения Дзекцера (при $a(t) \equiv a$) рассматривались в работе [4], а начально-конечная задача для стационарного уравнения (1) — в [3]. Данное исследование проведено в рамках теории уравнений соболевского типа [7].

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times [0,T]$ рассмотрим задачу Дирихле

$$x(s,t) = \Delta x(s,t) = 0, \qquad (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \tag{2}$$

с начально-конечным условием

$$P_1(x(0) - x_0) = 0, \quad P_2(x(T) - x_T) = 0, \tag{3}$$

для уравнения в частных производных вида

$$(\lambda - \Delta)x_t = a(t)(\alpha\Delta x - \beta\Delta^2 x) + u. \tag{4}$$

Коэффициенты α, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$ и скалярная функция $a : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ описывают систему, а вектор-функция управления $u : \mathbb{R} \to L_2(\Omega)$ отвечает внешнему воздействию на систему, через P_j $(j = 1, 2)$ обозначены операторы, с помощью которых задаются условия в начальный и конечный моменты времени.

Введем в рассмотрение функционал качества

$$J(u) = \gamma \sum_{q=0}^{1} \int_0^T \|Cx^{(q)}(t,u) - z_d^{(q)}(t)\|_{\mathfrak{Z}}^2 dt + \tag{5}$$

$$+(1-\gamma)\sum_{q=0}^{k} \int_0^T \left\langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt,$$

где $\gamma \in (0,1]$, $k = 0,1,...,p+1$, $N_q \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$ — самосопряженные и положительно определенные операторы, оператор $C \in \mathcal{L}(W_2^2(\Omega); \mathfrak{Z})$, а $z_d = z_d(t)$ — плановое наблюдение из некоторого гильбертова пространства наблюдений $\mathfrak{Z}$, $x = x(t,u)$ — решение задачи (2)-(4).

Отметим, что $\gamma \in (0,1]$ и $(1-\gamma)$ — весовые коэффициенты целей оптимального управления, заключающиеся в достижении плановых показателей наблюдаемой величины без скачкообразных изменений (первое слагаемое в (5)) и минимизации расходуемых для этого ресурсов управления (второе слагаемое в (5)). При $\gamma = 1$ в функционале (5) исчезает второе слагаемое и мы получаем задачу жесткого управления, т.е. когда нас при оптимизации не интересуют затраты на достижение цели.

Нашей задачей является отыскание такой вектор-функции $v \in \mathfrak{U}_{ad}$, для которой выполняется соотношение

$$J(v) = \inf_{(x(u),u)\in \mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}} J(u), \tag{6}$$

где все пары $(x(u),u)$ удовлетворяют начально-конечной задаче (3) для уравнения (4), множество $\mathfrak{U}_{ad}$ — некоторое замкнутое и выпуклое подмножество допустимых управлений в гильбертовом пространстве управлений $L_2(\Omega)$, а $J(x,u)$ — функционал качества (5).

Для решения поставленной задачи необходимы предварительные сведения, описанные в следующей главе.

2. Абстрактные результаты

Доказательства изложенных в этом параграфе результатов можно найти в [7].

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ с нетривиальным ядром $\ker L \neq \{0\}$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$.

Определение 1. *Множества* $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})\}$ *и* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ *будем называть, соответственно,* L*-резольвентным множеством и* L*-спектром оператора* M.

Ясно, что при условии $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$ имеем $\rho^L(M) = \varnothing$.

Для комплексной переменной $\mu \in \mathbb{C}$ определим операторнозначные функции $(\mu L - M)^{-1}$; $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ и будем их называть соответственно L*-резольвентой, правой* и *левой* L*-резольвентами* оператора M.

Определение 2. *Правой (левой)* (L,p)*-резольвентой оператора* M *называется операторзначная функция* $p+1$ *комплексного переменного* $\lambda_0, \dots, \lambda_p$

$$R^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} R^L_{\lambda_k}(M) \quad \left(L^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L^L_{\lambda_k}(M)\right)$$

с областью определения $(\rho^L(M))^{p+1}$.

Определение 3. *Оператор* M *называется* (L,p)*-секториальным, если существуют константы* $K > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$*, такие, что сектор*

$$S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M),$$

причем для всех $\mu_k \in S^L_{a,\theta}(M)$, $k = \overline{0,p}$,

$$\max\{\|R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}, \|L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}\} \leqslant \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|}.$$

Определение 4. *Оператор M называется сильно (L,p)-секториальным, если он (L,p)-секториален и при этом существует плотный в $\mathfrak{Y}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{Y}}$ такой, что при любых $y \in \overset{\circ}{\mathfrak{Y}}$ и любых $\lambda, \mu_1, \dots, \mu_p \in S^L_{a,\theta}(M)$,*

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) y\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \frac{\mathrm{const}(y)}{|\lambda - a| \prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|},$$

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} M f\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})} \leqslant \frac{K}{|\lambda - a| \prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|}.$$

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда*

(i) *существуют аналитические в секторе $\Sigma = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \frac{\pi}{2}, \tau \neq 0\}$, полугруппы $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) : t > 0\}$ и$\{Y^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}) : t > 0\}$ вида*

$$X^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R^L_{\mu}(M) e^{\mu t} d\mu, \quad Y^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} L^L_{\mu}(M) e^{\mu t} d\mu,$$

где контур Γ ограничивает сектор Σ; причем полугруппа X^t разрешает уравнение $L\dot{x} = Mx$, а Y^t — уравнение $L(\alpha L - M)^{-1}\dot{y}(t) = M(\alpha L - M)^{-1} y(t)$ при $\alpha \in \rho^L(M)$

(ii) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$, *где* $\mathfrak{X}^0 = \ker X^{\bullet}$, $\mathfrak{X}^1 = \mathrm{im} X^{\bullet}$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker Y^{\bullet}$, $\mathfrak{Y}^1 = \mathrm{im} Y^{\bullet}$ *;*

(iii) *существуют единицы полугрупп $P = s\text{-}\lim\limits_{t \to 0+} X^t$, $Q = s\text{-}\lim\limits_{t \to 0+} Y^t$;*

(iv) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$, $k = 0, 1$*;*

(v) *существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0; \mathfrak{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$, и оператор $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)$ нильпотентен степени не больше p.*

Построим пространство

(7)
$$H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{\xi \in L_2(0,T;\mathfrak{Y}) : \xi^{(p+1)} \in L_2(0,T;\mathfrak{Y})\}, \ p \in \{0\} \cup \mathbb{N},$$

которое является гильбертовым в силу гильбертовости $\mathfrak{Y}$ со скалярным произведением $[\xi,\eta]=\sum\limits_{q=0}^{p+1}\int\limits_0^T\left\langle\xi^{(q)},\eta^{(q)}\right\rangle_{\mathfrak{Y}}dt.$

Перейдем к рассмотрению начально-конечной задачи. Введем в рассмотрение условие

(8)

$$\left.\begin{array}{c}\sigma^L(M)=\sigma_1^L(M)\cup\sigma_2^L(M)\,\text{причем}\ \sigma_j^L(M)\neq\emptyset,\ j=1,2,\\ \text{существует контур}\ \Gamma_j\subset\mathbb{C},\\ \text{ограничивающий область} D_j\subset\mathbb{C}\\ \Gamma_j=\partial D_j,\ \text{где}\ D_j\supset\sigma_j^L(M),\ \text{такой что}\ \overline{D_j}\cap\overline{D_k}=\emptyset\\ \text{для}\, j,k=1,2,\ j\neq k\end{array}\right\}.$$

Пусть относительный L-спектр оператора M удовлетворяет условию (8). Через $P_j\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $Q_j\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y})$ обозначим соответствующие спектральные проекторы, представимые в виде

$$P_j=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_j}R_\mu^L(M)d\mu,\quad Q_j=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_j}L_\mu^L(M)d\mu,\quad j=1,2.$$

Положим $\mathfrak{X}_j^1=\mathrm{im}P_j$ и $\mathfrak{Y}_j^1=\mathrm{im}Q_j$ $(j=1,2)$.

Рассмотрим начально-конечную задачу

(9) $$P_1(x(0)-x_0)=0,\quad P_2(x(T)-x_T)=0$$

для уравнения

(10) $$L\dot{x}(t)=a(t)Mx(t)+Bu(t).$$

Здесь $u:[0,T]\to\mathfrak{U}$ и скалярная функция $a:[0,T]\to\mathbb{R}_+$, $B\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}$

Подействуем на (10) последовательно проекторами $\mathbb{I}-Q$, Q_1 и Q_2, и получим эквивалентную систему

$$\begin{cases}\frac{1}{a(t)}H\dot{x}^0=x^0+M_0^{-1}B\frac{u^0}{a(t)},\\ \dot{x}_1^1=a(t)S_1x_0^1+L_1^{-1}Bu_1^1,\\ \dot{x}_2^1=a(t)S_2x_T^1+L_1^{-1}Bu_2^1,\end{cases}$$

где $H=M_0^{-1}L_0\in\mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)$ нильпотентен степени $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, операторы $S_j=L_1^{-1}M_j, S_1\in\mathcal{L}(\mathfrak{X}_1^1), S_2\in\mathcal{C}l(\mathfrak{X}_2^1)$, $j=1,2$.

Определение 5. *Вектор-функцию $x \in H^1(\mathfrak{X})$ назовем сильным решением начально-конечной задачи* (9), (10)*, если она удовлетворяет уравнению* (10) *и почти всюду условиям* (9)*.*

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, тогда для любых вектор-функций $x_0, x_T \in \mathfrak{X}$, вектор-функции $u \in H^{p+1}(\mathfrak{U})$ и скалярной функции $a \in C^{p+1}([0,T);\mathbb{R}_+)$, отделенной от нуля, существует единственное решение $x \in H^1(\mathfrak{X})$ задачи* (9), (10)*, представимое в виде*

$$x(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(I-Q)\left(\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\right)^k \frac{Bu(t)}{a(t)} +$$

$$+X_1^{A(t)}x_0 + \int_0^t X_1^{A(t)-A(s)} L_1^{-1} Q_1 Bu(s)ds -$$

$$-X_2^{A(T)-A(t)}x_T - \int_t^T X_2^{A(t)-A(s)} L_1^{-1} Q_2 Bu(s)ds$$

с учетом замены $A(t) = \int\limits_0^t a(\zeta)d\zeta$.

Пусть $\mathfrak{Z}$ — гильбертово пространство и оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Z})$. Рассмотрим функционал качества вида (5). Отметим, что если $x \in H^1(\mathfrak{X})$ то $z \in H^1(\mathfrak{Z})$. По аналогии с пространством $H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, введем пространство $H^{p+1}(\mathfrak{U})$, которое является гильбертовым в силу гильбертовости $\mathfrak{U}$. Выделим в пространстве $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ некоторое замкнутое и выпуклое подмножество $H^{p+1}_{ad}(\mathfrak{U})$, которое назовем *множеством допустимых управлений*.

Определение 6. *Вектор-функцию $v \in H^{p+1}_{ad}(\mathfrak{U})$ назовем оптимальным управлением решениями задачи* (9), (10)*, если*

$$J(v) = \min_{(x(u),u)\in \mathfrak{X}\times H^{p+1}_{ad}(\mathfrak{U})} J(u) \tag{11}$$

где все пары $(x(u),u) \in \mathfrak{X} \times H^{p+1}_{ad}(\mathfrak{U})$ удовлетворяют (9)*,* (10)*.*

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и скалярная функция $a \in C^{p+1}([0,T);\mathbb{R}_+)$ отделена* *от нуля. Тогда для любых вектор-функций* $x_0, x_T \in \mathfrak{X}$ *и* $z_d \in \mathfrak{Z}$, *существует единственное оптимальное управление* $v \in H_{ad}^{p+1}(\mathfrak{U})$ *решениями задачи* (9)–(11).

3. Модель Дзекцера

Для редукции уравнения (4) с граничным условием (2) к уравнению (10), возьмем функциональные пространства

$$\mathfrak{X} = \{x \in W_2^2(\Omega) : \Delta x(s) = x(s) = 0,\, s \in \partial\Omega\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{Y} = L_2(\Omega),$$

где $W_2^2(\Omega)$ – пространства Соболева. Вектор-функция управления $u \in H^1(\mathfrak{Y})$.

Операторы L, M определим формулами

$$L = \lambda - \Delta, \quad M = \alpha\Delta - \beta\Delta^2,$$

а область определения оператора M: $\mathrm{dom}M = \{x \in W_2^4(\Omega) : x(s) = \Delta x(s) = 0, s \in \partial\Omega\}$.

Лемма 1. *Для любых* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\alpha}{\beta}\}$ *оператор* $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, *а оператор* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$.

Обозначим через $\sigma(\Delta)$ спектр однородной задачи Дирихле в области Ω для оператора Лапласа Δ. Спектр $\sigma(\Delta)$ отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$, т.е. ограничен справа. Через $\{\lambda_k\}$ обозначим множество собственных значений, занумерованное по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\psi_k\}$ – семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$, $\psi_k \in C^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 2. *Для любых* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\alpha}{\beta}\}$ *оператор* M *сильно* $(L, 0)$*-секториален.*

В условиях леммы 2 построим L-резольвенту и правую L-резольвенту оператора M:

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = \lambda\}} \frac{\langle\cdot, \psi_k\rangle\psi_k}{\mu(\lambda - \lambda_k) - (\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2)}, \tag{12}$$

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L = \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{l:\lambda_l=\lambda\}} \frac{\langle\cdot,\psi_k\rangle\psi_k}{\mu + \frac{\beta\lambda_k^2-\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}. \tag{13}$$

Построим проекторы. Пусть относительный L-спектр оператора M удовлетворяет условию (8). Построим проекторы $P_j \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $Q_j \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})$, $j = 1, 2$ следующим образом

$$P_1 = \sum_{k:\mu_k\in\sigma_1^L(M)} \langle(x(0) - x_0), \psi_k\rangle\psi_k = 0,$$

$$P_2 = \sum_{k:\mu_k\in\sigma_2^L(M)} \langle(x(T) - x_T), \psi_k\rangle\psi_k = 0.$$

Проектор Q имеет тот же вид, но определен на пространстве $\mathfrak{F}$.

Таким образом, свели задачу (2)–(4) к задаче (9), (10). В силу леммы 1 и теоремы 1 справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\alpha}{\beta}\}$, и $a \in C^1([0,T];\mathbb{R}_+)$ отделена от нуля, тогда при любых $x_0, x_T \in \mathfrak{X}$, $u \in H^1(L_2(\Omega))$ существует единственное сильное решение $x \in H^1(\mathfrak{X})$ задачи* (2)–(4).

В силу результатов работы [4], задача (2)–(4) управляема за конечное время. Далее перейдем к задаче оптимального управления решениями задачи (2)–(4). Для этого в функционале (5) возьмем операторы N_q в виде: $\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)}\rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu_{kq}\left(u_k^{(q)}\right)^2(t)$, где $u(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle u(t), \psi_k\rangle\psi_k$ и коэффициенты $\nu_{kq} > 0$. Тогда, в силу теорем 3 и 4, можно сформулировать результат о существовании решения задачи оптимального управления решениями начально-конечной для уравнения Дзекцера.

Теорема 5. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\alpha}{\beta}\}$ и $a \in C^1([0,T];\mathbb{R}_+)$ отделена от нуля, тогда при любых $x_0, x_T \in \mathfrak{X}$, $z_d \in H^1(\mathfrak{Z})$, существует единственное оптимальное управление $v \in H^1_\partial(\mathfrak{U})$ задачи* (2)–(4)*,* (6) *с функционалом* (5).

Литература

1. ДЗЕКЦЕР, Е. С. *Обобщенные уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью* / Е.С. Дзекцер. - ДАН СССР. – 1972. – Т. 202, №. 5. – С. 1031-1033.
2. ЗАГРЕБИНА, С. А. *Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики* / С.А, Загребина. - Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. —- 2013. — Т. 6, №2. С. 5-24.
3. ЗАГРЕБИНА, С. А. Обобщенная задача Шоуолтера — Сидорова для уравнений соболевского типа с сильно (L, p)-радиальным оператором / С. А. Загребина, М. А. Сагадеева. - Вестник МаГУ. Математика. — 2006. — Вып. 9. — С. 17 – 27.
4. РУЗАКОВА, О. А. *Об ε-управляемости линейных уравнений, неразрешенный относительно производной, в банаховых пространствах* / О. А. Рузакова, В. Е. Федоров. - Вычислительные технологии. — 2005. — Т. 10, № 5. — С. 90 – 102.
5. СВИРИДЮК, Г. А. *Неклассические модели математической физики* / / Г. А. Свиридюк, С. А. Загребина. - Вестник ЮУрГУ. Мат. моделирование и программирование. — 2012. — № 40(299). — С. 7 – 18.
6. SAGADEEVA, M.A. *Optimal Control of Solutions to the Multipoint Initial-Final Problem for Nonstacionary Relatively Bounded Equations of Sobolev Type* / M.A. Sagadeeva, A.D. Badoyan. - Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 128-134.
7. SVIRIDYUK, G. A. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators* / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht, Boston:VSP, 2003. – 216 p.

CONTROL OF SOLUTIONS OF THE INITIAL-FINAL PROBLEM FOR NON-STATIONARY MODEL OF FREE SURFACE OF FILTERED FLUID

Ani Badoyan, South Ural State University (National Research University), postgraduate (badoyanani@mail.ru).

Abstract: The main aim of our work is to solving control problems of solutions for non-stationary equation of Sobolev type with initial-final conditions. The theoretical results were used for the study non-stationary model free surface of filtered fluid.

Keywords: the initial-final problem, the problem of optimal control, the non-stationary model free surface of filtered fluid.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...

Поступила в редакцию ...
Дата опубликования ...