УДК 519.23
ББК 22.17

СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ[1]

Бычков И.В.[2],
(*Учреждение Российской академии наук Иркутский научный центр, Иркутск*)
Зоркальцев В.И.[3], Мокрый И.В.[4]
(*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева, Иркутск*)

Статья посвящена сравнительному анализу и выявлению свойств способов оценки параметров экспоненциального закона распределения на основе вычислительных экспериментов. Методом Монте-Карло осуществляется имитация распределения конечного числа объектов по конечному набору периодов времени с априори заданными вероятностями нахождения каждого объекта в разных периодах. На основе каждого исследуемого метода для каждой имитируемой ситуации осуществляется оценка параметров вероятности нахождения объекта в разных периодах времени. В результате обработки таких оценок по всем имитируемым ситуациям определяются показатели характеризующие качество рассматриваемых методов.

---

1 Исследования выполняются при поддержке РФФИ, грант №15-07-074121а

[2] Бычков Игорь Вячеславович, академик РАН (bych@mail.ru).
[3] Зоркальцев Валерий Иванович, профессор технических наук, заведующий лабораторией Института систем энергетики им.Л.А. Мелентьева (vizork@mail.ru).
[4] Мокрый Игорь Владимирович, старший научный сотрудник Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева (ygr@isem.sei.irk.ru).

Ключевые слова: Монте-Карло, оценка параметров, экспоненциальный закон.

1. Модель, имитирующая исследуемую ситуацию

В данном разделе введем необходимые обозначения, дадим описание исследуемой ситуации и общую постановку решаемой задачи. При этом в качестве пояснения, будем интерпретировать имитируемую ситуацию и вводимые обозначения в терминах проблемы оценки распределения по возрастам рыб в водоеме данного вида на основе экспериментальных отловов (хотя возможны и другие интерпретации).

Обозначим t=1,…,k последовательность периодов времени (возраст в годах исследуемых рыб). Здесь k максимальное (не меньше двух) число рассматриваемых в модели (учитываемых в эксперименте) периодов времени.

Пусть N_t число наблюдаемых значений рассматриваемых объектов (особей рыб в улове) для периода времени t в данном эксперименте. Обозначим

(1) $$N = \sum_{t=1}^{k} N_t$$

общее число объектов всех рассматриваемых периодов.

На основе этих данных можно рассчитать частоту появления объектов в разных периодах времени

(2) $$n_t = N_t / N,\ t = 1,...,k$$

Обозначим P_t вероятность нахождения одного из объектов в периоде времени t. Поскольку любой из рассматриваемых объектов в эксперименте обязательно находится в одном из указанных периодов времени, то

$$\sum_{t=1}^{k} P_t = 1 .$$

Причем, отношения вероятностей для двух соседних периодов времени неизменны:

$$P_{t+1} / P_t = P,\ t = 1,...,k-1$$

при некотором $P\epsilon(0, 1)$. Следовательно

(3) $$P_t = A(P)(P)^t,\ t = 1,...,k ,$$

где

(4) $A(P) = \dfrac{1-P}{P(1-(P)^k)}$.

Поэтому для задания величин P_t при всех t=1,…,k, удовлетворяющих условию (3), достаточно располагать значением величины P.

Изложенную ситуацию можно назвать усеченным или условным экспоненциальным распределением, поскольку временные периоды с номерами $t>k$ исключены из рассмотрения. При k=2, изложенная модель реализации случайных событий равносильна классической схеме Бернулли [1]. В этом случае величина P_1, интерпретируется как вероятность реализации события в схеме Бернулли. Величина P_2 как вероятность не реализации события.

Экспериментом будем называть процедуру распределения методом Монте-Карло заданного количества из N объектов по возрастным группам – формирование чисел N_t на основе указанных вероятностей P_t. Экзогенными параметрами в этом эксперименте являются количество объектов N, количество периодов времени k и вероятность P, из которой по формулам (3), (4) определяются величины P_t , t=1,…,k.

Задачей, исследуемой в данной статье, является анализ методов оценки вероятностей $\tilde{P}_t$, $t = 1,...,k$ на основе полученных в результате отдельного эксперимента чисел N_t , t=1,…,k. Считаем, что эти оценки вероятности также должны удовлетворять условию (4). Следовательно

(5) $\tilde{P}_t = A(\tilde{P})(\tilde{P})^t$, $t = 1,...,k$,

где $\tilde{P}$ - оценка вероятности перехода из периода $t \le k$-1 в следующий период с номером t+1. Величина $A(\tilde{P})$ вычисляется по правилу (4).

Для решения указанной задачи могут применяться разные методы, обладающие своими достоинствами и недостатками. Сравнительный анализ этих методов на основе вычислительных экспериментов на базе использования метода Монте-Карло составляет цель представленных здесь исследований.

Исходные вероятности и их оценки удобно (в том числе для построения динамических моделей функционирования водных экосистем) представлять в виде экспоненциальной зависимости. В таком случае

(6) $P = \exp(-\lambda)$, $\tilde{P} = \exp(-\tilde{\lambda})$,

$P_t = B(\lambda)\exp(-\lambda t)$, $\tilde{P}_t = B(\tilde{\lambda})\exp(-\tilde{\lambda} t)$, $t = 1,...,k$,

где

$$B(\lambda) = 1/\sum_{t=1}^{k}\exp(-\lambda t).$$

Заданным в каждом эксперименте является параметр $\lambda > 0$. Параметр $\tilde{\lambda} > 0$ представляет оценку параметра λ, полученную в результате применения к экспериментальной выборке N_t, t=1,…,k какого-либо метода.

Для моделей динамики биологических систем величина λ интерпретируется как коэффициент смертности. Величина $\tilde{\lambda}$ интерпретируется как оценка коэффициента смертности по располагаемым выборочным значениям N_t, t=1,…,k.

Экспоненциальный закон распределения случайной величины и родственные ему законы широко используются в анализе надежности технических объектов и систем, в медицине, страховании. Применяемые в этих случаях методики оценки параметров распределения базируются на обработке данных об историях функционирования отдельных объектов. Это могут быть данные о продолжительности безотказной работы оборудования, о расстояниях безаварийного пробега автомобилей, о статистике выхода из строя объектов в результате воздействия на них при специальных испытаниях и др. Применяемые на основе таких данных методы оценки параметров законов распределения представлены, например, в работах [2 - 4].

В данной статье рассматривается несколько иная ситуация. Имеется большое количество объектов (особей рыб в водоеме) с разным возрастом. Предполагается, что соотношения количества особей двух соседних возрастов постоянное. По случайным выборкам требуется определить это соотношение. При этом следует различать три источника погрешности в оценках. Один из них – погрешность рассматриваемой модели: насколько

расходится реальное распределение с нашим предположением? Этот вид погрешности здесь не рассматривается. Мы элиминировались от него за счет использования метода Монте-Карло. Это позволяет сосредоточить внимание на двух других источниках погрешности – возможной не представительности используемой выборки и ошибок из-за свойств используемых методов оценки.

2. Методика исследования методов

При фиксированных значениях параметров k, N, λ осуществляется многократная имитация, на основе метода Монте-Карло, реализации величин N_t^i, t=1,…,k. Здесь в дополнение к обозначениям предыдущего раздела введен индекс i=1,…,m номер эксперимента. Сразу отметим, что во всех представленных далее результатах использовалось одно и то же количество экспериментов m=50000.

В данной статье ограничимся исследованиями для значения параметров k=5, λ=0,6. Варьируемым параметром будет только число N. В исследованиях разных методов оценки при одних и тех же значениях параметра N использовались одни и те же наборы экспериментальных данных N_t^i при указанном общем количестве экспериментов m.

Заметим, что выбранное большое число экспериментов m обеспечивало нужную устойчивость результатов. На основе данных N_t^i, t=1,…,k полученных в эксперименте i, используя один из рассматриваемых далее методов, определялась оценка $\tilde{\lambda}_i$. Затем рассматривалось среднее значение этого коэффициента по всем экспериментам для данного метода,

$$(7) \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\tilde{\lambda}_i .$$

Вполне естественно ожидать, что оценка $\tilde{\lambda}_i$, в каждом отдельном эксперименте будет отличаться от исходного коэффициента λ. Вопрос в том, имеют ли эти различия систематический или чисто случайный характер. Существенное отклонение среднего значения $\bar{\lambda}$ при большом количестве испытаний m

будет означать смещенную оценку параметров λ. Чем больше такое смещение по абсолютной величине, тем, очевидно, хуже метод.

Второй показатель качества метода, который будет использоваться далее, - среднее квадратическое отклонение оценок от их среднего уровня,

$$(8) \quad v = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (\tilde{\lambda}_i - \bar{\lambda})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Большее значение v означает больший разброс оценок, меньшую надежность каждого из них в качестве представителя средней ожидаемой оценки.

Во всех рассматриваемых далее методах оценки параметров $\tilde{\lambda}$ и, соответственно $\tilde{P}$, используются весовые коэффициенты h_t - положительные величины, соизмеряющие данные разных периодов времени t=1,…,k. Для каждого из методов будет рассмотрено три способа взвешивания.

1. Одинаковые весовые коэффициенты. В этом случае

$$(9) \quad h_t^1 = c^1, \; t = 1,...,k,$$

где c^1 - некоторая положительная константа.

2. Весовые коэффициенты пропорциональные оценкам численности объектов в разных возрастных группах,

$$(10) \quad h_t^2 = c^2 \tilde{P}_t, \; t = 1,...,k,$$

где c^2 - некоторая положительная величина.

3. Весовые коэффициенты, пропорциональные обратным значениям дисперсий оценок вероятностей нахождения объектов в рассматриваемых периодах времени.

$$(11) \quad h_t^3 = c^3 / \tilde{P}_t (1 - \tilde{P}_t),$$

где c^3 - некоторая положительная величина. Оценки вероятностей попадания $\tilde{P}_t$ и непопадания $1 - \tilde{P}_t$ объекта в период времени t=1,…,k, интерпретируются как характеристики биномиального распределения числа попаданий N_t при общем числе испытаний N с дисперсией $N\tilde{P}_t(1 - \tilde{P}_t)$.

Для первых двух из рассматриваемых далее методов необходимо, чтобы весовые коэффициенты в сумме для периодов t=1,…,k-1 были равны единице,

(12) $\sum_{t=1}^{k-1} h_t = 1.$

Поэтому будем считать, что

(13) $c^1 = 1/(k-1),$

(14) $c^2 = 1/\sum_{t=1}^{k-1} \tilde{P}_t,$

(15) $c^3 = 1/\sum_{t=1}^{k-1} \frac{1}{\tilde{P}_t(1-\tilde{P}_t)}.$

В табл. 1 приведены значения всех трех весовых коэффициентов в идеализированном случае, когда оцениваемые вероятности совпадают с исходными. То есть, когда $\tilde{P}_t = P_t$, $t = 1,...,k$. Эти данные иллюстрируют характер изменения рассматриваемых видов весовых коэффициентов.

Согласно (10), (14) весовые коэффициенты h_t^2 убывают по экспоненциальному закону. Их использование отражает тот факт, что с увеличением t происходит сокращение (как правило) количества выявленных объектов N_t в связи, с чем снижается надежность данных для оценок. Преимущества таких весовых коэффициентов на примере оценки коэффициентов смертности большой и малой голомянок по данным экспериментальных отловов обсуждались в статье [5]. Необходимо отметить, что вместо «истинных» значений вероятности P_t, которые считаются неизвестными, при обработке экспериментальных данных, пользуются оценки $\tilde{P}_t$. Они могут отклоняться от P_t. Поэтому численно оценки рассматриваемых весовых коэффициентов могут отличаться в конкретном эксперименте от представленных в табл.1. При этом общий характер изменения весов (уменьшение с ростом номера периода) будет таким же.

Весовые коэффициенты h_t^3 отражают обычно используемую рекомендацию к выбору весов отдельных наблюдений при оценивании параметров. Считается, что эти веса должны быть обратно пропорциональны погрешностям измерений, которые

определяются дисперсией наблюдаемого значения показателя. [6, 7] Величина $P_t(1\text{-}P_t)$ соответствует дисперсии частоты n_t появления объекта возраста t. Необходимо подчеркнуть, что вместо «истинных» значений вероятности P_t, которые считаются неизвестными, при расчетах с обсуждаемыми здесь весами также используются оценки $\tilde{P}_t$, которые могут отклоняться от P_t. Поэтому применяемые в расчетах оценки дисперсии могут отличаться от самих дисперсий. Вместе с тем сохраняется общий характер изменения весовых коэффициентов отраженный в третьей строке табл. 1. В отличие от предыдущего случая весовые коэффициенты возрастают с ростом номера t.

Таблица 1. Значения весовых коэффициентов в случае, когда оценки вероятности совпадают с исходными вероятностями

Весовые коэффициенты	Номер периода t				
	1	2	3	4	5
h_t^1	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
h_t^2	0,496	0,272	0,149	0,082	0,045
h_t^3	0,132	0,167	0,261	0,440	0,770

Итеративная процедура определения весовых коэффициентов. При задании весовых коэффициентов h_t^2, h_t^3 в формулах (10), (11) используются значения оценок вероятности, которые еще предстоит оценить. Здесь имеется в виду следующая итеративная процедура. Сначала мы задаем оценки вероятностей $\tilde{P}_t$ равными частотам n_t. Затем, с использованием формул (10) или (11), а также нормировок (14) или (15), определяем веса h_t^2 или h_t^3. С использованием этих весов находим, на основе рассматриваемого метода, оценки $\tilde{\lambda}$, $\tilde{P}$. Затем вычисляем $\tilde{P}_t$, $t = 1,...,k$. Пересчитываем весовые коэффициенты h_t и заново вычисляем оценки $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{P}$, вероятности $\tilde{P}_t$. Процесс повторяется до тех пор, пока новые оценки $\tilde{\lambda}$ не совпадут с требуемой точностью с оценками $\tilde{\lambda}$, полученными на предыдущей итерации. Обычно это происходит в результате небольшого числа

(одной – двух) итераций, при требуемом отличии значений $\tilde{\lambda}$ на соседних итерациях не более чем в 10^{-5}.

Для вычисления по всем рассматриваемым далее методам необходимо, чтобы величины N_t для всех t=1,…,k были ненулевые. Случай, когда N_t =0 для какого либо t вполне возможен в конкретном эксперименте. При его реализации, можно было бы попытаться использовать какие-то модификации рассматриваемых методов. В данной статье не будем рассматривать эти возможные модификации. Будем просто исключать такой эксперимент из рассмотрения.

Ограничимся рассмотрением трех наиболее простых в вычислительном отношении и «наглядных» методов. Эти методы, особенно первые два из них, не нуждаются в использовании специальных вычислительных программ. Ими можно пользоваться, непосредственно в «полевых» условиях. Вопрос в том насколько точный и надежный результат они дают?

3. Оценка вероятности перехода путем усреднения соотношений частот

В качестве наиболее простого в вычислительном отношении и наглядного в интерпретации может рассматриваться метод, базирующийся на усреднении соотношений частот. Соотношения вероятностей нахождения объектов в двух соседних периодах времени равно вероятности перехода, поэтому в качестве оценки вероятности перехода можно воспользоваться взвешенным средним арифметическим отношений частот распределения объектов в соседних периодах времени. В таком случае

$$\tilde{P} = \sum_{t=1}^{k-1} h_t (N_{t+1} / N_t).$$

Исходя из полученного значения $\tilde{P}$, можем определить

$\tilde{\lambda} = -\ln \tilde{P}$.

Заметим, если нас интересует только оценка вероятности перехода $\tilde{P}$ и оценки вероятностей $\tilde{P}_t$ нахождения отдельных объектов в периодах времени t=1,…,k, то при использовании

обсуждаемого здесь метода можно обойтись только четырьмя арифметическими действиями. Результаты экспериментальных расчетов по этому методу, представленные на рис.1, показывают, что при относительно малых значениях количества объектов в каждом эксперименте (особенно для N в диапазоне от 50 до 100) имеем сильное смещение в сторону занижения значения параметра $\tilde{\lambda}$. Это смещение уменьшается по абсолютной величине с ростом числа объектов N, рассматриваемых в экспериментах.

При N=50 отклонение величин $\overline{\lambda}$ от «истинного» значения λ достигают 25%. Оценка $\overline{\lambda}$ равна 0,438 при первом способе взвешивания. Она равна 0,441 при втором способе взвешивания. И она равна 0,455 при третьем способе взвешивания. Любопытно, что такой же порядок отклонений для трех способов взвешивания сохраняется при всех рассмотренных значениях N вплоть до N=2000. При N=100 эти отклонения составляют примерно 10% от «истинного» значения λ. При N=1000 они становятся меньше 1%.

В табл.2 приведены величины P, P_t, соответствующие нескольким значениям $\lambda \leq 0{,}6$. Данные этой таблицы показывают, как меняются оценки $\tilde{P}$, $\tilde{P}_t$ при снижении оценки параметра $\tilde{\lambda}$ против его «истинного» значения λ=0,6. Смещение математического ожидания оценки $\tilde{\lambda}$ в сторону занижения означает завышение математического ожидания оценки вероятности перехода $\tilde{P}$ против ее «истинного» значения P. Из этой таблицы видно, что оценки вероятности перехода $\tilde{P}$ отклоняются от исходного их значения в диапазоне от 1% (при $\tilde{\lambda} = 0{,}59$) до 16% (при $\tilde{\lambda} = 0{,}45$). Отклонение $\tilde{P}_t$ от значений P_t также очень существенны. Причем $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ отклоняются от P_1 и от P_2 в сторону занижения. В то время как величины $\tilde{P}_3$, $\tilde{P}_4$, $\tilde{P}_5$ отклоняются от соответствующих значений P_3, P_4, и P_5 в сторону завышения.

Таблица 2. Изменения вероятности перехода к следующему временному этапу P и вероятности P_t нахождения во времен-

ных этапах t=1,...,5 *в зависимости от значения параметра* λ *(случай* $\lambda \le 0{,}6$*)*

λ	P	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
0,6	0,549	0,475	0,261	0,143	0,079	0,043
0,59	0,554	0,470	0,261	0,145	0,080	0,044
0,55	0,577	0,451	0,260	0,150	0,087	0,050
0,5	0,606	0,429	0,260	0,158	0,096	0,058
0,45	0,638	0,405	0,258	0,165	0,105	0,068

Экспериментально установленный факт смещения математического ожидания величин $\tilde{P}$ в сторону завышения нуждается в теоретическом обосновании. Можно привести следующие соображения, поясняющие его.

Пусть соотношение N_{t+1}/N_t близко к значению P. При случайной реализации возможны отклонения, как в числителе, так и в знаменателе на некоторую положительную величину Δ в сторону увеличения и в сторону уменьшения. Если это происходит с числителем, то отклонение в сторону увеличения и в сторону уменьшения приводят к одинаковым по абсолютной величине отклонениям от исходного значения числа N_{t+1}/N_t,

$$\left|\frac{N_{t+1}+\Delta}{N_t}-\frac{N_{t+1}}{N_t}\right|=\left|\frac{N_{t+1}-\Delta}{N_t}-\frac{N_{t+1}}{N_t}\right| .$$

Одинаковые по абсолютной величине отклонения в знаменателе дают разные по абсолютной величине отклонения рассматриваемой дроби. При $0<\Delta<N_t$ выполняются неравенства

$$\frac{N_{t+1}}{N_t-\Delta}-\frac{N_{t+1}}{N_t}>\frac{N_{t+1}}{N_t}-\frac{N_{t+1}}{N_t+\Delta}>0 .$$

Из рис. 1 видно, что для рассматриваемого метода заметно меньшее смещение коэффициента $\overline{\lambda}$ имеет место для третьего способа взвешивания. Первый и второй способы дают близкие значения величины смещения. Причем несколько меньшие значения получаются с помощью второго способа взвешивания. При всех N выполняются неравенства

$$\lambda > \overline{\lambda}^3 > \overline{\lambda}^2 > \overline{\lambda}^1 ,$$

где $\overline{\lambda}^1, \overline{\lambda}^2, \overline{\lambda}^3$ средние значения оценок $\tilde{\lambda}_i^j$, $j = 1,2,3$ по всем экспериментам i=1,…,m, при использовании весовых коэффициентов h^1, h^2, h^3.

Из рис. 2 видно, что при всех трех способах взвешивания имеет место значительное среднее квадратическое отклонение оценок $\tilde{\lambda}_i$ в отдельных экспериментах i=1,…,m от их средних значений $\overline{\lambda}$. Это среднеквадратическое отклонение составляет более 50% от величины $\overline{\lambda}$ при N=50. С ростом N величина $v / \overline{\lambda}$ монотонно сокращается. Уже при N=100 для первых двух способов взвешивания величина относительного отклонения становится меньше 30%. При N=1000 относительная величина средних отклонений уменьшается до 6% при втором способе взвешивания, до 7% при первом способе взвешивания и до 14% при третьем способе взвешивания.

Любопытно, что до N=80 выполняются следующие неравенства для среднеквадратических отклонений

$v^1 < v^2 < v^3$.

После N=90 стабильно выполняется неравенство

$v^2 < v^1 < v^3$.

Здесь v^1, v^2, v^3 - среднее квадратическое отклонение при использовании весов h^1, h^2, h^3. Причем величина v^3 стабильно существенно больше (более чем в два раза), чем величина v^2 при N>150. Значение v^2 существенно (на 20% и более) меньше v^1. Поэтому можно рекомендовать при использовании данного метода ориентироваться на веса h^2 или как на несколько худший, но более простой в вычислительном отношении вариант, на одинаковые веса h^1.

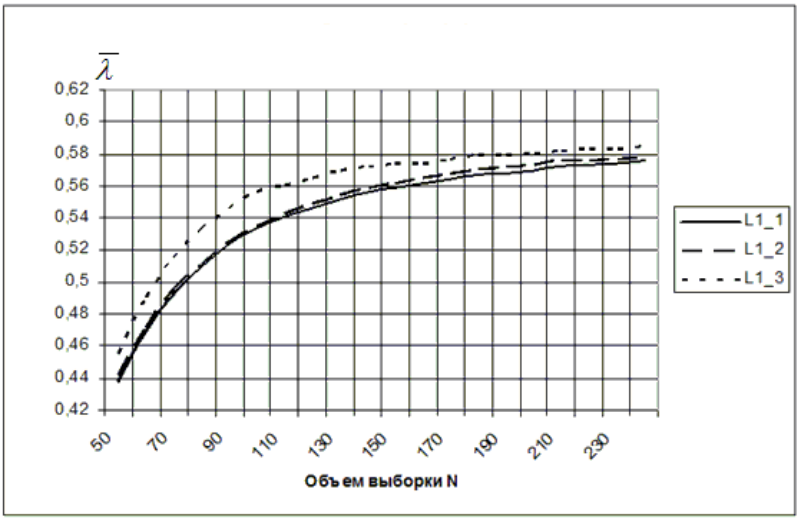

Рис 1. Изменение для первого метода средних значений оценок коэффициентов смертности $\overline{\lambda}$ *в зависимости от объёма выборки N (истинное значение* λ=0,6*).*

Обозначения:

L1_1- вычисления первым методом с весовыми коэффициентами h^1.

L1_2- вычисления первым методом с весовыми коэффициентами h^2.

L1_3- вычисления первым методом с весовыми коэффициентами h^3.

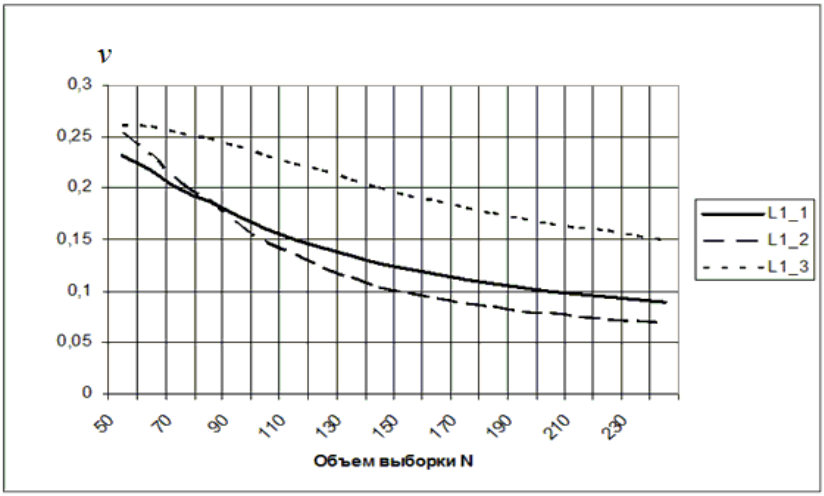

Рис 2. Средние квадратические отклонения коэффициентов смертности $\tilde{\lambda}_i$ *по экспериментам* $i=1,\ldots,m$ *от их средних значений, для первого метода в зависимости от объёма выборки* N.

4. Метод, основанный на расчете усредненного параметра смертности

Из (3), (6) следует, что

$$\lambda = -\ln(P_{t+1}/P_t),\ t=1,\ldots,k-1.$$

Поскольку соотношение N_{t+1}/N_t можно считать оценкой соотношения P_t/P_{t+1}, то вполне естественно будет воспользоваться усреднением соотношений $\ln(N_{t+1}/N_t)$, $t=1,\ldots,k\text{-}1$ в качестве оценки коэффициента смертности. Получаем расчетную формулу

$$\tilde{\lambda} = -\sum_{t=1}^{k-1} h_t \ln(N_{t+1}/N_t)\,.$$

Имея коэффициент $\tilde{\lambda}$, по формуле (6) можем рассчитать оценку $\tilde{P}$. Затем по формуле (4) рассчитываем $A(\tilde{P})$ и по фор-

муле (3), используя вместо P оценку $\tilde{P}$, получаем значения $\tilde{P}_t$, $t=1,...,k$.

На рис. 3 представлены значения усредненных оценок $\tilde{\lambda}$ по данному методу в зависимости от количества всех объектов в отдельном эксперименте N. Следует отметить, что в отличие от рассмотренного ранее метода, в данном случае средние значения оценок $\tilde{\lambda}$ при всех N смещены в сторону завышения относительно истинного значения коэффициента смертности λ=0,6. Причем отклонения очень существенные. Они достигают 10% от истинного значения λ (при третьем способе взвешивания для N=100).

Эти отклонения снижаются и стремятся к нулю с ростом N. Особый интерес, вызывает тот факт, что, в отличие от общей тенденции, при N=50 смещение для двух способов взвешивания оказались значительно ниже, чем при N=100.

В табл.3 приведены величины P, P_t, соответствующие нескольким значениям $\lambda \geq 0{,}6$. Данные этой табл. показывают, что смещение математического ожидания оценки $\tilde{\lambda}$ в сторону завышения означает систематическое занижение математического ожидания оценки вероятности перехода $\tilde{P}$ против ее «истинного» значения P. Из этой таблицы видно, что оценки вероятности перехода $\tilde{P}$ отклоняются от исходного их значения P в диапазоне от 1% (при $\tilde{\lambda}=0{,}62$) до 6% (при $\tilde{\lambda}=0{,}66$). Отклонение $\tilde{P}_t$ от значений P_t также очень существенные. Причем $\tilde{P}_1$ отклоняется от P_1 в сторону завышения. В то время как величины $\tilde{P}_2$, $\tilde{P}_3$, $\tilde{P}_4$, $\tilde{P}_5$ отклоняются от соответствующих значений P_2, P_3, P_4, и P_5 в сторону занижения.

Таблица 3. Изменения вероятности перехода к следующему временному этапу P и вероятности нахождения P_t во временных этапах i=1,...,5 в зависимости от значений параметра λ (случай $\lambda \geq 0{,}6$).

λ	P	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
0,66	0,5169	0,5017	0,2593	0,1340	0,0693	0,0358

0,64	0,5273	0,4928	0,2598	0,1370	0,0722	0,0381
0,62	0,5379	0,4839	0,2603	0,1400	0,0753	0,0405
0,60	0,5488	0,4748	0,2606	0,1430	0,0785	0,0431

Отметим, что рассматриваемый здесь способ оценивания равносилен использованию в качестве оценки вероятности перехода средней геометрической с весами h_t от соотношения частот соседних периодов времени. То есть для рассматриваемого здесь метода

$$\widetilde{P} = \prod_{t=1}^{k-1} (N_{t+1} / N_t)^{h_t} .$$

Известно, что среднее геометрическое от неодинаковых положительных величин всегда меньше чем среднее арифметическое с теми же весовыми коэффициентами (считается, что все они положительные, в сумме равные единице). То есть выполняется неравенство

$$\prod_{t=1}^{k-1} (N_{t+1} / N_t)^{h_t} < \sum_{t=1}^{k-1} h_t (N_{t+1} / N_t) .$$

Поэтому

$$\widetilde{P}^2 < \widetilde{P}^1 ,$$

где $\widetilde{P}^1, \widetilde{P}^2$ - оценки вероятности перехода по первому (рассмотренному в предыдущем разделе) и второму (рассматриваемому в этом разделе) методам при одних и тех же весовых коэффициентах. Представленные данные экспериментальных расчетов подтверждают это неравенство. Более того, выявлено наличие более сильных свойств: между оценками $\overline{P}^1$ и $\overline{P}^2$ находится «истинное» значение вероятности перехода. Здесь $\overline{P}^1$ и $\overline{P}^2$ - среднегеометрические значения оценок $\widetilde{P}^1$ и $\widetilde{P}^2$ по всем экспериментам полученные первым и вторым методами. При всех рассмотренных значениях N и при любых из трех способах задания весовых коэффициентов выполняются неравенства

$$\overline{P}^2 < P < \overline{P}^1 .$$

Эти неравенства равносильны следующим неравенствам, наблюдаемым на рис.1, 3

$$\overline{\lambda}^2 > \lambda > \overline{\lambda}^1 ,$$

где $\overline{\lambda}^1$, $\overline{\lambda}^2$ - средние оценки коэффициента смертности, рассчитываемые первым и вторым методами.

Все три способа взвешивания дают для рассматриваемого метода существенные среднеквадратические отклонения в оценках параметров $\tilde{\lambda}$ от их среднего значения (достигающие 50% от $\overline{\lambda}$ при N=100 для третьего способа взвешивания).

Особо следует отметить факт возрастания среднеквадратического отклонения для первого и, особенно, для третьего способа взвешивания при увеличении числа объектов N с 50 до 100. Этот факт находится в противоречии с общей экспериментально выявленной (и априори ожидавшейся) тенденцией снижения и последующей стабилизации среднеквадратических отклонений с ростом числа объектов N в эксперименте.

Из рис. 3, 4 видно, что для рассматриваемого здесь метода, наихудшим как по величине систематического смещения оценки $\tilde{\lambda}$, так и по среднеквадратическим отклонениям v является третий способ взвешивания. Наилучшим для всех N является второй способ взвешивания.

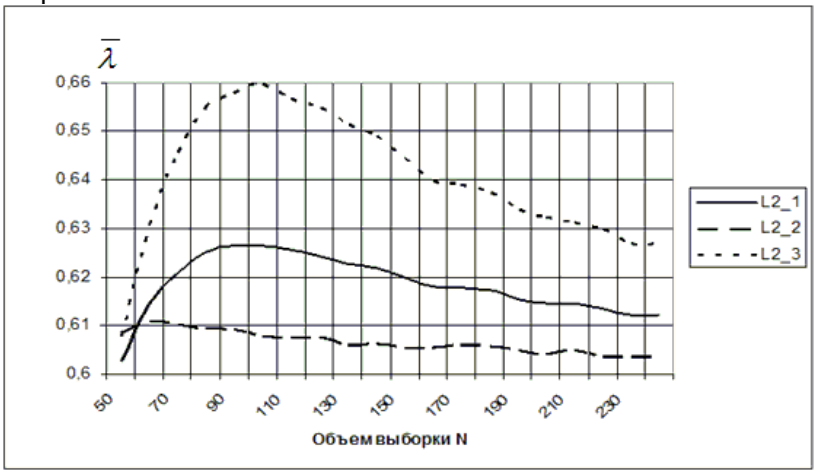

Рис 3. Изменения для второго метода средних значений оценок коэффициентов смертности $\overline{\lambda}$ *в зависимости от объёма выборки N (истинное значение* λ=0,6*).*

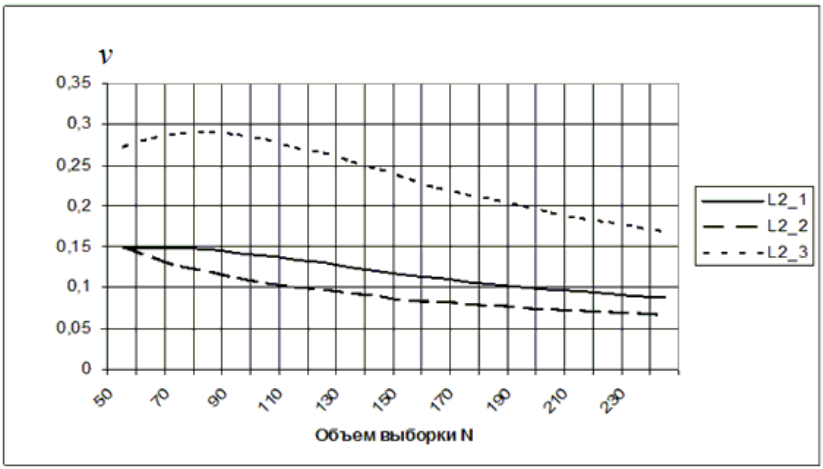

Рис 4. Средние квадратические отклонения от средних значений оценок коэффициентов смертности $\tilde{\lambda}_i$ *по экспериментам* $i=1,\ldots,m$, *для второго метода в зависимости от объёма выборки* N.

5. Оценка параметра смертности методом наименьших квадратов на базе линеаризации

Здесь будет представлен метод оценки показателя смертности, использовавшийся в статье [5]. В его основе лежит соображение о том, что частоты распределения объектов по разным периодам времени n_t, $t=1,\ldots,k$ можно рассматривать как оценку вероятности P_t нахождения объекта в разных периодах времени. А эту вероятность можно представить как функцию

$$P_t = Be^{-\lambda t},$$

зависящую от двух параметров λ и B. Используя логарифмирование указанной нелинейной зависимости от искомых переменных можно представить ее в виде эквивалентной линейной зависимости. Положим

$$y = \ln B.$$

Получаем уравнение линейной аппроксимации

$$y - \lambda t + \varepsilon_t = \ln(N_{t+1}/N_t),\ t = 1,\ldots,k, \qquad (16)$$

где ε_t - погрешность аппроксимации. Используем метод наименьших квадратов. Он состоит в решении задачи

$$\sum_{t=1}^{k} h_t(\varepsilon_t)^2 \to \min,$$

при условиях (16). Получим значения $\tilde{y}$, $\tilde{\lambda}$ и ε_t, t=1,…,k. Нам потребуется только $\tilde{\lambda}$. Используя $\tilde{\lambda}$, можем вычислить $\tilde{P}$ и затем $A(\tilde{P})$ и после этого $\tilde{P}_t$, $t = 1,...,k$.

На рис. 5 представлены средние значения по экспериментам параметра $\tilde{\lambda}$ при разных N, для трех способов заданных весовых коэффициентов. Как видно из рис. 3, 5 значение $\bar{\lambda}$ имеет примерно такой же характер отклонения от истинного значения λ=0,6 для рассматриваемого здесь метода, как и для метода, рассмотренного в предыдущем разделе.

Так же, как и для метода из предыдущего раздела, наименьшее отклонение имеют место для второго способа задания весовых коэффициентов. На втором месте довольно устойчиво находится первый способ задании весовых коэффициентов, т.е. когда все весовые коэффициенты одинаковые. Третье место, также как и в методе предыдущего раздела, занимает по отклонениям третий способ задания весовых коэффициентов. Для обоих методов, для всех N выполняются неравенства

$$\lambda < \bar{\lambda}(h^2) < \bar{\lambda}(h^1) < \bar{\lambda}(h^3),$$

где $\bar{\lambda}(h^j)$ - средние арифметические оценки коэффициента смертности с использованием весовых коэффициентов с номером j=1, 2, 3.

Можно также отметить, что использование второго варианта задания весовых коэффициентов для рассматриваемого здесь метода приводит к несколько большим смещениям, чем для метода из предыдущего раздела

$$\lambda < \bar{\lambda}^2(h^2) < \bar{\lambda}^3(h^2),$$

где $\bar{\lambda}^2(h^2), \bar{\lambda}^3(h^2)$ - средние значения оценок коэффициента смертности при применении второго и третьего методов с использованием второго варианта весовых коэффициентов.

При этом для первого и третьего варианта весовых коэффициентов рассматриваемый здесь метод дает, как правило, существенно меньшее смещение, чем метод из предыдущего раздела:

$$\lambda < \overline{\lambda}^3(h^1) < \overline{\lambda}^2(h^2),$$

$$\lambda < \overline{\lambda}^3(h^3) < \overline{\lambda}^2(h^3).$$

Для рассматриваемого метода также как и для метода из предыдущего раздела проявляется факт увеличения смещения $\overline{\lambda}$ с ростом N в диапазоне от 50 до 100 при первом и третьем способах взвешивания.

Из рис. 6 видно, что для рассматриваемого здесь метода также наибольшее среднеквадратическое отклонение дает использование третьего способа взвешивания, наименьшее - второго способа.

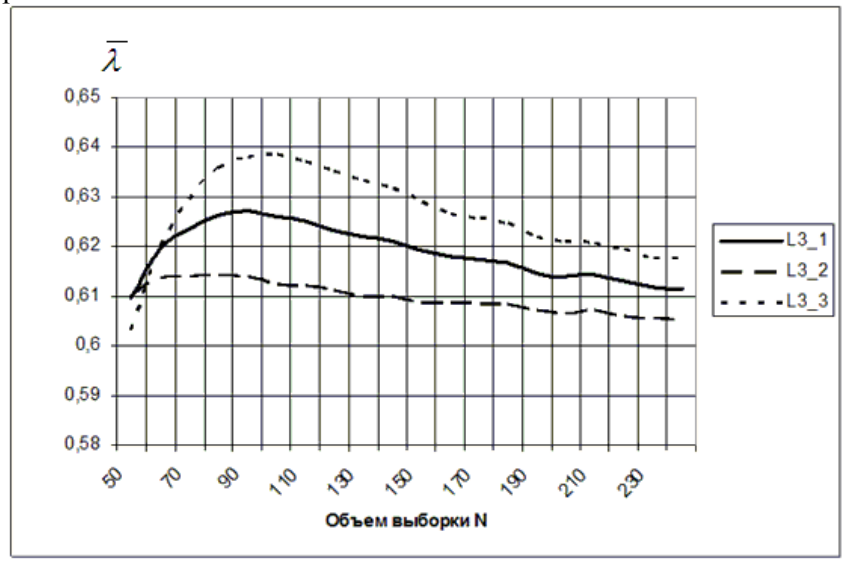

Рис 5. Изменения для третьего метода средних значений оценок коэффициентов смертности $\overline{\lambda}$ в зависимости от объёма выборки N (истинное значение λ=0,6).

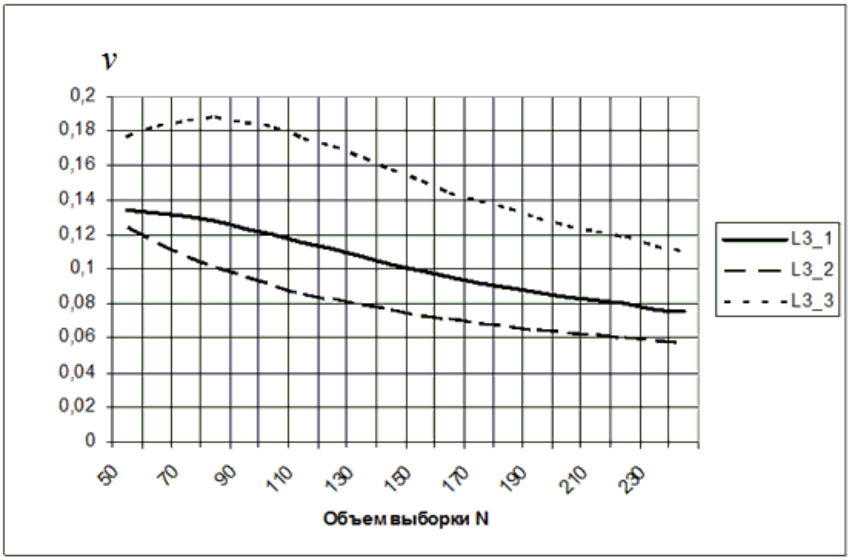

Рис 6. Средние квадратические отклонения от средних значений оценок коэффициентов смертности $\tilde{\lambda}_i$ *по экспериментам* $i=1,\ldots,m$, *для третьего метода в зависимости от объёма выборки* N.

6. Обсуждение

Проведенные экспериментальные расчеты показывают, что все три рассмотренных метода дают удовлетворительные для экспресс-оценок результаты при относительно больших количествах объектов N в экспериментах. В качестве такого порогового значения, обеспечивающего приемлемые по точности результаты можно принять N=200 (для рассматриваемых здесь значений λ и k).

В табл. 4 представлены полученные в результате расчетов смещения при N=200 величин $\overline{\lambda}$ относительно λ для всех трех методов и трех способов задания весовых коэффициентов. Смещения представлены в процентах значениях, то есть они соответствуют показателям

$$\Delta = (\overline{\lambda} - \lambda) \times 100.$$

Как видно из этой таблицы даже в самом худшем случае абсолютные значения смещений ($|\Delta|$=3,0) не превосходят 5% от значения коэффициента смертности λ=0,6. Для второго и третьего методов при втором способе задания весовых коэффициентов отклонений составляют менее 1% от значения λ.

При N=200 средние квадратические отклонения не превышают 30% от коэффициента смертности λ. Об этом свидетельствуют представленные в табл. 5 данные по показателю

$$\sigma = v / \overline{\lambda},$$

рассчитанные для всех трех методов и трех способов взвешивания. По этому показателю существенно лидирующее положение занимает второй способ взвешивания при втором и третьем методах расчета.

Таблица 4. Смещения средней величины оценок коэффициента смертности при N=200 (выражены в сотых долях)

Используемые весовые коэффициенты	Методы расчета		
	1	2	3
h^1	-3.0	1.4	1.4
h^2	-2.7	0.4	0.6
h^3	-1.9	3.2	2.1

Таблица 5. Среднеквадратические отклонения оценок от их средних значений коэффициентов смертности при N=200 (выражены в относительных величинах к средним значениям)

Используемые весовые коэффициенты	Методы расчета		
	1	2	3
h^1	0.18	0.16	0.14
h^2	0.14	0.12	0.10
h^3	0.24	0.30	0.20

С ростом количества объектов N в эксперименте оценки будут улучшаться по обоим рассматриваемым здесь показателям.

Например, при N=1000 абсолютные значения смещения по всем рассматриваемым здесь способам оценивания не превышают 1% по абсолютной величине. Для второго и третьего метода при втором способе взвешивания это смещение становится меньше, чем 0,2% (см. табл. 2). При этом более чем в два раза, по сравнению со случаем N=200, уменьшаются относительные среднеквадратические отклонения (см. табл. 7). По этому показателю также лидирует второй способ взвешивания при втором и третьем методах.

Таблица 6. Смещение средней величины оценок коэффициентов смертности при N=1000 (выражены в сотых долях)

Используемые весовые коэффициенты	Методы расчета		
	1	2	3
h^1	-0.6	0.3	0.3
h^2	-0.5	0.1	0.1
h^3	-0.4	0.6	0.4

Таблица 7. Средние квадратические отклонения оценок коэффициентов смертности от их средних значений при N=1000 (выражены в относительных величинах к средним значениям)

Используемые весовые коэффициенты	Методы расчета		
	1	2	3
h^1	0.07	0.07	0.06
h^2	0.06	0.05	0.05
h^3	0.12	0.12	0.08

На основе представленных в статье результатов расчетов можно рекомендовать к использованию второй либо третий метод экспресс-оценки параметров экспоненциального закона распределения (из рассмотренных здесь трех методов). Для обоих из этих методов наиболее эффективным является второй способ задания весовых коэффициентов. Для получения надежных оценок параметров экспоненциального закона распределе-

ния необходимо рассматривать не менее 200 объектов в эксперименте.

Эти рекомендации справедливы при близких к рассмотренным в данной статье значениях λ и k. Если ожидаемые коэффициенты смертности λ существенно меньше 0,6 и если количество рассматриваемых периодов k больше 5, то для получения надежных оценок, вероятно, потребуется большее количество экземпляров в эксперименте. Этот и другие аспекты оценок нуждаются в дополнительных исследованиях.

* * *

Основным результатом исследований представленных в данной статье является демонстрация возможностей изучения свойств методов математической статистики на основе метода Монте-Карло. Технология многократных статистических испытаний позволила выявить интересные эффекты некоторых возможных способов оценки параметров экспоненциального закона распределения. Эти свойства нуждаются в дальнейшем теоретическом осмыслении. Вместе с тем можно ожидать, что такой путь сопоставления способов оценки параметров законов распределения может быть полезен во многих других случаях.

Литература

1. БЕРНУЛЛИ Я. *О законе больших чисел* // Пер. с лат.- М.: Наука. Тл. ред. физ.-мат. лит.,1986.-176 с.
2. БЫЧКОВ И.В., ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., КАЗАЗАЕВА А.В. ГЛУХОВ В.А. *Весовые коэффициенты в методе взвешенных наименьших квадратов*: – Сиб ЖВМ (в печати).
3. КОБЗАРЬ А.И. *Прикладная математическая статистика.*//Для инженеров и научных работников.- М.: Физматлит, 2012,- 816 с.
4. КОЗЛОВ М.В., ПРОХОРОВ А.В. *Введение в математическую статистику*.- М.: Изд-во МГУ, 1987,- 264 с.
5. КОКС Д.Р., ОУКС Д. *Анализ данных типа времени жизни*.- М.: 1988,- 191 с.
6. КРЫЛОВ А.В. *Лекции о приближенных вычислениях*. М.-Л.: Государственное издание технико-теоретической литературы. 1950,- 318 с.

7. СЕКЕЙ Г. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистики* - М.: Мир, 1990, - 240 с.

ESTIMATES OF PARAMETERS OF THE EXPONENTIAL LAW OF DISTRIBUTION ON THE BASIS OF EXPONENTIAL DATA

Igor Vyacheslavovich, The Irkutsk scientific center of RAS, academician (Irkutsk, Lermontova st., 134).
Valery Ivanovich, Institute of energy system named after L.A. Melentyev, Irkutsk, professor of technical sciences, head of laboratory (Irkutsk, Lermontova st., 130).
Igor Vladimirovich, Institute of energy system named after L.A. Melentyev, Irkutsk, senior scientist (Irkutsk, Lermontova st., 130).

Abstract: The paper is devoted to comparative analysis, as well as establishing some properties, of alternative approaches to estimation of the parameters of exponential distribution, on the base of numerical simulations. Using Monte-Carlo, we sample an allocation of finite number of objects among several time periods, given probabilities of falling into those periods for every object. On the base of each approach, and for each simulation, we estimate the parameters of the probability of finding an object in any time period. Analysing such estimates over all the simulations, we determine the quality of each of the suggested approaches.

Keywords: Monte-Carlo method, parameters estimation, exponential law.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором…

Поступила в редакцию ...заполняется редактором…
Опубликована ...заполняется редактором…