УДК 336.6
ББК 65.05

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКЦИИ НА ПРЕДПРИЯТИИ

Романов Б.А.[1]
(*"МАТИ" Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского*)

В статье разработана стохастическая динамическая оптимизационная модель производства продукции на предприятии посредством трансформации детерминированной модели. Получены аналитические выражения функции распределения объема производства продукции и его числовых характеристик - математического ожидания и дисперсии для равномерного и нормального распределения элементарных случайных величин: производственной мощности, количества занятых работников и количества поставляемой исходной продукции.

Ключевые слова: стохастическое программирование, случайные величины, функции распределения случайных величин, производство продукции на предприятии.

---

[1] *Романов Борис Александрович, кандидат технических наук, доцент* (*boris094@mail.ru*)

STOCHASTIC DYNAMIC OPTIMIZING MODEL OF PRODUCTION AT THE ENTERPRISE

Boris Romanov, "MATI" - The Russian state technological university of K.E.Tsiolkovsky, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (boris094@mail.ru).

In article the stochastic dynamic optimizing model of production at the enterprise by means of transformation of the determined model is developed. Analytical expressions of function of distribution of volume of output of production and its numerical characteristics - a population mean and a dispersion for uniform and normal distribution of elementary random variables are received: capacity, quantity of the occupied workers and quantity of delivered initial production.

Keywords: stochastic programming, random variables, functions of distribution of random variables, production at the enterprise.

1. Введение

Производство продукции на предприятии зависит от имеющихся производственных мощностей, количества занятых работников и поставок исходной продукции. Считая эти данные изменяющимися от времени величинами, строят динамические модели производства продукции на предприятии. Динамическую модель производства продукции на предприятии такого вида можно представить как оптимизационную задачу.

Поскольку современные производственные процессы происходят в условиях технических и экономических рисков, то динамические модели производства продукции на предприятии можно рассматривать как стохастические. Технические и экономические риски в той или иной степени можно учесть, если считать параметры модели неопределенными. Неопределенность параметров можно разделить на три вида:

- Неопределенность, присущая вообще природе больших социальных систем, в том числе и экономических, связанная с действием большого количества неучтенных природных и социальных факторов, которые обусловливают изменение территориальных и технологических связей;

- Неопределенность, связанная с недостатком информации о точных численных значениях параметров модели;
- Неопределенность, возникающая в связи с приближенным моделированием процесса.

Рассмотрим последние два вида неопределенности применительно к модели производства продукции на предприятии. Примером неопределенности, связанной с недостатком информации о точных численных значениях параметров, могут быть размеры производственных мощностей предприятий, количество занятых работников, поставки исходной продукции и т.д.

Таким образом, учитывая, что большинство параметров рассматриваемого процесса могут быть не точными, заданными в определенных границах (неопределенными в этих границах), решение, полученное на модели этого процесса, также будет неопределенным (случайным) в некоторых границах.

Стохастическим программированием называют раздел математического программирования, изучающий теорию и методы решения условных экстремальных задач при неполной информации о параметрах условий задачи. Следовательно, оптимизационную модель производства продукции на предприятии можно рассматривать и как модель стохастического программирования, а поскольку модель динамическая, то и как модель динамического стохастического программирования.

В практических приложениях используются стохастические модели двух типов. В моделях первого типа определяются статистические характеристики множеств идентичных экстремальных систем с отличающимися численными значениями параметров. Модели такого типа называют моделями пассивного стохастического программирования [Юдин Д.Б., 1979]. Модели второго типа предназначены для построения методов и алгоритмов управления в условиях неполной информации. При этом в моделях второго типа всегда присутствует этап наблюдения за системой. Поскольку наблюдение за системой в оптимизационной модели в нашем случае не предполагается, то будем рассматривать модель стохастического программирования первого типа.

2. Трансформация детерминированной модели в стохастическую

Динамическую детерминированную оптимизационную модель производства продукции на предприятии типа задачи на $max\,min$ можно записать в следующем виде [Романов Б.А., 2011]:

$$(1)\quad max\, x_i(t) = \min_i \left[\frac{\mu_i \hat{h}_i(t)}{\theta_i}, \frac{\mu_i p_i(t)\xi_i}{\theta_i}, \min_j \frac{v_{ij}(t)}{\alpha_{ij}} \right],$$

где $h_i(t)$ – количество занятых работников в момент времени t;

где $p_i(t)$ – производительность предприятия i в момент времени t;

ξ_i – трудоемкость производства продукции на предприятии i.

α_{ij} – коэффициенты прямых затрат продукции (выполнении работ, оказания услуг) на предприятии i, выпускаемой предприятием j.

μ_i – средний фонд оплаты труда на одного работающего.

θ_i – доля затрат труда в объеме выпуска продукции на предприятии i;

$v_{ij}(t)$ затраты на предприятии i исходной продукции, выпускаемой на предприятии j.

Эту модель можно трансформировать в стохастическую, если представить, что в каждый момент времени величины $p_i(t)$, $h_i(t)$ и $v_{ij}(t)$ равны сумме средних значений на предыдущем шаге и случайных приращений, распределенных на заданных отрезках

$$p_i(t+1) = \bar{p}_i(t) + \Delta p_i(t+1);$$
$$h_i(t+1) = \bar{h}_i(t) + \Delta h_i(t+1);$$
$$v_{ij}(t+1) = \bar{v}_{ij}(t) + \Delta v_{ij}(t+1).$$

Стохастическая модель представляет собой стохастический процесс, т.е. последовательность случайных значений выходных переменных в моменты времени t $(t = 0,1,2,...)$. Случайные переменные принимают непрерывные значения, а время – дискретные значения.

Состояние системы переменных в каждый момент времени зависит от состояний в предшествующие моменты времени. Однако на практике моделировать такие процессы очень сложно, поэтому обычно применяют упрощающие предложения. Важнейшим среди них является предположение, что состояние системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящий момент и не зависит от прошлого. Такие процессы называются процессами Маркова**.**

Этот процесс определен, если есть правило, с помощью которого можно найти вероятности последовательности состояний системы в моменты времени t. Для этого необходимо, чтобы были решены следующие задачи:

- Определена информация, на основе которой можно получить все другие данные о состоянии системы;
- Определено распределение вероятностей после некоторого числа шагов по времени и приближается ли оно с ростом числа шагов к какому-либо предельному распределению;
- Определены вероятности перехода из одного фазового состояния в другое на некотором шаге по времени.

Допустим, что состояние рассматриваемой динамической модели в стохастической постановке можно представить процессом Маркова.

Будем считать случайные величины $\Delta p_i(t+1)$, $\Delta h_i(t+1)$, $\Delta v_{ij}(t+1)$ центрированными. Подставив эти выражения в формулу (1), получим, что величина $x_i(t+1)$ на шаге времени $t+1$равна сумме среднего значения на шаге t и случайному возмущению на шаге $t+1$

$$(2)\quad x_i(t+1) = \min_i \left[\frac{\mu_i h_i(t)}{\theta_i}, \frac{\mu_i \xi_i p_i(t)}{\theta_i}, \min_j \frac{v_{ij}(t)}{\alpha_{ij}} \right] +$$

$$+ \min_i \left[\frac{\mu_i \Delta h_i(t+1)}{\theta_i}, \frac{\mu_i \xi_i \Delta p_i(t+1)}{\theta_i}, \min_j \frac{\Delta v_{ij}(t+1)}{\alpha_{ij}} \right].$$

3. Решение задачи стохастического программирования

Рассматриваемый динамический процесс определяется рекуррентными соотношениями типа

$$(3)\quad X(t+1) = \Phi(t+1, X(t), \xi(t+1)),\ t = 0,1,2...,$$

где $\Phi(t+1, x, y)$, $x \in E_L$, $y \in E_Q$ при каждом t случайная, измеримая по Борелю, функция $L+Q$ переменных x, y, а $\xi(1), \xi(2),...$ – некоторые случайные векторы со значениями из E_Q (E_Q, E_L эвклидовы пространства размерности L, Q)

Для того чтобы рекуррентное соотношение (3) определяло некоторый процесс $X(t)$, необходимо задать начальное условие $X(0)$ в момент времени $t=0$. Процесс $X(t)$ с таким начальным условием будем обозначать $X^{0,X(0)}(t)$. В нашем случае $X(0) = x$ не случайно и $X^{0,x}(t)$ – процесс, выходящий в момент времени 0 из фиксированной точки x .

Пусть случайные величины $\xi(1),\xi(2),\ldots$ независимы в совокупности. Тогда из вида системы (3) вытекает и независимость процесса $X(u)=X^{0,X(0)}(u),\ \xi(u+1),\xi(u+2),\ldots$ при $u>0$. При этом процесс $X(t)=X^{0,X(0)}(t)$ полностью определяется по величинам $X(0),\xi(1),\xi(2),\ldots,\xi(t)$, т.е. является некоторой функцией величин $X(0),\xi(1),\xi(2),\ldots,\xi(t)$. В [Невельсон М.Е., Хасьминский Р.З., 1972] доказывается, что процесс $X(t)=X^{0,X(0)}(t)$, определяемый рекуррентными соотношениями (3) и начальным условием $X(0)$ является Марковским и его переходная функция $P(u,x,u+1,\Gamma)$ за один шаг равна

(4) $P\{\Phi(u+1,x,\xi(u+1))\}\in\Gamma$,

где Γ – некоторое множество значений $X(t)$.

Полагая, что множество Γ это вектор $y=(y_1,\ldots,y_l)$ при условии $y_1<x_1,\ldots,y_l<x_l$, получаем, что переходная функция (4) это многомерная функция распределения $X(t)$.

Для удобства дальнейших действий обозначим в выражении (2)

$$y=\frac{\mu_i\Delta h_i\ (t+1)}{\theta_i};\ z=\frac{\mu_i\xi_i\Delta p_i\ (t+1)}{\theta_i};\ w_j=\frac{\Delta v_{ij}(t+1)}{\alpha_{ij}}.$$

Обозначим X случайную составляющую (второе слагаемое) $x_i(t+1)$, которую запишем в виде

$$X=min\left(y,z,\min_j\ w_j\right).$$

Положим, что случайные величины y, z и w_j распределены на отрезках с минимальными и максимальными значениями $(y^-, y^+), (z^-, z^+)$ и (w_j^-, w_j^+).

Функция распределения $F(X)$ величины X записывается в виде [Вентцель Е.С., Овчаров Л.А., 1969]

$$F(X) = 1 - \prod_{i=1}^{3} [1 - F_i(x)],$$

где $F_1(x) = F(y); F_2(x) = F(z); F_3(x) = F(\min_j w_j)$.

Функция распределения $F(\min_j w_j)$ имеет вид

$$F(\min_j w_j) = 1 - \prod_{j=1}^{n} [1 - F(w_j)],$$

где n – количество случайных величин w_j. Для упрощения примем, что случайные величины y, z и w_j имеют одинаковые функции распределения и обозначим их через x. Тогда функцию распределения $F(\min_j w_j)$ можно записать в виде

$$F(\min_j w_j) = 1 - [1 - F(x)]^n.$$

После подстановки этой функции распределения в общую формулу $F(X)$ получаем

$$F(X) = 1 - [1 - F(x)]^2 [1 - F(x)]^n = 1 - [1 - F(x)]^{n+2} =$$

$$= (n+2)F(x) - \frac{(n+2)(n+1)}{2} F^2(x) + \frac{(n+2)(n+1)n}{6} F^3(x) - \ldots$$

Далее на основе функции распределения можно вывести формулы математического ожидания и дисперсии случайной величины X, в которых используется плотность функции распределения случайной величины $f(X)$. Последняя определяется дифференцированием $F(X)$:

$$f(X) \cong (n+2)f(x) - (n+2)(n+1)f(x)F(x) +$$
$$+\frac{(n+2)(n+1)n}{2}F^2(x) - \ldots .$$

В качестве функций распределения случайных величин - параметров модели ниже будут рассматриваться два варианта: равномерное и нормальное распределения. Выбор этих распределений обусловлен следующими обстоятельствами. В данной модели неточность (неопределенность) информации имитируется случайной величиной на некотором интервале неточности значений параметра. Этот интервал определяется экспертно для каждого конкретного параметра.

Равномерное распределение означает полную неточность (неопределенность) параметра на заданном интервале. Нормальное распределение означает, что имеется статистически значимое множество экспертных оценок параметра, подчиненное нормальному закону распределения на некотором интервале (усеченное нормальное распределение). Дисперсия равномерного распределения определяется значениями отрезка, на котором оно укладывается и равна квадрату длины отрезка деленному на 12.

Дисперсию для нормального распределения определим так. Положим, что практически все нормальное усеченное распределение укладывается на заданном экспертно отрезке. Это означает, что отрезок приближенно равен 6 значениям корня квадратного из дисперсии (сигмы), откуда и получаем значение дисперсии.

4. Равномерное распределение элементарных случайных величин

Рассмотрим сначала равномерное распределение. Распределение и плотность для центрированной элементарной случайной величины x имеют вид

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\Delta x};\ f(x) = \frac{1}{\Delta x},$$

Функция $F(x)$ распределена на отрезке $-\frac{\Delta x}{2}, +\frac{\Delta x}{2}$, где Δx длина отрезка разброса случайной центрированной величины x.

Для равномерного распределения математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$ можно определить в виде аналитических формул, т.к. интегралы вычисляются в элементарных функциях, хотя для произвольного n формулы имеют громоздкий вид.

Поскольку по смыслу функции распределения $F(x) \le 1$, то значения степеней этой функции $F^2(x)$, $F^3(x)$ и т.д. уменьшаются. Однако анализ показывает, что использование приближенных выражений функции $F(X)$, по крайней мере до третьего порядка малости, приводит к существенно некорректному представлению функции $F(X)$. Поэтому в качестве примера рассмотрим простой случай $n=1$ и тогда случайными являются три параметра. Тогда функции $F(X)$ и $f(X)$ имеют вид:

$$F(X) = 3F(x) - 3F^2(x) + F^3(x),$$

$$f(X) = 3f(x) - 6F(x)f(x) + 3F^2(x)f(x).$$

Математическое ожидание $M[X]$ и дисперсия $D[X]$ определяется по формулам:

$$M[X]=\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} xf(X)dx$$ и

$$D[X]=\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} x^2 f(X)dx-M^2[X].$$

Подставляя выражения функций $F(x)$ и $f(x)$ для равномерного распределения, получаем:

$$M[X]=-\frac{\Delta x}{4},\ D[X]=\frac{\Delta x^2}{6{,}15}.$$

Представляет интерес выявить изменение значений $M[X]$ и $D[X]$ при изменении количества случайных параметров. В отличие от предыдущего случая, в котором рассмотрены три параметра, выведем формулы $M[X]$ и $D[X]$ для двух параметров (в этом случае $n=0$). Тогда функции $F(X)$ и $f(X)$ имеют вид:

$$F(X)=2F(x)-F^2(x),$$

$$f(X)=2f(x)-2F(x)f(x).$$

Подставляя выражения функций $F(x)$ и $f(x)$ для равномерного распределения, получаем:

$$M[X]=-\frac{\Delta x}{6},\ D[X]=\frac{\Delta x^2}{18}.$$

Из сравнения $M[X]$ для трех и двух параметров следует, что $M[X]$ имеет отрицательное смещение по сравнению с детерминированной постановкой задачи и смещение по абсолютной величине тем больше, чем больше учитывается случайных параметров. В отношении $D[X]$ можно отметить, дисперсия увеличивается по мере увеличения количества случайных параметров.

Чтобы сравнить конкретные значения $M[X]$ и $D[X]$ для двух и трех параметров, рассмотрим простой пример. Производится один продукт на производственной линии мощностью p, на которой работают h работников с производительностью труда ξ. Выработка продукции x связана с затратами исходного материала v соотношением $v = \alpha x$. Величина x должна удовлетворять неравенствам $x \le p$, $x \le \xi h$, $x \le \frac{v}{\alpha}$ и максимальное значение x^{max} определяется как

$$x^{max} = min\left(p, \xi h, \frac{v}{\alpha} \right).$$

Подставим в формулы численные значения рассматриваемого примера. Пусть мощность производственной линии p в стоимостном выражении равна 1000000 руб. в месяц. На производственной линии занято 20 работников (величина h). Производительность труда ξ составляет 50000 руб. на работника в месяц. Коэффициент затрат материалов от выработки α равен 0,2.

Для обеспечения выработки x в размере 1000000 руб. в месяц требуется объем материалов v в стоимостном выражении на 200000 руб. Пусть отклонение по параметрам $\Delta x = \Delta p$, $\Delta x = \xi \Delta h$, $\Delta x = \frac{\Delta v}{\alpha}$ составляет 10% от детерминированных значений. Поскольку в параметрах $\xi \Delta h$ и $\frac{\Delta v}{\alpha}$ присутствуют коэффициенты, то отклонение на 10% от значения параметра соответствует отклонению в количестве работников $\Delta h = \frac{\Delta x}{\xi}$, а в исходных материалах $\Delta v = \alpha \Delta x$ значений, что в абсолютном выражении составляет $\Delta p = 100000$ руб., $\Delta h = 2$ работника, $\Delta v = 20000$ руб.

В итоге получаем для трех параметров:

$M[X] = -\frac{100000}{4} = -25000$ руб., что в процентном отношении составляет 25%.

Для двух параметров:

$M[X] = -\frac{100000}{6} \cong -16667$ руб., а в процентном отношении 16,67%.

Соответственно средне-квадратическое (стандартное) отклонение $s = \sqrt{D[X]}$ равно:

- Для трех параметров $s = 40311$ руб.= 40% от детерминированного значения;
- Для двух параметров $s = 23570$ руб.= 23,6% от детерминированного значения.

5. Нормальное распределение элементарных случайных величин

Рассмотрим теперь нормальное распределение элементарных (первичных) случайных величин. Плотность нормального распределения случайной величины x имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Поскольку неточность параметров задана на конечном отрезке, то нормальное распределение будет усеченным. Усеченное нормальное центрированное распределение имеет вид не усеченного распределения, умноженного на коэффициент k, вычисляемый по формуле

$$k = \frac{1}{F\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - F\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)},$$

где $F(x)$ – функция нормального распределения (интеграл вероятностей).

В нашем случае, для упрощения положим, что величина $F\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - F\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)$ близка к 1 и, соответственно, $k \cong 1$.

В качестве стандартного отклонения σ_X примем такую величину, чтобы выполнялось равенство $6\sigma_X = \Delta x$ (правило 3-х сигм, означающее, что значения случайной величины x практически достоверно заключены в интервале $(-3\sigma_X, +3\sigma_X)$. Таким образом, $\sigma_X = \frac{\Delta x}{6}$.

При вычислении математического ожидания и дисперсии следует учесть, что интеграл, включающий функцию плотности нормального распределения, не берется в элементарных функциях. Для целей данного исследования можно использовать приближение к плотности нормального распределения в виде разложения в ряд Тейлора в точке $x = 0$. Оставив два члена разложения, получим:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}} \cong \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) =$$

$$= \frac{6}{\Delta x\sqrt{2\pi}} - \frac{108x^2}{\Delta x^3\sqrt{2\pi}}.$$

Поскольку представление функции $f(x)$ приближенное, то ее следует нормировать. Смысл нормировки состоит в том, интеграл от функции $f(x)$ на отрезке ее положительной определенности должен быть равен 1. Функция $f(x)$ представляет собой вогнутую симметричную параболу, максимум которой является положительно величиной, равной свободному члену. Для нормировки надо найти отрезок положительной определенности этой параболы такой, чтобы интеграл от параболы на этом отрезке равнялся 1.

Обозначим сдвиг параболы по оси ординат Δf, а отрезок, который надо найти Δx_*. Эти параметры определяются из системы уравнений:

$$\int_{-\frac{\Delta x_*}{2}}^{\frac{\Delta x_*}{2}} [f(x) + \Delta f]dx = 1;$$

$$f\left(\frac{\Delta x_*}{2}\right) + \Delta f = 0 \text{ или } f\left(-\frac{\Delta x_*}{2}\right) + \Delta f = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$\Delta x_* = \Delta x\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{18}\right)^{\frac{1}{3}} \cong \frac{\Delta x}{2};$$

$$\Delta f = -\frac{6}{\Delta x\sqrt{2\pi}} + \frac{27x^2\Delta x_*^2}{\Delta x^3\sqrt{2\pi}} \cong \frac{0{,}75}{\Delta x\sqrt{2\pi}}.$$

В результате приближенно функция $f(x)$ принимает вид:

$$f(x) \cong \frac{6{,}75}{\Delta x\sqrt{2\pi}} - \frac{108x^2}{\Delta x^3\sqrt{2\pi}} \cong \frac{2{,}7}{\Delta x} - \frac{42x^2}{\Delta x^3}.$$

Наряду с функцией $f(x)$ в общем выражении функции $f(X)$ имеется функция нормального распределения $F(x)$. Эта функция не выражается в элементарных функциях. Для практических целей можно использовать близкую к функции распределения $F(x)$ логистическую функцию $\Psi(x)$, для которых на всей числовой оси выполняется соотношение [Тюрин Ю.Н., 1978]:

$$\left|F(x) - \Psi(1{,}7x)\right| < 0{,}01;$$

Используя логистическую функцию можно записать приближенное выражение для функции нормального распределения:

$$F\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) \cong \frac{e^{\frac{x}{\bar{\sigma}_x}}}{e^{\frac{z}{\bar{\sigma}_x}} + 1}, \quad \text{где } \bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{1{,}7}. \qquad (6.6)$$

Далее логистическую функцию можно представить приближенно в виде разложения в ряд Тейлора в точке $x = 0$. Это можно сделать, воспользовавшись известными разложениями числителя и знаменателя (разложение знаменателя отличается от разложения числителя на единицу в свободном члене). Затем, применяя теорему о подстановке ряда в ряд и поделив числитель на знаменатель [Г.М. Фихтенгольц,1958], в итоге получим, оставив два члена разложения, приближенное линейное выражение логистической функции:

$$F\left(\frac{x}{\sigma_x}\right) \cong \frac{1}{2} + \frac{x}{4\bar{\sigma}_x}.$$

Поскольку выражение функции $F(x)$ приближенное, то ее надо нормировать, т.е. определить такое слагаемое ΔF , что

$$F\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + \Delta F = 1.$$

Отсюда получаем $\Delta F = \frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{8\bar{\sigma}_x}$ и функция $F(x)$ принимает вид $F(x) = 1 - \frac{\Delta x}{8\bar{\sigma}_x} + \frac{x}{4\bar{\sigma}_x}$.

Учитывая, что $\bar{\sigma}_x = \dfrac{\sigma_x}{1{,}7} \cong \dfrac{\Delta x}{10}$ окончательно получаем

$$F(x) = -\frac{1}{4} + \frac{5x}{2\Delta x}.$$

Правой точкой отрезка положительной определенности функции $F(x)$ является $\dfrac{\Delta x}{2}$. Левая точка этого отрезка x_0 определяется из уравнения:

$$F(x_0) = 0 = -\frac{1}{4} + \frac{5x_0}{2\Delta x},\ x_0 = \frac{\Delta x}{10}.$$

Таким образом границами отрезка положительной определенности Δx_{**} функции $F(x)$ являются точки $\dfrac{\Delta x}{10}, \dfrac{\Delta x}{2}$ и отрезок равен $\Delta x_{**} = \dfrac{4\Delta x}{10}$. Отрезок положительной определенности Δx_* функции $f(x)$ симметричен относительно оси ординат и равен $\dfrac{\Delta x}{2}$.

Теперь надо определить отрезок, на котором следует выполнять интегрирование при вычислении $M[X]$ и $D[X]$ исходя из отрезк***ов*** Δx_* и Δx_{**} на которых положительно определены функции $f(x)$ и $F(x)$. Поскольку отрезок Δx_{**} положительной определенности функции $F(x)$ меньше отрезка положительной определенности Δx_* функции $f(x)$, то интегрировать нужно на отрезке Δx_{**} положительной определенности функции $F(x)$, имеющим граничные точки $-\dfrac{\Delta x}{5}, \dfrac{\Delta x}{5}$.

При этом надо сдвинуть функцию $F(x)$ влево на такую величину, чтобы значение этой функции равнялось 1 на правом конце отрезка. Тогда получаем выражение функции $F(x)$ в виде:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{5x}{2\Delta x}.$$

Проверка показывает, что в левой точке отрезка $F\left(-\frac{\Delta x}{5}\right) = 0$, что соответствует предъявляемым к функции $F(x)$ требованиям.

На отрезке положительной определенности функции $F(x)$ значения функции $f(x)$ уже не будут удовлетворять условиям равенства интеграла от этой функции 1. Поэтому функцию $f(x)$ также надо нормировать, сдвинув по оси ординат так, чтобы выполнялось условие:

$$\int_{-\frac{\Delta x_{**}}{2}}^{\frac{\Delta x_{**}}{2}} [f(x) + \Delta f]dx = 1.$$

Из этого уравнения получаем:

$\Delta f = \frac{0{,}825}{\Delta x}$ и тогда $f(x)$ принимает вид

$$f(x) \cong \frac{3{,}525}{\Delta x} - \frac{42x^2}{\Delta x^3}.$$

Выражения для $M[X]$ и $D[X]$ получаем, используя нормированные выражения функций $f(x)$ и $F(x)$. Выполним интегрирование для случаев трех и двух параметров, рассмотренных выше, получаем:

Для трех параметров:

$$M[X] \cong -\frac{\Delta x}{12{,}5}; D[X] \cong \frac{\Delta x^2}{123}.$$

Для двух параметров:

$$M[X] \cong -\frac{\Delta x}{10{,}6}; D[X] \cong \frac{\Delta x^2}{53}.$$

Подставляя данные по приведенному выше примеру, определяем численные значения.

Для трех параметров:

$M[X] \cong 8000$ руб.=8% от детерминированного значения.

$s = \sqrt{D[X]} \cong 9090$ руб.=9,09% от детерминированного значения.

Для двух параметров:

$M[X] = 9433$ руб.=9,433% от детерминированного значения.

$s = \sqrt{D[X]} \cong 13736$ руб.=13,74% от детерминированного значения.

Сравнение с равномерным распределением показывает, что смещение $M[X]$ также имеет отрицательный знак и по абсолютной величине меньше, чем для равномерного распределения, что вполне ожидаемо. Величины дисперсии $D[X]$ для нормального распределения меньше, чем для равномерного, что также соответствует сравнению характеристик этих распределений.

6. Заключение

В статье разработана стохастическая динамическая оптимизационная модель производства продукции на предприятии посредством трансформации динамической оптимизационной детерминированной модели. Разработано решение задачи стохастического оптимизационного программирования и получены аналитические формулы функций распределения производства продукции в зависимости от распределений случайных элементарных величин - производственной мощности, количества занятых работников и количества поставляемой исходной продукции. Приведены численные примеры расчета выходного показателя для равномерного и нормального распределений элементарных случайных величин.

Литература

1. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С., ОВЧАРОВ Л.А. *Теория вероятностей*. – М.: Наука, 1969.- 368 с.
2. НЕВЕЛЬСОН М.Е., ХАСЬМИНСКИЙ Р.З. *Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание.* М.:Наука, 1972.-304 с.
3. РОМАНОВ Б.А. *Алгоритм исследования реализации предприятиями инвестиционного производственного проекта:* Монография.- М.:РИОР;ИНФРА-М, 2011.-392 с.
4. ТЮРИН Ю.Н. *Непараметрические методы статистики.* М.: Знание, 1978.
5. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 1-3. Ленинград: Физматгиз, 1958.-656 с.