УДК 336.6
ББК 65.05

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕТОЧНОСТИ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ «ЗАТРАТЫ-ВЫПУСК»

Романов Б.А.[1]
(*"МАТИ" Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского*)

В статье выполняется анализ влияния не точности параметров в модели «затраты-выпуск». В качестве параметров модели рассматриваются коэффициенты прямых материальных затрат и объемы производства конечной продукции. Влияние неточности параметров определяется на основе трансформации детерминированной модели в стохастическую. Неточность параметров в стохастической модели задается в виде функций их распределений. Решением на модели в стохастической постановке являются функции распределения производства продукции, зависящие от заданных функций распределений параметров.

Ключевые слова: модель «затраты-выпуск», оптимизационная модель, стохастическое программирование, неточность параметров.

1. Введение

Статья посвящена анализу влияния неточности параметров в модели «затраты-выпуск». В этой модели параметры не редко являются в значительной степени не точными (неопределенными). Поэтому важно оценить в какой

[1]*Романов Борис Александрович, кандидат технических наук, доцент (boris094@mail.ru)*

степени эта неопределенность влияет на выходные показатели модели, их точность, надежность или неопределенность. Это определяет важность и актуальность данного исследования.

Этой проблеме уделялось значительное внимание в советский период. В том периоде по рассматриваемой теме были опубликованы многочисленные работы. За недостатком места упомянем только исследования [4,5,7,11]. Автор данной статьи использовал результаты этих работ в своих исследованиях. В ходе перестройки 90-х годов эти исследования были свернуты по известным причинам. В данной статье сделана попытка продолжить и далее развить и обобщить эти исследования.

Математическая модель «затраты-выпуск» в статической форме записывается в виде [6]:

(1) $x = Ax + y$,

где x – вектор валового производства продукции отраслей;

y – вектор производства конечной продукции отраслей;

A – матрица коэффициентов прямых материальных затрат на производство продукции отраслей размерности $N * N$;

N – число отраслей модели «затраты-выпуск».

В векторно-матричном уравнении (1) векторы рассматриваются как вектор-столбцы, а вектор-столбец умножается на матрицу справа.

2. Влияние неточности матрицы коэффициентов прямых затрат на валовой выпуск продукции отраслей

Важной проблемой при анализе модели «затраты-выпуск» является неопределенность (неточность) значений исходных параметров, в первую очередь матрицы коэффициентов прямых затрат.

Уравнение (1) в векторно-матричной форме связывает валовое производство продукции с производством конечной продукции. Это уравнение можно переписать в виде:

$$x = By,$$

где $B = (I - A)^{-1}$;

I - диагональная матрица, состоящая из единиц.

Рассмотрим влияние не точности параметров - матрицы A и вектора производства конечной продукции y на производство валовой продукции отраслей. Вектор x является функцией матрицы B и вектора y. Матрица B является в свою очередь, функцией матрицы A, поэтому исходными неточными параметрами будем считать элементы матрицы A. Чтобы отразить неточность параметров, представим их в виде сумм средних значений и случайных изменений, которые будем считать центрированными величинами:

$$y = \overline{y} + \Delta y; \ A = \overline{A} + \Delta A.$$

Матрицу B можно представить в виде:

$$B = (I - \overline{A} - \Delta A)^{-1}.$$

Если предположить, что интервалы случайных изменений матрицы A малы, то можно разложить матрицу $(I - \overline{A} - \Delta A)^{-1}$ по малому параметру ΔA. Ограничиваясь тремя членами разложения, имеем:

$$B \cong \overline{B} + \overline{B}\Delta A\overline{B} + \overline{B}\Delta A\overline{B}\Delta A\overline{B},$$

где $\overline{B} = (I - \overline{A})^{-1}$.

Тогда вектор x запишем в виде

$$x = By = (\overline{B} + \overline{B}\Delta A\overline{B} + \overline{B}\Delta A\overline{B}\Delta A\overline{B})(\overline{y} + \Delta y).$$

Для определения влияния неточности параметров на вектор x можно использовать числовые характеристики распределения этого вектора, такие как математическое ожидание, дисперсию и др. Предполагая случайные величины A и y независимыми (нет никаких оснований предполагать обратное) и используя теоремы о числовых характеристиках случайных величин [2], получаем, что математическое ожидание случайной величины x, обозначаемое $M[x]$, будет равно:

$$M[x] \cong \bar{B}\bar{y} + M[\bar{B}\Delta A\bar{B}\Delta A\bar{B}\bar{y}].$$

При выводе этой формулы учтено, что слагаемые этого выражения, включающие случайные величины ΔA и Δy или их произведения ввиду центрированности равны нулю. Кроме того, пренебрежем слагаемым $M[\bar{B}\Delta A\bar{B}\Delta A\bar{B}\Delta y]$, ввиду его малости выше второго порядка.

В работе [4] показано, что

$$M[\Delta A\bar{B}\Delta A] = M\left[\sum_{k,l}\Delta A_{ik}\bar{B}_{kl}\Delta A_{lj}\right] = M\left[\Delta A_{ij}\bar{B}_{ji}\Delta A_{ij}\right] +$$

$$+ \sum_{\substack{k,l \\ k\neq j, l\neq i}} M\left[\Delta A_{ik}\bar{B}_{kl}\Delta A_{ik}\right] = \bar{B}_{ji}D[\Delta A_{ij}] = \bar{B}^T \circ D[\Delta A],$$

где $\circ$ – знак поэлементного произведения матриц $\bar{B}^T$ и $D[\Delta A]$ (произведение в смысле Адамара [4]);

$\bar{B}^T$ – транспонированная матрица $\bar{B}$.

В этой формуле учтено, что математическое ожидание произведений смешанных сомножителей ввиду центрированности случайных изменений матрицы A равно нулю:

$$M[\Delta A_{ik}\bar{B}_{kl}\Delta A_{ik}] = 0.$$

В силу $M[\bar{B}\Delta A\bar{B}\Delta A\bar{B}\bar{y}] = \bar{B}\,M[\Delta A\bar{B}\Delta A]\bar{B}\bar{y}$ получаем, что выражение для $M[x]$ примет вид:

$$M[x] = \bar{B}\bar{y} + \bar{B}\,(\bar{B}^T \circ D[\Delta A])\bar{B}\,\bar{y}.$$

Из этой формулы можно сделать важный вывод, что математическое ожидание валового производства продукции x отраслей в принятом приближении не зависит от неточности вектора выпуска конечной продукции y, а зависит только от неточности матрицы A.

Математическое ожидание случайной величины x равно его среднему детерминированному значению, обозначаемому $\bar{x}$ плюс добавка, определяемая только случайными значениями матрицы ΔA:

$$M[x] = \bar{x} + \Delta M[x],$$

где $\Delta M[x] = \bar{B}\,(\bar{B}^T \circ D[\Delta A])\bar{B}\,\bar{y}$.

Дисперсия случайной величины x, обозначаемая $D[x]$, вычисляется по формуле:

$$D[x] = M[x - M[x]]^2 =$$

$$M[\bar{B}\bar{y} + \bar{B}\Delta A\bar{B}\bar{y} + \bar{B}\Delta A\bar{B}\Delta A\bar{B}\bar{y} +$$

$$+ \bar{B}\Delta y + \bar{B}\Delta A\bar{B}\Delta y + \bar{B}\Delta A\bar{B}\Delta A\bar{B}\Delta y - \bar{x} - \Delta M[x]]^2 \cong$$

$$M[(\bar{B}\Delta A\bar{B}\bar{y})^2].$$

При выводе этой формулы учтено, что слагаемые этого выражения, включающие случайные величины ΔA и Δy или их произведения, в силу центрированности равны нулю. Кроме того, пренебрегаем слагаемыми, включающими множители $M[\bar{B}\Delta A\bar{B}\Delta A\bar{B}\Delta y]$, учитывая их малость выше второго порядка.

Преобразуя выражение $D[x]$, получаем

$$M[(\bar{B}\Delta A\bar{B}\bar{y})^2] == M[(\sum_{k,l} \bar{B}_{ik}\,\Delta A_{kl}\,\bar{B}_{lj}\,\bar{y}_j)^2] =$$

$$= \sum_{k,l} \bar{B}_{ik}^2 D[\Delta A_{kl}]\bar{B}_{lj}^2 \bar{y}_j^2 .$$

3. Влияние неточности матрицы коэффициентов прямых затрат, векторов производственных мощностей и выпуска фиксированного объема конечной продукции на объем выпуска конечной продукции

В практических расчетах в уравнении (1) вектор y обычно представляют в виде суммы векторов, представляющих собой выпуск или поступление (например, в случае импорта) того или иного вида конечной продукции. Такое разделение полезно, если предполагается моделировать изменение выпуска конечной продукции. В этом случае возникают оптимизационные задачи. Для оптимизационной задачи нужно сформулировать ограничения и целевую функции.

Запишем уравнение (1) в следующем виде:

(2) $x = Ax + \hat{y} + y$,

где y – вектор фиксированного производства конечной продукции;

$\hat{y}$ – вектор изменяемой части производства конечной продукции;

Для вектора x сформулируем ограничение:

(3) $x \le p$,

где p – вектор производственных мощностей отраслей по производству валовой продукции.

Обозначим целевую функцию a - общий объем производства конечной продукции:

(4) $a = e\hat{y}$,

где e – вектор, состоящий из единиц.

Оптимизационную задачу сформулируем в виде: найти вектор x при условиях (2), (3) и доставляющий максимум скаляру a:

(5) $a \to max$

В условиях задачи (2)-(5) векторы рассматриваются как вектор-столбцы (кроме вектора e, представляющего вектор-строку), произведения векторов рассматриваются как скалярные, вектор-столбец умножается на матрицу справа.

Для упрощения анализа введем условия, которые не ограничивают общности задачи оценки влияния неточности параметров на выходной показатель - скаляр a, но значительно упрощают алгоритм получения решения:

(6) $\widehat{y} = qa$,

где q – вектор пропорций (долей) от ее общего объема изменяемой части производства конечной продукции.

Неточными параметрами будем считать матрицу A, векторы y и p.

Вектор p представим в виде суммы средних значений и случайных изменений на заданном интервале, которые также будем считать центрированными:

$$p = \overline{p} + \Delta p .$$

Учет не точности параметров в задаче (2)-(6) можно рассматривать как задачу пассивного стохастического программирования [11]. В этой постановке требуется найти функцию распределения целевой функции a и ее числовые характеристики как функцию распределения случайных параметров. Неточность элементов матрицы A рассматривалась ранее в [4], а стохастическая задача подобного типа, но с ограничением только по производственным мощностям отраслей в рамках модели межотраслевого баланса, исследовалась в [5]. Полученные ниже выводы являются обобщением и развитием работ [4].

В детерминированной постановке решение задачи (2)-(6) было получено в [7]. В стохастической постановке эта задача исследовалась в работе [5]. Рассмотрим сначала детерминированную постановку. В этом случае решение записывается в виде:

$$max\, a = \min_i a_i ,\ i = 1,..., N , \text{ где}$$

(7) $a_i = \dfrac{[p - By]_i}{[Bq]_i} ,\ i = 1,..., N .$

Трансформацию решения из детерминированной постановки в стохастическую можно выполнить, подставив неточные параметры p, y и A в формулу (7) вычисления величин a_i:

$$a_i = \frac{[\bar{p} + \Delta p - (\bar{B} + \bar{B}\Delta A\bar{B})(\bar{y} + \Delta y)]_i}{[(\bar{B} + \bar{B}\Delta A\bar{B})q]_i}.$$

Пренебрегая величиной $\bar{B}\Delta A\bar{B}\Delta y$, представляющей второй порядок малости, после преобразований получаем:

$$a_i = \frac{[\bar{p} - \bar{B}\bar{y}]_i + [\Delta p - (\bar{B}\Delta y + \bar{B}\Delta A\bar{B}\bar{y})]_i}{\left[1 + \frac{(\bar{B}\Delta A\bar{B}q)_i}{(\bar{B}q)_i}\right](\bar{B}q)_i}.$$

Поскольку элементы матрицы $\bar{B}\Delta A\bar{B}$ малые величины, то сомножитель

$\dfrac{1}{1 + \dfrac{(\bar{B}\Delta A\bar{B}q)_i}{(\bar{B}q)_i}}$ можно разложить в ряд по малому параметру.

Ограничиваясь двумя членами разложения, получим

$$\frac{1}{1 + \frac{(\bar{B}\Delta A\bar{B}q)_i}{(\bar{B}q)_i}} \cong 1 - \frac{(\bar{B}\Delta A\bar{B}q)_i}{(\bar{B}q)_i}.$$

Подставляя это разложение в выражение a_i получаем:

$$a_i = \frac{[\bar{p} - \bar{B}\bar{y}]_i}{(\bar{B}q)_i} + \frac{[\Delta p - (\bar{B}\Delta y + \bar{B}\Delta A\bar{B}\bar{y})]_i}{(\bar{B}q)_i} -$$

$$- \frac{\{[\bar{p} - \bar{B}\bar{y}]_i + [\Delta p - (\bar{B}\Delta y + \bar{B}\Delta A\bar{B}\bar{y})]_i\}(\bar{B}\Delta A\bar{B}q)_i}{(\bar{B}q)_i^2}.$$

Как видно из этого выражения, функция случайной величины $a_i, i = 1,..., N$ от случайных параметров в данной стохастической модели сводится к функции этой величины в модели с детерминированной постановкой с учетом двух поправочных слагаемых, обусловленных случайным характером величин p, y и A.

Тогда случайную величину $max\, a$ можно представить в виде суммы детерминированного значения и поправок, обусловленных случайными возмущениями:

$$max\, a = \min_i a_i = \bar{a} + \min_i \Delta a_i \text{, где}$$

$$\bar{a} = \min_i \frac{[\bar{p} - \bar{B}y]_i}{(\bar{B}q)_i}; \; \Delta a_i = \frac{[\Delta p - (\bar{B}\Delta y + \bar{B}\Delta A\bar{B}\bar{y})]_i}{(\bar{B}q)_i} -$$

$$- \frac{\{[\bar{p} - \bar{B}\bar{y}]_i + [\Delta p - (\bar{B}\Delta y + \bar{B}\Delta A\bar{B}\bar{y})]_i\}(\bar{B}\Delta A\bar{B}q)_i}{(\bar{B}q)_i^2}.$$

Рассмотрим формулу расчета функции распределения случайной величины $\min_i \Delta a_i$. Для удобства обозначим величину Δa_i через a_i. Полагая, что все случайные параметры задачи независимы, получим, что величины a_i также независимы и функцию распределения $F(a)$ случайной величины a можно записать в виде [3]:

$$F(a) = 1 - \prod_{i=1}^{N} [1 - F_i(a)],$$

где $F_i(a)$ – функция распределения случайной величины a_i.

Введем обозначения $a_i^- = min\, a_i$, $a_i^+ = max\, a_i$. Интервалы от a_i^- до a_i^+ представляют собой отрезки, на которых может реализоваться некоторое случайное значение величины a_i. Упорядочим эти отрезки по возрастанию величин a_i^- и заново перенумеруем образовавшуюся последовательность отрезков. Если эти отрезки перекрывают друг друга, то интервал, начиная от $\min_i a_i^-$ до $\max_i a_i^+$, представляет собой отрезок, на котором может реализоваться случайное значение величины a. Если для некоторого i значение a_i^- будет превосходить значение a_{i-1}^+, то отрезки начиная с этого значения i можно исключить из рассмотрения. Это доказывается тем, что случайные значения величины a на этих отрезках всегда больше, чем на отрезках первой группы, тогда как в задаче требуется найти ее минимальное значение. Иными словами, полная группа элементарных событий реализуется только на отрезках первой группы, которые представляют собой группу перекрываемых между собой отрезков.

Поскольку значения случайных величин $a_i, i = 1,\dots,N$ распределены на конечных интервалах, то функцию распределения случайной величины a можно переписать так:

$$0 \text{ } при \text{ } a < a_1^-;$$

$$F(a) = 1 - \prod_{i=1}^{k} [1 - F_i(a)] \text{ } при \text{ } a_k^- \le a < a_{k+1}^-;$$

$$1 \text{ } при \text{ } a \ge a_{m+1}^-,$$

где m – индекс члена упорядоченной по возрастанию и соответственно перенумерованной последовательности $\{a_i^-\}$, $i = 1,\dots,m+1$ причем $a_{m+1}^- = \max_i\{a_i^+\}$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины a вычисляются по формулам:

$$M[a] = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_{\bar{k}}}^{a_{\bar{k}+1}} a \frac{\partial F(a)}{\partial a} da ;$$

$$D[a] = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_{\bar{k}}}^{a_{\bar{k}+1}} (a - M[a])^2 \frac{\partial F(a)}{\partial a} da .$$

В подинтегральных выражениях величину $\frac{\partial F(a)}{\partial a} da$ можно записать в виде $dF(a)$. Тогда эти выражения можно представить в виде

$$M[a] = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_{\bar{k}}}^{a_{\bar{k}+1}} a\, dF(a) ;$$

$$D[a] = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_{\bar{k}}}^{a_{\bar{k}+1}} (a - M[a])^2 dF(a) .$$

После интегрирования $M[a]$ и $D[a]$ по частям [10] получаем формулы

$$\int a dF(a) = aF(a) - \int F(a) da ;$$

$$\int (a - M[a])^2 dF(a) = (a - M[a])^2 F(a) - 2\int (a - M[a]) F(a) da .$$

Используя эти формулу и подставляя $F(a)$ в выражения $M[a]$ и $D[a]$, получим:

$$M[a] = \sum_{k=1}^{m} a_{\overline{k+1}} [1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - F_i(a_{\overline{k+1}})] -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} a_{\bar{k}} [1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - F_i(a_{\bar{k}})] - \sum_{k=1}^{m} \int_{a_{\bar{k}}}^{a_{\bar{k}+1}} [1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - F_i(a)] da ;$$

$$D[a]=\sum_{k=1}^{m}(a_{k+1}^{-}-M[a])^{2}[1-\prod_{i=1}^{k}(1-F_{i}(a_{k+1}^{-})]-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}(a_{k}^{-}-M[a])^{2}[1-\prod_{i=1}^{k}(1-F_{i}(a_{k}^{-})]-$$

$$-2\sum_{k=1}^{m}\int_{a_{k}^{-}}^{a_{k+1}^{-}}(a-M[a])[1-\prod_{i=1}^{k}(1-F_{i}(a)]da\,.$$

Вывод формул математического ожидания и дисперсии в общем виде представляет собой сложную задачу. Для упрощения рассмотрим два частных случая решения этой задачи. В частном случае 1: $m=1$ и $a_{2}^{-}=a_{1}^{+}$. В частном случае 2 первые m $(m>1)$ членов упорядоченной по возрастанию последовательности $\{a_{i}^{-}\}$ равны между собой, т.е. $a_{i}^{-}=a_{1}^{-}$, $i=1,\dots,m$ и, кроме того, $a_{m+1}^{-}=a_{1}^{+}$.

В частном случае 1 функция распределения принимает вид

0 *при* $a<a_{1}^{-}$;

$F(a)=F_{1}(a)$ *при* $a_{1}^{-}<a<a_{1}^{+}$;

1 *при* $a\geq a_{1}^{+}$,

и в частном случае 2:

0 *при* $a<a_{1}^{-}$;

$F(a)=1-[1-F_{1}(a)]^{m}$ *при* $a_{1}^{-}<a<a_{1}^{+}$;

1 *при* $a\geq a_{1}^{+}$.

Соответственно формулы математического ожидания и дисперсии случайной величины a в частном случае 1 имеют вид:

$$M[a] = a_1^+ F_1(a_1^+) - a_1^- F_1(a_1^-) + \int_{a_1^-}^{a_1^+} F_1(a)da;$$

$$D[a] = (a_1^+ - M[a])^2 F_1(a_1^+) - (a_1^- - M[a])^2 F_1(a_1^-) -$$

$$2\int_{a_1^-}^{a_1^+} (a - M[a])F_1(a)da.$$

и в частном случае 2:

$$M[a] = a_1^+[1-(1-F_1(a_1^+))^m] -$$

$$-a_1^-[1-(1-F_1(a_1^-))^m] - \int_{a_1^-}^{a_1^+} [1-(1-F_1(a))^m]da;$$

$$D[a] = (a_1^+ - M[a])^2[1-(1-F_1(a_1^+))^m] -$$

$$-(a_1^- - M[a])^2[1-(1-F_1(a_1^-))^m] -$$

$$-2\int_{a_1^-}^{a_1^+} (a - M[a])[1-(1-F_1(a))^m]da.$$

Частный случай 1 соответствует такому состоянию, когда хотя бы одно ограничение модели (в данном случае ограничением является вектор p) значительно разбалансировано по отношению к максимизации целевой функции, а разброс параметров так относительно мал, что интервалы первых двух упорядоченных по возрастанию отрезков величин a_i, $i = 1,...,m$ не пересекаются. Это означает, что множество отрезков распределения величины a можно представить на числовой оси в виде первого отдельного отрезка, который не пересекается с другими отрезками, что и отражено в приведенных выше формулах для математического ожидания и дисперсии величины a.

Частный случай 2 решения рассматриваемой задачи соответствует такому состоянию, когда ограничения задачи приближенно сбалансированы по отношению к максимизации целевой функции. При этом не точность параметров такова, что отрезки распределения величин a_i, $i = 1,...,m$, соответствующие крайним значениям не точности параметров мало отличаются одно от другого. Это означает, что случайные значения величины a распределяются на отрезке, который представляет собой наложение m отрезков, минимальные и максимальные значения, которых мало отличаются друг от друга. Поскольку отрезки примерно одинаковые, то в качестве расчетных значений можно взять минимальное и максимальное значения первого отрезка, что и отражено в приведенных выше формулах для математического ожидания и дисперсии величины a для этого частного случая.

Опыт показывает, что многие практические задачи описываются двумя рассмотренными частными случаями. Для этих частных случаев функция распределения случайной величины a включает функцию $F_1(a)$ или степенную функцию этой функции. Остается найти эту функцию.

Рассмотрим сначала равномерное распределение исходных случайных параметров модели. В практических случаях параметры - векторы Δy, Δp и матрица ΔA обычно включают такое количество элементов, которое достаточно, чтобы их суперпозиция при любом законе распределения принимала нормальный вид (более 10-15 элементов) [2]. Поскольку величина a_1 является суперпозицией параметров $\Delta y, \Delta p$ и ΔA, то функция распределения величины $F_1(a) = F(a_1)$ будет нормальной.

Числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсию) в этом случае можно получить на основе теорем о числовых характеристиках [2], не используя функции распределения. Для более углубленного исследования требуется использовать функцию распределения, которую можно вычислить по вышеприведенным формулам.

В случае использования нормального распределения исходных случайных параметров Δy, Δp и ΔA, функция $F_1(a)$ также будет распределена по нормальному закону. Тогда функцию $F_1(a)$ как функцию случайных параметров Δy, Δp и ΔA в случае как равномерного так и нормального распределения можно записать в виде

$$F_1(a) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \int_{a_1^-}^{a_1^+} exp[-\frac{(a-\bar{a})^2}{2\sigma_1^2}]da\,,$$

где $\bar{a} = \dfrac{\bar{p} - \bar{B}y}{\bar{B}q}$;

$$\sigma_1^2 = \frac{D[\Delta p] - (\bar{B}\circ\bar{B})D[\Delta y] - (\bar{B}\circ\bar{B})D[\Delta A](\bar{B}\circ\bar{B})(\bar{y}\circ\bar{y})}{(\bar{B}\circ\bar{B})(q\circ q)};$$

$\circ$ – знак поэлементного произведения матриц и векторов (произведение в смысле Адамара).

Интеграл в выражении $F_1(a)$ не берется в элементарных функциях. Поэтому для его вычисления используют специальные функции (интегралы вероятностей), для которых составлены таблицы, в частности интеграл вероятностей. Приближенно можно взять этот интеграл, если использовать вместо интеграла вероятностей логистическую функцию. В работе [9] доказано, что логистическая функция отличается от интеграла вероятностей на всем интервале ее значений не более, чем на 1%. В работе [8] для взятия интеграла, включающего функцию $F_1(a)$, была использована логистическая функция. В результате удалось выполнить интегрирование (используя ряд упрощений) и получить аналитические выражения математического ожидания и дисперсии величины a для указанных двух частных случаев решений задачи, которые здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Представляет также интерес выявить влияние отдельных случайных параметров на общий результат. В частности оценить влияние неточности матрицы A по сравнению с не точностью параметров y и p. Если в выражении величин a_i считать случайными только параметры y и p, в результате получим

$$a_i = \frac{[\overline{p} - B\overline{y}]_i}{[Bq]_i} + \frac{[\Delta p - B\Delta y]_i}{[Bq]_i}.$$

Также как и в общем варианте случайных параметров, в данном варианте случайная величина a представляет собой суперпозицию слагаемых с случайными величинами Δp и Δy. Поскольку слагаемые со случайными величинами Δy представляют сумму, которая на практике превышает величину, необходимую для аппроксимации распределения нормальным законом, то при любом виде распределений входящих в нее случайных параметров случайная величина a будет распределена по нормальному закону.

Отличие варианта случайных параметров Δp и Δy от общего варианта состоит в отличии только одного параметра нормального распределения - σ_1. В варианте со случайными параметрами Δp и Δy эта величина равна

$$\sigma_1^2 = \frac{D[\Delta p] - (\overline{B} \circ \overline{B}) D[\Delta y]}{(\overline{B} \circ \overline{B})(q \circ q)}.$$

Сравнение величины σ_1 для общего варианта случайных параметров и варианта со случайными параметрами Δp и Δy показывает, что отличие состоит в числителе, который меньше для общего варианта на величину $(\overline{B} \circ \overline{B}) D[\Delta A] (\overline{B} \circ \overline{B})(\overline{y} \circ \overline{y})$.

Таким образом влияние не точности матрицы A по отношению к не точности параметров y и p уменьшает дисперсию случайной величины a. Стохастическая модель (2)-(6) ранее анализировалась в работе [5]. В этой работе в качестве случайного параметра рассматривался только вектор производственных мощностей отраслей p в рамках модели межотраслевого баланса с равномерным распределением и только частный случай 1. В данной работе выполнено следующее обобщение: в качестве случайных рассмотрен также вектор выпуска фиксированного объема конечной продукции y и матрица прямых материальных затрат A и проанализировано два частных случая распределения случайной величины a.

4. Примеры

Рассмотрим примеры расчета влияния не точности параметров p, y и A на выходные показатели - x и a. Автомобильная отрасль, которая в данном примере представлена сборочным предприятием, выпускающим 50 тыс. легковых автомобилей в год рассматривает проект увеличения производства, включающий три варианта: увеличение в 2, 4 и 10 раз. Для обеспечения расчетов информацией проводится сбор данных об отраслях, выполняющих поставки материалов, запасных частей и комплектующих узлов и деталей. В число этих данных входят:

- Перечень отраслей, поставляющих сборочному предприятию свою продукцию;
- Производственные мощности отраслей, поставляющих комплектующие изделия и узлы;
- Объемы поставок продукции отраслей на сборочное предприятие;
- Затраты продукции отраслей, приходящиеся на один рубль валовой продукции, выпускаемой сборочным предприятием.

Перечень отраслей, участвующих в производстве автомобилей:

- Отрасль машиностроения.

- Отрасль по производству автомобилей (сборочное предприятие).
- Отрасль по производству двигателей.
- Отрасль по производству проката.
- Отрасль по производству резинотехнических изделий.
- Отрасль, включающая электроснабжение, водоснабжение и газоснабжение.

Для краткости, в приводимых ниже таблицах исходных данных, отрасли, участвующие в производстве автомобилей, обозначаются порядковыми номерами из указанного выше перечня. Данные о производстве продукции приводятся в стоимостных единицах (рублях). Все приведенные ниже данные условные. Коэффициенты прямых материальных затрат продукции отраслей - матрица A и матрица B представлены в табл. 1-2.

Таблица 1. Коэффициенты прямых затрат - матрица A

1	2	3	4	5	6
0.209195	0.043131	0.016226	0.002378	0.007204	0.039843
0.021689	0.224980	0.020565	0.011217	0.023996	0.040242
0.025733	0.078656	0.162535	0.059694	0.115077	0.048657
0.024284	0.093403	0.087092	0.310624	0.280188	0.052209
0.003886	0.011053	0.006614	0.030768	0.360330	0.110894
0.008388	0.012877	0.012104	0.030621	0.118094	0.245430

Таблица 2. Матрица B

1	2	3	4	5	6
1.269094	0.077213	0.029411	0.013682	0.043305	0.080336
0.039344	1.302977	0.038107	0.032467	0.086835	0.089032
0.050617	0.148469	1.216515	0.128009	0.307477	0.143080
0.064328	0.218230	0.173377	1.513429	0.747465	0.240780
0.015585	0.042110	0.027267	0.088284	1.655575	0.254244
0.020641	0.040922	0.031794	0.077992	0.296334	1.379527

Для решения поставленной задачи сначала определяются объемы валового выпуска отраслей x по формуле $x = By$ для заданных значений вектора выпуска конечной продукции отраслей. Выпуск автомобилей увеличивается в 2, 4 и 10 по равнению с начальным, а выпуск фиксированного объема конечной продукции других отраслей остается без изменения. В табл. 3-4 представлены значения векторов x и y. Строка с обозначением Нач. означает выпуск конечной продукции в начальный момент, а строки с обозначениями 2, 4 и 10 означают увеличение выпуска автомобилей соответственно в 2, 4 и 10 раз.

Таблица 3. Валовой выпуск продукции отраслей x. Тыс. руб.

Выпуск	1	2	3	4	5	6
Нач.	153 306	109 025	65 208	87 238	555 018	546 118
2	255 500	181 670	67 333	89 048	559 860	551 081
4	459 887	326 960	71 582	92 668	569 542	561 009
10	1 073 048	762 829	84 330	103 529	598 590	590 792

Таблица 4. Выпуск конечной продукции отраслей y. Тыс. руб.

Выпуск	1	2	3	4	5	6
Нач.	29 256	55 753	33 624	21 098	255 588	336 297
2	29 256	103 495	33 624	21 098	255 588	336 297
4	29 256	207 218	33 624	21 098	255 588	336 297
10	29 256	560 256	33 624	21 098	255 588	336 297

Математическое ожидание валового выпуска продукции отраслей рассчитывается по формуле $M[x] = \bar{x} + \Delta M[x]$, которая состоит из двух слагаемых: слагаемого, получаемого из решения на детерминированной модели и слагаемого, определяемого случайным характером элементов матрицы A. Вычислим слагаемое $\Delta M[x]$. Для ее вычисления требуется знать матрицу дисперсий отрезков не точности элементов матрицы A. Вычисления проведены для двух вариантов отрезков не точности элементов матрицы A, соответствующих равномерному и нормальному распределениям. При равномерном распределении дисперсия принималась равной квадрату длины отрезка, деленной на 12, а для нормального деленной на 36. Были проведены несколько вариантов расчета величины $\Delta M[x]$ для различных значений отрезков не точности элементов матрицы A, в частности равных 30% и 15% от детерминированных значений. Результаты расчетов $\Delta M[x]$ для отрезков неточности элементов матрицы A, равных 30% и равномерного распределения приведены в табл. 5.

Таблица 5. Результаты расчета $\Delta M[x]$.Отрезки ΔA размером 30% от средних значений (равномерное распределение). Тыс. руб.

Выпуск	1	2	3	4	5	6
Нач.	7,025	13,928	10,821	26.545	100,858	469,529
2	7,137	14,149	10,993	26.967	102,466	477,011
4	7,198	14,271	11,088	27,200	103,349	481,123
10	7,603	15,073	11,711	28,728	109,154	508,147

Из табл. 5 видно, что слагаемое $\Delta M[x]$ составляет незначительную величину по сравнению с средними значениями вектора x. Расчеты также показали, что при уменьшении отрезков неточности значений элементов матрицы A от 30% до нуля это слагаемое далее уменьшается. Это показывает, что распределение вектора x практически не смещенное. Поэтому можно считать, что случайный характер значений элементов матрицы ΔA практически не влияет на значение математического ожидания валового выпуска продукции отраслей - вектора x.

Для выявления характера распределения вектора x рассчитана его дисперсия $D[x]$, которая определяет неточность вектора $\bar{x}$ с точки зрения размытости его распределения. В табл. 6-7 показаны величины $\sigma = \sqrt{D[x]}$ при отрезках не точности элементов матрицы A, равных 20% от детерминированных значений.

Таблица 6. Результаты расчета дисперсии σ. Отрезки ΔA размером 20% от средних значений (равномерное распределение). Тыс. руб.

Выпуск	1	2	3	4	5	6
Нач.	1270	2502	1436	1579	14515	15622
2	1284	6697	1447	1587	14521	15628
4	1297	9023	1458	1594	14527	15633
10	1466	24345	1601	1691	14605	15709

Таблица 7. Результаты расчета дисперсии σ. Отрезки ΔA размером 20% от средних значений (нормальное распределение) Тыс. руб.

Выпуск	1	2	3	4	5	6
Нач.	733	1445	829	911	8377	9018
2	741	3866	835	915	8380	9021
4	749	5209	842	919	8383	9024
10	846	14054	924	975	8428	9068

Из табл. 6 и 7 видно, что дисперсия величины x значительно уменьшается для нормального распределения исходных параметров. Поскольку функция случайной величины x представляет собой композицию многих случайных слагаемых, сравнимых по своему рассеиванию, то согласно теореме Ляпунова [2] закон ее распределения приближенно можно считать нормальным. Нормальное распределение практически укладывается на отрезке $\pm 3\sigma$. Количественно характер распределения величины x можно оценить на основе расчета вероятности попадания вектора x в отрезок равный $2\Delta x$ отклонения от вектора средних значений $\bar{x}$. Эта вероятность рассчитывается по следующей формуле. Вероятность попадания на участок длины $2\Delta x$ симметричный относительно центра рассеяния для нормального распределения равна [2]:

$$P(\left|x-\bar{x}\right| < \Delta x) = 2\Phi\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right) - 1,$$

где $\Phi(x)$ - интеграл вероятностей.

Заменяя интеграл вероятностей логистической функцией, получим следующую приближенную формулу для расчета этой вероятности:

$$(8)\quad P(\left|x-\bar{x}\right|<\Delta x)\cong 2\frac{exp\left(\frac{\Delta x}{\bar{\sigma}}\right)}{exp\left(\frac{\Delta x}{\bar{\sigma}}\right)+1}-1\text{, где }\bar{\sigma}=\frac{\sigma}{1,7}.$$

Результаты расчета по этой формуле для вероятности попадания вектора x в отрезок 10% от $\bar{x}$ при не точности исходных параметров - элементов матрицы A на отрезках 20% и 10% от их детерминированных значений для равномерного и нормального распределений исходных параметров представлены в табл. 8-11.

Таблица 8. Вероятности попадания x в отрезок 10% от $\bar{x}$. Отрезки ΔA размером 20% от средних значений (равномерное распределение)

Выпуск	1	2	3	4	5	6
Нач.	0,549058	0,565365	0,583582	0,670920	0,509686	0,473130
2	0,574644	0,476957	0,604639	0,684716	0,515852	0,479315
4	0,586199	0,461587	0,614357	0,691211	0,519149	0,482633
10	0,625285	0,432478	0,650040	0,716901	0,539155	0,502971

Таблица 9. Вероятности попадания x в отрезок 10% от $\bar{x}$. Отрезки ΔA размером 20% от средних значений (нормальное распределение)

Выпуск	1	2	3	4	5	6
Нач.	0,789031	0,804013	0,820043	0,887140	0,750626	0,711681
2	0,812269	0,715856	0,837681	0,896203	0,756887	0,718452
4	0,822298	0,698797	0,845498	0,900330	0,760200	0,722051
10	0,854112	0,665105	0,872480	0,915798	0,779796	0,743590

Таблица 10. Вероятности попадания x в отрезок 10% от $\bar{x}$. Отрезки ΔA размером 10% от средних значений (равномерное распределение)

Выпуск	1	2	3	4	5	6
Нач.	0,843802	0,856905	0,870696	0,925544	0,809367	0,773256
2	0,864038	0,777175	0,885584	0,932533	0,815064	0,779610
4	0,872618	0,761075	0,892082	0,935679	0,818066	0,782974
10	0,899171	0,728715	0,913991	0,947241	0,835644	0,802914

Таблица 11. Вероятности попадания x в отрезок 10% от $\bar{x}$. Отрезки ΔA размером 10% от средних значений (нормальное распределение)

Выпуск	1	2	3	4	5	6
Нач.	0,972574	0,976676	0,980641	0,992885	0,960250	0,944831
2	0,978771	0,946625	0,984521	0,994036	0,962448	0,947728
4	0,981165	0,939050	0,986084	0,994523	0,963581	0,949230
10	0,987702	0,922251	0,990772	0,996151	0,969867	0,957673

Из табл. 8-11 видно, что вероятность попадания вектора x в отрезок 10% от $\bar{x}$ при не точности элементов матрицы A 20% от детерминированных значений при равномерном законе распределения этих параметров варьируется от 0,432 до 0,716 (для равномерного распределения исходных параметров) и от 0,665 до 0,915 (для нормального распределения исходных параметров). Последнее значение показывает довольно высокую вероятность близости математического ожидания величины x к ее детерминированному значению $\bar{x}$. При уменьшении не точности элементов матрицы A до 10% вероятность попадания величины x в отрезок 10% от $\bar{x}$ будет практически достоверной как для равномерного, так и для нормального распределения параметров. Из табл. 8-11 видно также, что для равномерного распределения исходных параметров эти вероятности меньше, чем для нормального распределения, что вполне соответствует характеру этих распределений.

Далее приведены числовые примеры для оценки влияния неточности исходных данных в задаче определения максимального объема производства автомобилей сборочным предприятием. Рассматривался расчет выпуска автомобилей при вариантах увеличения производственных мощностей в 2, 4 и 10 раз. Для каждого варианта рассматривались два частных случая решения задачи (1)-(5): частный случай 1 – не сбалансированные производственные мощности; частный случай 2 – производственные мощности частично сбалансированы (для первых трех отраслей). Исходные данные представлены в табл. 12-13.

Таблица 12. Несбалансированные производственные мощности отраслей (частный случай 1). Тыс. руб.

Выпуск	1	2	3	4	5	6
Нач.	1 130 000	109 025	90 000	110 000	600 000	600 000
2	1 130 000	200 000	90 000	110 000	600 000	600 000
4	1 130 000	330 000	90 000	110 000	600 000	600 000
10	1 130 000	767 000	90 000	110 000	600 000	600 000

Таблица 13. Частично сбалансированные производственные мощности отраслей (частный случай 2). Тыс. руб.

Выпуск	1	2	3	4	5	6
Нач.	153 306	109 025	65 200	110 000	600 000	600 000
2	255 500	200 000	67 900	110 000	600 000	600 000
4	459 887	330 000	71 650	110 000	600 000	600 000
10	1 073 048	767 000	84 500	110 000	600 000	600 000

Выполнены расчеты математического ожидания $M[a]$ и дисперсии $D[a]$ величины a для нескольких вариантов неточности (неопределенности) параметров p, y и A. Ниже показаны результаты расчетов для отрезков не точности параметров p, y и A в размере 20% и 10% от их детерминированных значений при равномерном и нормальном их распределении для двух частных случаев решения задачи (1)-(5). Для не точностей свыше 20% от средних значений результаты становятся не достоверными.

Математическое ожидания $M[a]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_a = \sqrt{D[a]}$ величины a вычислялись по формулам, алгоритм вывода которых приведен выше. Эти формулы имеют весьма громоздкий вид и приведены для частных случаев 1 и 2 решения задачи в работе [8].

Вид распределений параметров p, y и A отражался значениями их дисперсий, которые вычислялись исходя из длины отрезков их неточности. Для равномерного распределения дисперсии равны квадрату длины отрезка, деленного на 12, а для нормального распределения квадрату длины отрезка, деленному на 36.

Результаты расчетов делятся на две группы. В первой группе в качестве неточных параметров рассматривались только векторы p, y. Во второй группе в качестве исходных неточных параметров вместе с векторами p, y рассматривалась также матрица A. На основе значений дисперсий параметров p, y и A рассчитывались величины σ_1 по формулам

$$\sigma_1^2 = \frac{D[\Delta p] - (\overline{B} \circ \overline{B}) D[\Delta y]}{(\overline{\overline{B}} \circ \overline{\overline{B}})(q \circ q)};$$

$$\sigma_1^2 = \frac{D[\Delta p] - (\overline{B} \circ \overline{B}) D[\Delta y] - (\overline{B} \circ \overline{B}) D[\Delta A] (\overline{B} \circ \overline{B})(\overline{y} \circ \overline{y})}{(\overline{\overline{B}} \circ \overline{\overline{B}})(q \circ q)}.$$

Первая из формул относится к первой группе, а вторая ко второй группе не точных параметров.

На основе этих данных по формуле (8) рассчитывались вероятности попадания величины a в отрезок равный $2\Delta a$, которые характеризуют размытость распределения величины a.

В качестве отрезка Δa принимался отрезок равный 10% от $M[a]$. Результаты расчетов представлены в табл. 14-21.

Таблица 14. Случайные параметры p и y

Равномерное распределение (не точность параметров 5%)							
Вы-пуск	σ_1	Частный случай 1			Частный случай 2		
		$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P	$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P
Нач.	720	58 541	1 724	0,6905	58 541	6 529	0,2200
2	1 309	131 853	3 846	0,6947	13 1853	13 707	0,2359
4	2 154	236 613	6 825	0,6997	236 613	25 053	0,2318
10	4 999	588 768	17 298	0,6915	588 768	56 234	0,2559

Таблица 15. Случайные параметры p и y

Нормальное распределение (не точность параметров 5%)							
Вы-пуск	σ_1	Частный случай 1			Частный случай 2		
		$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P	$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P
Нач.	416	58541	1680	0,7018	58541	5916	0,2424
2	756	131853	3757	0,7050	131853	11903	0,2700
4	1244	236613	6667	0,7100	236613	22229	0,2600
10	2886	588768	16976	0,6998	588768	46290	0,3076

Таблица 16. Случайные параметры p и y

Равномерное распределение (не точность параметров10%)							
Вы-пуск	σ_1	Частный случай 1			Частный случай 2		
		$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P	$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P
Нач.	1 442	61 328	3 453	0,4169	61 328	9 885	0,1538
2	2 618	138 131	7 703	0,4204	138 131	21 638	0,1582
4	4 308	247 880	13 802	0,4210	247 880	37 970	0,1617
10	9 999	616 804	34 074	0,4239	616 804	90 483	0,1687

Таблица 17. Случайные параметры p и y

Нормальное распределение (не точность параметров 10%)							
Вы-пуск	σ_1	Частный случай 1			Частный случай 2		
		$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P	$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P
Нач.	833	61 328	3 368	0,4261	61 328	8 976	0,1691

Нормальное распределение (не точность параметров 10%)							
Вы-пуск	σ_1	Частный случай 1			Частный случай 2		
		$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P	$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P
2	1 512	138 131	7 528	0,4290	138 131	19 426	0,1759
4	2 487	247 880	13 510	0,4290	247 880	33 785	0,1813
10	5 773	616 804	33 364	0,4318	616 804	78 613	0,1936

Таблица 18. Случайные параметры p, y и A

Равномерное распределение (не точность параметров 5%)							
Вы-пуск	σ_1	Частный случай 1			Частный случай 2		
		$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P	$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P
Нач.	724	58 541	1 724	0,6904	58 541	6 532	0,2203
2	1 312	131 853	3 846	0,6947	131 853	13 712	0,2358
4	2 156	236 613	6 826	0,6996	236 613	25 059	0,2317
10	5 002	588 768	17 298	0,6915	588 768	56 243	0,2558

Таблица 19. Случайные параметры p, y и A

Нормальное распределение (не точность параметров 5%)							
Вы-пуск	σ_1	Частный случай 1			Частный случай 2		
		$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P	$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P
Нач.	417	58 541	1 681	0,7017	58 541	5 919	0,2423
2	757	131 853	3 757	0,7050	131 853	11 907	0,2699
4	1 244	236 613	6 668	0,7100	236 613	22 232	0,2599
10	2 887	588 768	16 976	0,6998	588 768	46 296	0,3076

Таблица 20. Случайные параметры p, y и A

Равномерное распределение (не точность параметров 10%)							
Вы-пуск	σ_1	Частный случай 1			Частный случай 2		
		$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P	$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P
Нач.	1 452	61 330	3 455	0,4167	61 330	9 894	0,1537
2	2 628	13 8133	7 705	0,4203	13 8131	21 652	0,1581
4	4 318	247 881	13 804	0,4210	247 880	37 988	0,1617

Равномерное распределение (не точность параметров 10%)							
Вы-пуск	σ_1	Частный случай 1			Частный случай 2		
		$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P	$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P
10	10 009	616 806	34 076	0,4239	616 806	90 505	0,1687

Таблица 21. Случайные параметры p, y и A

Нормальное распределение (не точность параметров10%)							
Вы-пуск	σ_1	Частный случай 1			Частный случай 2		
		$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P	$M[a]$	$\bar{\sigma}_a$	P
Нач.	8 36	61 329	3 369	0,4260	61 329	8 984	0,1690
2	1 515	138 863	7 529	0,4289	138 131	19 436	0,1758
4	2 490	247 880	13 511	0,4290	247 880	33 796	0,1813
10	5 776	616 805	33 364	0,4318	616 805	78 626	0,1936

Анализ результатов расчетов в табл. 14-21 позволяет сделать следующие выводы. Математическое ожидание $M[a]$ по сравнению с детерминированным значением во всех вариантах неточности параметров до 10% от их средних значений завышается примерно ту же величину, что и не точность параметров. Это означает, что распределение максимального объема производства автомобилей является смещенным в сторону увеличения среднего значения и величина смещенности пропорциональна неточности параметров. Максимально допустимая неточность исходных параметров может быть не более 10% от их детерминированных значений. Неточность элементов матрицы A в пределах неточности параметров p и y практически не влияет на математическое ожидание и дисперсию величины a. Из этого следует, что критическими параметрами в отношении неточности их задания являются векторы p и y.

Критической также является сбалансированность производственных мощностей отраслей. Чем меньше их сбалансированность, тем меньше влияние на неточность результатов решения задачи (1)-(5). Наиболее благоприятным является случай, когда производственные мощности обеспечивающих отраслей по сравнению со сборочным предприятием имеют значительные резервы. При использовании нормального распределения исходных параметров по сравнению равномерным неточность результатов решения задачи (1)-(5), как и следовало ожидать, уменьшается, однако не так сильно, как можно было бы предположить.

Литература

1. БЕРЕЗИН С.А., ЛАВРОВСКИЙ Б.Л. *Вероятностные модели оптимизации.* Новосибирск, НГУ: Учебное пособие, 1980.- 52 с.
2. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Теория вероятностей.* – М.: Наука, 1969.- 572 с.
3. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С., ОВЧАРОВ Л.А. *Теория вероятностей*. – М.: Наука, 1969.- 368 с.
4. ЕРШОВ Э.Б. *Неопределенность информации и устойчивость решения статической модели планового межотраслевого баланса.* Сб. статей НИЭИ Госплана СССР. – М.: Экономика, 1967.- 356 с.
5. ЛАВРОВСКИЙ Б.Л. *Исследование свойств вероятностной модели межотраслевого баланса производственных мощностей*. – В кн. Оптимизационные и балансовые модели народного хозяйства. – Новосибирск, Наука, 1977.- 251 с.
6. ЛЕОНТЬЕВ В.В. *Избранные произведения в 3-х т*. -М.: Издательство «Экономика», 2006.
7. МАСАКОВ В.М. *Некоторые свойства моделей межотраслевого баланса производственных мощностей простейшего типа.* В сб.: Проблемы моделирования народного хозяйства. Ч. 3. – Новосибирск, ИЭ и ОПП, 1973.- 264 с.
8. РОМАНОВ Б.А. *Алгоритм исследования реализации предприятиями инвестиционного производственного проекта:* Монография.- М.:РИОР;ИНФРА-М, 2011.-392 с.
9. ТЮРИН Ю.Н. *Непараметрические методы статистики.* М.: Знание, 1978.
10. ФИХТЕНГОЛЬТЦ Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 1-3. – М.: Физматгиз, 1958.- 656 с.

11. ЮДИН Д.Б. *Задачи и методы стохастического программирования.* – М.: Советское радио, 1979.- 392 с.

THE ANALYSIS OF DISCREPANCY PARAMETERS INFLUENCE IN "INPUT-OUTPUT" MODEL

Boris Romanov, "MATI" - The Russian state technological university of K.E.Tsiolkovsky, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (boris094@mail.ru).

The abstract. In article the influence analysis not accuracy of parameters in "input-output" model is made. As model parameters factors of direct material inputs and end production volumes of output are considered. Influence of discrepancy of parameters is defined on the basis of transformation of the determined model in the stochastic. Discrepancy of parameters in stochastic model is set in the form of functions of their distributions. The decision on model in stochastic statement are functions of distribution of output, depending on the set functions of parameters distributions.

Keywords: production, «input-output» model, stochastic programming, parameters discrepancy.