УДК 519.833.2
ББК 22.176

ПОРОГОВЫЕ МОДЕЛИ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

Бреер В. В.[1]
(*Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва*)

Исследованы модифицированные модели ведения боевых действий Ланчестера [11], в которых учитываются три варианта психологических характеристик агентов: сдача в плен, уклонение от борьбы с возможным ее возобновлением и паническое дезертирство. Для первых двух вариантов используется модель ограниченного партнерства Шеллинга [13], для последней – пороговая модель конформного поведения Грановеттера [10].

Ключевые слова: коллективное поведение, пороговая модель, модель Ланчестера, модель Шеллинга, модель Грановеттера.

1. Введение

Динамическая *модель Ланчестера* [11] или закон Ланчестера о ходе сражения (combat) является инструментом теоретического прогноза результатов ведения боевых действий (warfare) [15]. В целях подтверждения теоретических результатов были проведены многочисленные исследования по идентификации этой модели по данным о реальных сражениях [8], [6], [9].

Модель Ланчестера описывает динамику истощения (attrition) численности воюющих сторон в зависимости от их показателей *эффективности* ведения боевых действий. Так, рассмотрим две сражающихся группы N_1 и N_2 . Пусть в начальный

---

[1] *Бреер Владимир Валентинович, кандидат технических наук* (*breer@live.ru*).

момент времени число солдат (далее их будем называть агентами) в соответствующих группах равно n_1 и n_2. Агрегированные показатели эффективности обозначим через коэффициенты $K_1, K_2 \in (0, +\infty)$, а количество оставшихся в живых агентов в момент времени $t \in [0, +\infty)$ соответственно через $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Динамическая модель Ланчестера описывает изменение количества живых агентов и имеет вид следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -K_2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -K_1 x_1 \\ x_1(0) = n_1, x_2(0) = n_2 \end{cases} .$$

Эта простейшая модель неоднократно модифицировалась в зависимости от типа боевых действий: применение артиллерии [15], партизанская или повстанческая войны [6], [12], возможность задействовать резервы [14], условия, приводящие к хаотическому поведению [7], учет иерархии и игровых составляющих [5]. В настоящей работе предлагается учесть психологические характеристики агентов. Для этого рассмотрены три возможных случая, показанные на Рис. 1:

1. Сдача в плен противнику;
2. Уклонение от борьбы с возможностью возврата;
3. Паническое дезертирство (конформное поведение).

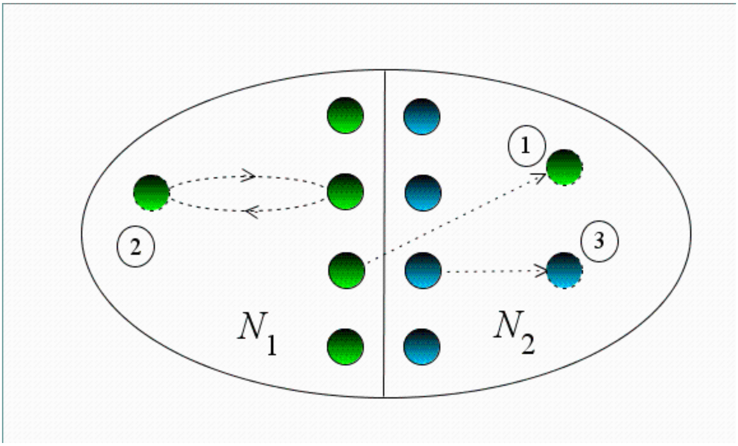

Рис. 1 Модели поведения агентов в ходе сражения

Для учета уклонения от борьбы была взята за основу *пороговая модель ограниченного окружения Шеллинга* (bounded neighborhood model [13]), которая в данном контексте состоит в следующем. У каждого агента существует порог по отношению к доле сражающихся «своих». Если эта доля больше порога, то агент вступает в сражение. Иначе он уклоняется от борьбы.

Учет такого поведения вносит поправки в модель (1), зависящие от функции распределения порогов уклонения от борьбы. Возможны два случая: уклоняющийся от борьбы может сдаться или не сдаться в плен. Эти случаи отражены в соответствующих уточнениях модели.

Для учета конформности за основу взята *модель порогового конформного поведения Грановеттера* [1], [2], [10]. В рассматриваемом контексте она имеет следующую содержательную интерпретацию. У агента существует порог по отношению к доле дезертирующих с поля боя «своих». Если эта доля больше порога, то агент также присоединяется к убегающим (здесь порог соответствует уровню его дисциплины).

Ниже последовательно рассматриваются модель сдачи в плен противнику, модель уклонения от борьбы с возможным возвратом к ней и модель панического дезертирства. В каждой из моделей численно решается система ОДУ для определенной функции распределения порогов и решения анализируются. Функция распределения выбирается так, чтобы ее параметры содержательно интерпретировались в соответствии с постановкой задачи.

2. Модель сдачи в плен противнику

Пусть в момент времени t, все агенты делятся на сражающихся $x_i\left(t\right)$, сдавшихся в плен $y_i\left(t\right)$ и убитых $n_i - x_i\left(t\right) - y_i\left(t\right)$ $i = 1,2$.

Уменьшение числа сражающихся в момент времени $\dot{x}_i$, $i = 1,2$ зависит от:

1. Эффективного числа сражающихся противоположной группы $K_{3-i}x_{3-i}$, где K_{3-i} – эффективность ведения боя (согласно закону Ланчестера [11]).
2. Числа сдавшихся в плен агентов этой группы в момент времени $\dot{y}_i$.

Агент группы $N_i, i = 1,2$ вступает в борьбу или сдается в плен в зависимости от своего *порога*. Если доля сражающихся «своих» $\dfrac{x_i}{x_i + x_{3-i}}$ не меньше этого порога, то воин продолжает борьбу. Пусть функции распределения порогов агентов равны $F_i : \left[0,1\right] \to \left[0,1\right], i = 1,2$. Значит, величина $F_i\left(\dfrac{x_i}{x_i + x_{3-i}}\right)$ показывает долю агентов, готовых продолжать борьбу, а *изменение* числа уклоняющихся от борьбы в единицу времени $\dot{y}_i$, $i = 1,2$ зависит от числа сдающихся в плен $\left(1 - F_i\left(\dfrac{x_i}{x_i + x_{3-i}}\right)\right)x_i$.

Согласно сделанным предположениям динамику можно записать в следующем виде:

$$(2)\quad \begin{cases} \dot{x}_i = -K_{3-i}x_{3-i} - \dot{y}_i, i = 1,2 \\ \dot{y}_i = \left(1 - F_i\left(\dfrac{x_i}{x_i + x_{3-i}}\right)\right)x_i \\ x_1(0) = n_1, x_2(0) = n_2, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим в качестве функции распределения порогов бета функцию:

$$(3)\quad F_i(x) = I(x, \alpha_i, \beta_i) = \frac{\int_0^x z^{1-\alpha_i}(1-z)^{1-\beta_i}\,dz}{\int_0^1 z^{1-\alpha_i}(1-z)^{1-\beta_i}\,dz},$$

где $\alpha_i \in [0,\infty), \beta_i \in [0,\infty), i = 1,2$.

Выбор этого распределения обусловлен прозрачной содержательной интерпретацией параметров α_i, β_i, как величин соотношений «трусов» и «храбрецов» в распределении. Так, чем больше α_i, тем больше трусливых агентов в группе N_i. Чем больше β_i тем больше смелых агентов в группе N_i. Таким образом α_i − это степень *трусости*, а β_i − степень *храбрости*.

Пусть группа N_1 состоит из равного количества «трусов» и «храбрецов» ($\alpha_1 = \beta_1 = 0.2$), а группа N_2 − в основном из «трусов» ($\alpha_1 = 2.0, \beta_1 = 0.2$). Графики функций распределения (3) с указанными параметрами изображены на Рис. 2, где кривая зеленого цвета соответствует группе N_1, а синего − N_2.

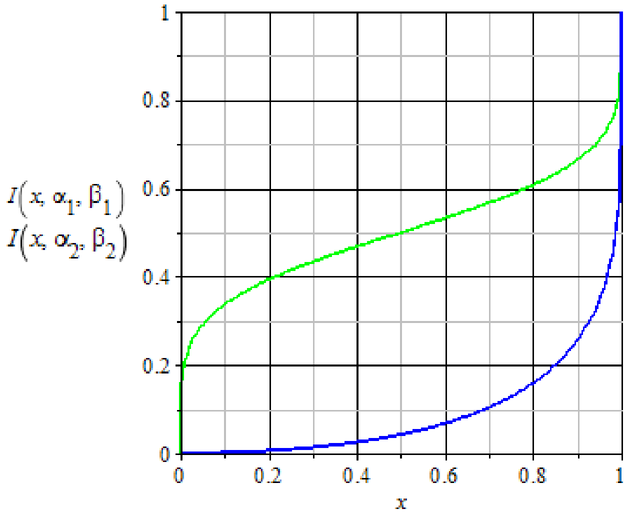

Рис. 2 Бета распределения порогов двух групп

Пусть первоначальное количество агентов одинаково: $n_1 = n_2 = 1000$, а также одинаковы эффективности борьбы: $K_1 = K_2 = 1.0$. Численно решая систему (2), получим графики зависимости числа живых $x_i(t) + y_i(t)$ и числа сдавшихся в плен $y_i(t)$, изображенные на Рис. 3. Из этих графиков видно, что в момент окончания сражения группа синих N_2 потерпела поражение – их осталось только 400 агентов в плену. В группе N_1 выжило 600 агентов, из которых 270 сдалось в плен.

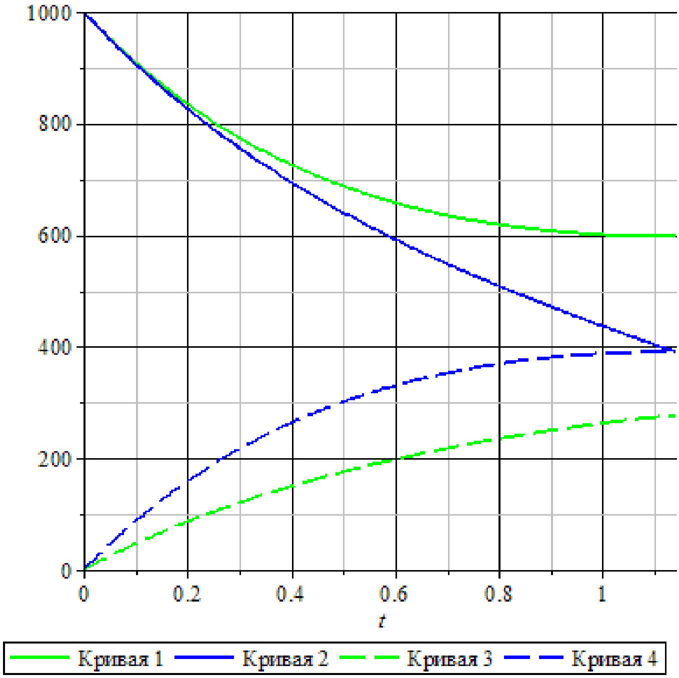

Рис. 3 Число живых: $x_1(t)+y_1(t)$ – кривая 1 и $x_1(t)+y_1(t)$ – кривая 2,число сдавшихся в плен: $y_1(t)$ – кривая 3, $y_2(t)$ – кривая 4 для модели сдачи в плен противнику

3. Модель уклонения от борьбы с возможным возвратом к ней

Пусть в момент времени t, все агенты делятся на сражающихся $x_i(t)$, уклоняющихся от борьбы $y_i(t)$ и убитых $n_i - x_i(t) - y_i(t)$, $i = 1,2$.

Уменьшение числа сражающихся в единицу времени $\dot{x}_i$, $i=1,2$ зависит от:

1. Эффективного числа сражающихся противоположной группы $K_{3-i}x_{3-i}$, где K_{3-i} – эффективность ведения боя (согласно закону Ланчестера [11]).
2. Числа уклоняющихся от борьбы этой группы в единицу времени $\dot{y}_i$.

Агент группы $N_i, i=1,2$ вступает в борьбу или уклоняется в зависимости от своего порога. Если доля сражающихся «своих» $\dfrac{x_i}{x_i+x_{3-i}}$ не меньше этого порога, то воин продолжает борьбу. Пусть функции распределения порогов агентов равны $F_i:[0,1]\to[0,1], i=1,2$. Значит величина $F_i\left(\dfrac{x_i}{x_i+x_{3-i}}\right)$ показывает долю агентов, готовых продолжать борьбу.

Таким образом, *изменение* числа уклоняющихся от борьбы в единицу времени $\dot{y}_i$, $i=1,2$ зависит от:

Числа уклоняющихся от борьбы $\left(1-F_i\left(\dfrac{x_i}{x_i+x_{3-i}}\right)\right)x_i$.

Числа уклонистов, готовых обратно вступить в бой $F_i\left(\dfrac{x_i}{x_i+x_{3-i}}\right)y_i$.

Согласно сделанным предположениям динамику истощения можно записать в следующем виде:

$$(4)\quad \begin{cases} \dot{x}_i=-K_{3-i}x_{3-i}-\dot{y}_i, i=1,2 \\ \dot{y}_i=\left(1-F_i\left(\dfrac{x_i}{x_i+x_{3-i}}\right)\right)x_i-F_i\left(\dfrac{x_i}{x_i+x_{3-i}}\right)y_i \\ x_1(0)=n_1, x_2(0)=n_2, y_1(0)=0, y_2(0)=0 \end{cases}.$$

Рассмотрим опять в качестве функции распределения порогов бета функцию (3) с параметрами, как в предыдущем разделе и графиками, изображенными на Рис. 2.

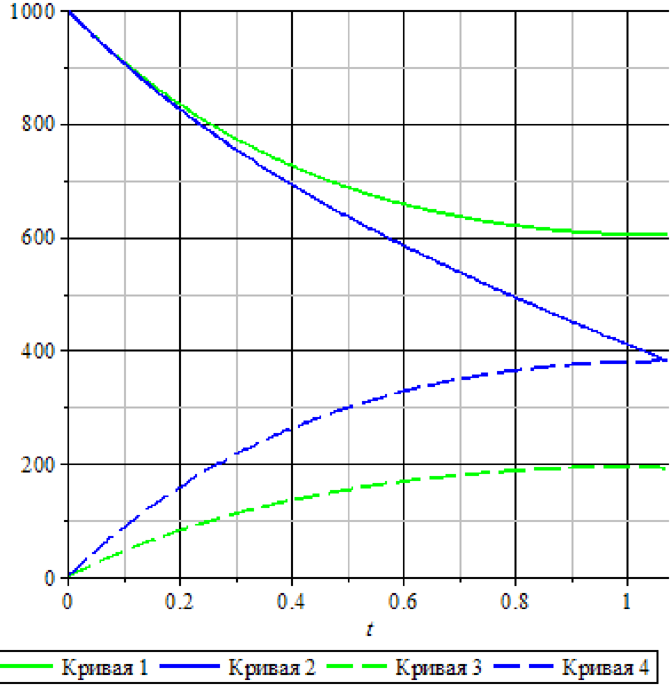

Рис. 4 Число живых: $x_1(t)+y_1(t)$ – кривая 1 и $x_1(t)+y_1(t)$ – кривая 2,число сдавшихся в плен: $y_1(t)$ – кривая 3, $y_2(t)$ – кривая 4 для модели уклонения от борьбы с возможным возвратом к ней

Пусть первоначальное количество агентов одинаково: $n_1 = n_2 = 1000$, а также одинаковы эффективности борьбы: $K_1 = K_2 = 1.0$. На Рис. 4 изображены соответствующие графики для модели уклонения от борьбы с возможным возвратом к ней.

Динамика и конечный результат для группы синих агентов N_2 почти не изменились по сравнению с моделью со сдачей в плен: их сдалось в плен 380 (вместо 400 в модели с пленением). Борьба длилась немного короче – 1,1 единицу времени по сравнению с 1,14 в модели с пленением. В живых агентов группы N_1 осталось столько же, а уклонилось от борьбы 200 вместо 270 в модели со сдачей в плен. Последние два эффекта связаны с тем, что у агентов была возможность вернуться в борьбу, видя, что их группа побеждает. Соответственно время сражения стало короче и в конечном итоге меньше уклонилось от борьбы, чем сдалось в плен в предыдущей модели.

Итак, видно, как выражается преимущество в смелости группы N_1 перед группой N_2 при равных значениях эффективностей $K_1 = K_2$ и начальных численностей $n_1 = n_2$. Справедливо поставить следующие вопросы: каким значением эффективности, или какой начальной численностью группы, можно компенсировать результат сражения в пользу этой группы, если в нее входят менее храбрые агенты. Иными словами, насколько должно быть больше агентов или выше эффективность вооружения, чтобы, командуя «трусами», с этим преимуществом можно было бы все же выиграть сражение.

Для ответов на эти вопросы рассмотрим два случая:

1. *Базисная* группа агентов, для которой выбраны следующие параметры $\alpha_1 = 0.5, \beta_1 = 2.0$, $n_1 = 1000$ и $K_1 = 1.0$. Т.е. это группа с преобладанием *смелых* агентов. Пусть α, β, K, n − соответствующие параметры группы, с которой она ведет борьбу. На левом графике Рис. 5 изображена так называемая *поверхность безразличия* $\{(\alpha,\beta) : K(\alpha,\beta) > 1\}$ для эффективности $K = K(\alpha,\beta)$ при одинаковом первоначальном количестве агентов $n = n_1 = 1000$. Если точка (α,β,K) лежит выше этой поверхности, то базисная группа проигрывает битву. Если точка (α,β,K) лежит ниже этой поверхности, то базисная группа выигрывает битву. Когда точка (α,β,K) находится на поверхности, то борьба заканчивается вничью – сражающиеся стороны истощают друг

друга и в живых остаются только уклонисты. На правом графике Рис. 5 изображена *поверхность безразличия* $\{(\alpha,\beta): n(\alpha,\beta) > 1000\}$ для начального числа агентов $n = n(\alpha,\beta)$ при фиксированной эффективности $K = K_1 = 1.0$. На гиперплоскостях $(\alpha,\beta,K=1)$ и $(\alpha,\beta,n=1000)$ базисная группа проигрывает

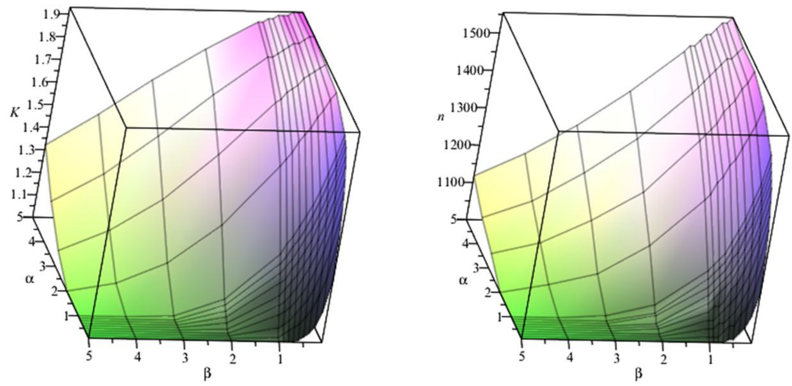

Рис. 5 Поверхности безразличия для базисной группы смелых агентов

2. Базисная группа агентов, для которой выбраны следующие параметры $\alpha_2 = 0.5, \beta_2 = 0.2$, $n_2 = 1000$ и $K_2 = 1.0$. Т.е. это группа со смешанным количеством трусливых и смелых агентов. Пусть α,β,K,n − соответствующие параметры группы, с которой она ведет борьбу. На левом графике Рис. 6, как и в случае 1, изображена поверхность безразличия для эффективности $K = K(\alpha,\beta)$ при одинаковом первоначальном количестве агентов $n = n_2 = 1000$. На правом графике Рис. 6 изображена поверхность безразличия для параметров (α,β,n) при фиксированной эффективности $K = K_2 = 1.0$. В данном случае гиперплоскости

$(\alpha, \beta, K = 1)$ и $(\alpha, \beta, n = 1000)$, где базисная группа проигрывает, занимают большую площадь, чем в случае 1. Это происходит из-за того, что в базисной группе присутствует больше трусливых агентов.

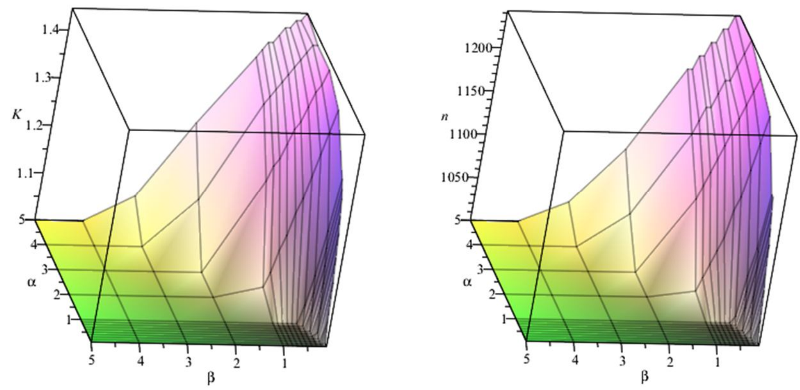

Рис. 6 Поверхности безразличия для базисной смешанной группы смелых и трусливых агентов

Таким образом, можно ставить и решать *задачи управления*: зная распределение порогов своих агентов, командир может принимать решения либо об увеличении их численности, либо выбирать способы более эффективного ведения боевых действий, что, возможно, сопряжено с дополнительными затратами и т.д.

4. Модель панического дезертирства

Пусть в момент времени t, все агенты делятся на сражающихся $x_i(t)$, дезертиров $y_i(t)$ и убитых $n_i - x_i(t) - y_i(t)$, $i = 1, 2$.

Уменьшение числа сражающихся в единицу времени $\dot{x}_i$, $i=1,2$ зависит от:

Эффективного числа сражающихся противоположной группы $K_{3-i}x_{3-i}$, где K_{3-i} – эффективность ведения сражения.

Числа дезертиров этой группы в единицу времени $\dot{y}_i$.

Агент группы $N_i, i=1,2$ продолжает в борьбу или дезертирует в зависимости от своего порога. Если доля уже покинувших поле боя дезертиров $\frac{y_i}{x_i+y_i}$ не меньше этого порога, то агент так же покидает поле сражения (интерпретация модели Грановеттера [3]). Пусть функции распределения порогов агентов равны $F_i:[0,1]\to[0,1], i=1,2$. Значит, величина $F_i\left(\frac{y_i}{x_i+y_i}\right)$ показывает долю агентов, готовых дезертировать. Таким образом, *изменение* числа уклоняющихся от борьбы в единицу времени $\dot{y}_i$, $i=1,2$ зависит от числа сдающихся в плен $F_i\left(\frac{y_i}{x_i+y_i}\right)x_i$.

Согласно сделанным предположениям динамику можно записать в следующем виде:

$$(5)\quad \begin{cases} \dot{x}_i=-K_{3-i}x_{3-i}-\dot{y}_i, i=1,2 \\ \dot{y}_i=F_i\left(\frac{y_i}{x_i+y_i}\right)x_i \\ x_1(0)=n_1, x_2(0)=n_2, y_1(0)=0, y_2(0)=0 \end{cases}.$$

Если $F_i(0)=0$, то изменения количества дезертиров не происходит, поэтому, чтобы увидеть изменение модели Ланчестера вследствие этого явления, будем считать что ненулевая доля агентов имеет нулевые пороги:

$$(6)\quad F_i(0)\neq 0, i=1,2.$$

Выберем в качестве функции распределения порогов распределение (3), модифицированное так, чтобы выполнялось условие (6):

(7) $F_i(x) = a_i + (1 - a_i) I(x, \alpha_i, \beta_i), a_i \in [0,1], i = 1,2$.

Функция вида (7) использовалась в моделях управления толпой (см. [3], [4]).

Выберем те же параметры бета распределения, что и в предыдущих моделях, но здесь они будут иметь другие содержательные интерпретации.: α_i − характеризует долю агентов в распределении (3), не подверженных панике; β_i − характеризует долю паникеров. Так группа N_1 состоит из равного количества «паникеров» и не подверженных панике агентов ($\alpha_1 = \beta_1 = 0.2$), а группа N_2 − в основном из не подверженных панике ($\alpha_1 = 2.0, \beta_1 = 0.2$). Для $a_1 = a_2 = 0.1$ графики распределения порогов (7) будут выглядеть, как показано на Рис. 7.

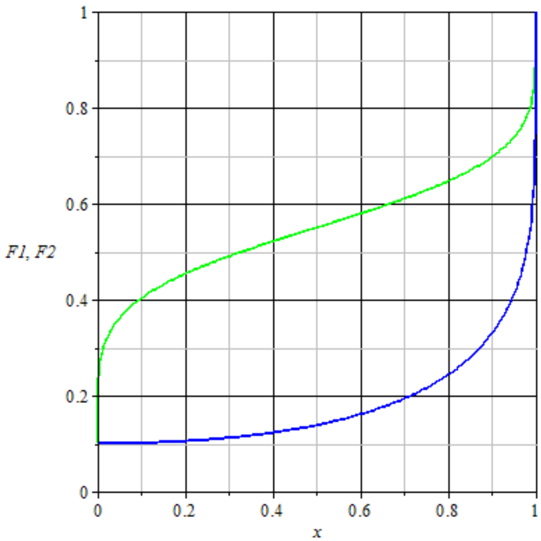

Рис. 7 Распределения порогов конформистов (7)

Пусть первоначальные количества агентов одинаковы: $n_1 = n_2 = 1000$, а также одинаковы эффективности борьбы: $K_1 = K_2 = 1.0$. На Рис. 8 изображены графики решения системы (5) модели с дезертирами с функциями распределения порогов (7) . Как и следовало ожидать, группа N_1 проиграла сражение, при этом дезертировало 225 агентов.

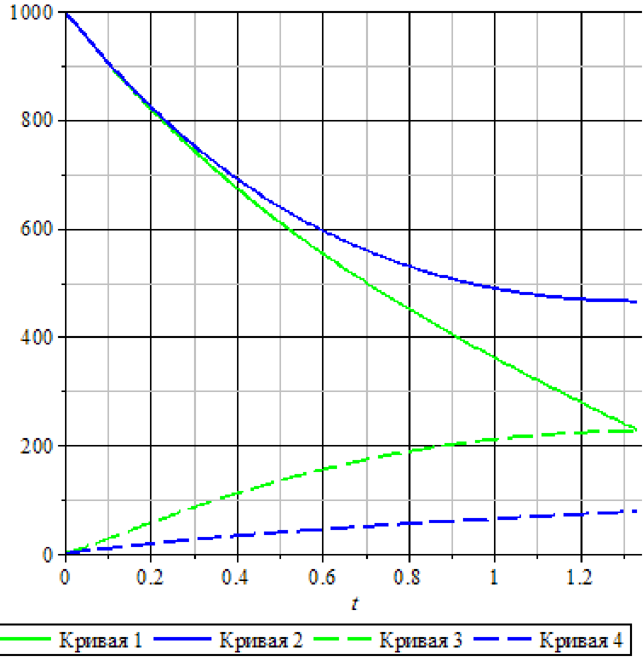

Рис. 8 Число живых: $x_1(t)+y_1(t)$ − кривая 1 и $x_1(t)+y_1(t)$ − кривая 2,число сдавшихся в плен: $y_1(t)$ − кривая 3, $y_2(t)$ − кривая 4 для модели конформного дезертирства

5. Заключение

Приведенные в статье модели модифицируют модель ведения боевых действий Ланчестера [11], учитывая психологические аспекты агентов воюющих сторон. Для этих целей выбраны две модели - Шеллинга [13] и Грановеттера [10], которые являются хрестоматийными для пороговых моделей социологии.

В результате проведенного исследования предложены варианты динамических систем, параметры которых содержательно интерпретируются в рамках описания боевых действий. После их численного решения при различных значениях параметров моделей, исследованы эффекты влияния смелости, трусости и паники на конечное соотношение численности оставшихся в живых агентов, сдавшихся в плен, уклонившихся от борьбы и дезертиров.

Представляется перспективным исследовать подобные эффекты и решить задачи управления для более сложных моделей истощения (attrition models), описывающих современные гибридные и/или сетецентрические методы организации и ведения боевых действий.

Список литературы

1. БРЕЕР В.В. *Теоретико-игровые модели конформного поведения.* // Автоматика и телемеханика. - 2012 г. № 10. - стр. 111-126.
2. БРЕЕР В.В., РОГАТКИН А.Д. *Вероятностная модель порогового поведения в многоагентных системах* // Автоматика и телемеханика. - 2015 г. № 8. - стр. 56-77.
3. БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А., РОГАТКИН А.Д. *Микро и макро модели управления толпой. Ч.1. Основы теории* // Проблемы управления. - 2014 г. № 5. - стр. 28-33.
4. БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А., РОГАТКИН А.Д. *Микро и макро модели управления толпой. Ч. 2. Идентификация и имитационные эксперименты* // Проблемы управления. - 2014 г. № 6. - стр. 45-51.
5. НОВИКОВ Д.А. *Иерархические модели военных действий* // Управление большими системами. - 2012 г. - 37. - стр. 25-62.

6. BLANK LARRY ENOMOTO CARL E., GEGAX DOUGLAS, MCGUCKIN THOMAS, SIMMONS CADE *A Dynamic Model of Insurgency: The Case of the War in Iraq* // Peace Economics, Peace Science, and Public Policy. - 2008 г. № 2 : V. 14. - стр. 1-28.
7. DEWAR JAMES A., GILLOGLY JAMES J., JUNCOSA M. L. *Non-Monotonicity, Chaos and Combat Models*. - Santa Monica, CA : RAND Corporation, 1991 г.
8. ENGEL J. H. *A Verification of Lanchester's Law // Journal of the Operations Research Society of America*. - May 1954 г. № 2 : Vol. 2. - стр. 163-171.
9. FRICKER RONALD D. JR. *Attrition Models of the Ardennes Campaign* // Naval Research Logistics. - 1998 г. - Vol. 45.
10. GRANOVETTER M. *Threshold Models of Collective Behavior* // AJS. - 1978 г. # 6 : Vol. 83. - pp. 1420-1443.
11. LANCHESTER F.W. *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Forth Arm* // Engineering 98. - 1914 г. - стр. 422-423&452-454.
12. SCHAFFER MARVIN B. *Lanchester Models of Guerrilla Engagements* // The Rand Corporation. - 1968 г.
13. SCHELLING THOMAS *Dynamic Models of Segregation* // Journal of Mathematical Sociology. - 1971 г. - Т. 1. - стр. 143-186.
14. SHEEBA P.S., GHOSE D. *Optimal resource partitioning in conflicts based on Lanchester (n, 1) attrition model* // American Control Conference. - 14-16 June 2006.
15. TAYLOR JAMES G.. BROWN GERALD G. *Annihilation Prediction for Lanchester-Type Models of Modern Warfare* // Operations Reseach. - July-August 1983 г. # 4 : Т. 31. - стр. 752-771.

Article Title, перевод названия на английский

ARTICLE TITLE, THRESHOLD MODELS OF WARFARE

Breer Vladimir, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., (breer@live.ru).

Abstract: *Modified attrition models of combat Lanchester's law [11] are explored. In these models three options of psychological characteristics were taken into account: surrender to enemy, deviation from combat with probable return and panic desertion. First two options use the model of bounded neighborhood, introduced by Schelling*

[13]. The last option, panic desertion, uses the model of threshold conformal behavior by Granovetter [10].

Keywords: collective behavior, threshold model, Lanchester's model, Schelling's model, Granovetter's model.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии ...заполняется редактором…

Поступила в редакцию ...заполняется редактором…
Опубликована ...заполняется редактором…