УДК 511-33
ББК 3.22.176

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О МАРШРУТНЫХ ЛИСТАХ.

Русакова Е. А.[1]
(Рязанский Государственный Радиотехнический Университет, Рязань)

Статья посвящена изучению латинских и ортогональных латинских квадратов, задачу отыскания которых впервые поставил Л. Эйлер в 1782 г. Рассмотрены некоторые свойства латинских квадратов и их практическое применение на основе собственной задачи.

Ключевые слова: латинские квадраты, ортогональные латинские квадраты, Эйлер, свойства ортогональных латинских квадратов, задача о маршрутных листах.

Латинский квадрат N-го порядка – это квадрат $N \times N$, заполненный элементами множества M таким образом, что в каждой строке и каждом столбце каждый элемент из M встречался только один раз (см. рис.1).

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

Рис. 1. Пример латинского квадрата 4-го порядка

[1] *Русакова Екатерина Андреевна, студентка РГРТУ* (*katya._rus@mail.ru*).

Когда Эйлер ввел понятие ортогональных (греко - латинских) латинских квадратов они были просто новыми математическими объектами. В настоящее время они нашли широкое применение (в комбинаторике полные системы ортогональных латинских квадратов соответствуют конечным аффинным и проективным плоскостям, в вычислительной математике системы попарно ортогональных латинских квадратов используются при построении сеточных методов интегрирования, планирование эксперимента по схеме греко-латинского квадрата применяется для четырех факторов).

Греко-латинский квадрат— это квадрат $N \times N$ в каждой клетке которого стоят 2 числа, каждое из которых может принимать значения из множества M. При этом выполняются следующие условия:

1. В каждой строке и столбце каждое значение встречается один раз на первом месте в паре, и один раз на втором.
2. Каждое значение стоит в паре с каждым другим значением и с самим собой по одному разу.

Наглядно ортогональный латинский квадрат представлен на рис.2. В данном примере латинские буквы сами по себе образуют латинский квадрат, то же – греческие.

$A\alpha$	$B\gamma$	$C\beta$
$C\gamma$	$A\beta$	$B\alpha$
$B\beta$	$C\alpha$	$A\gamma$

Рис. 2. Пример ортогонального латинского квадрата

Далее хотелось бы рассмотреть некоторые свойства латинских квадратов.

1. Группа из M латинских квадратов порядка N называется группой взаимно ортогональных квадратов, если любые два квадрата этой группы ортогональны (для любого

порядка N существует не больше чем N-1 взаимно ортогональных квадратов).

2. Для любого порядка N, являющегося простым числом или степенью простого числа, существует ровно $N-1$ взаимно ортогональных квадратов.
3. Латинский квадрат нормализован, если в первой строке содержится тождественная перестановка чисел.

Теперь, когда рассмотрены свойства квадратов и некоторые их применения перейдем непосредственно к задаче, которая на практике демонстрирует применение ортогональных латинских квадратов.

Задача была поставлена случайно при подготовке к проведению XXII Международного экономического лагеря «Содружество». Когда я прописывала ход одного из мероприятий, мне потребовалось составить маршрутные листы таким образом, чтобы каждый отряд встретился с каждым, при этом пройдя все станции игры.

Итак, конечная формулировка задачи записывается так: «Имеется 8 отрядов и 7 станций. На каждой станции должны встретиться 2 отряда. Составить маршрутный лист таким образом, чтобы каждый отряд посетил каждую станцию один раз и встретился с каждым отрядом единожды».

Математически эту задачу можно сформулировать следующим образом: В квадрат 7×7 расставить все двухэлементные подмножества восьмиэлементного множества по одному экземпляру так, чтобы пересечения любой пары элементов в клетках в каждой строке (столбце) равнялись пустому множеству, а объединение элементов в каждой строке (столбце) равнялось восьмиэлементному множеству.

Решением данной задачи можно считать матрицу 7×7, строки и столбцы которой заполнены парами цифр (см. рис.3).

Пусть L - решетка подмножеств множества. Обозначим $M_n(L)$ матрицы размера $n \times n$ такие, что для $A \in M_n(L) -$

$A(i,j) \in L$. По аналогии с линейной алгеброй определим умножение матриц для $A, B \in M_n(L)$:

$$AB(i,\, j) = \bigvee_{k=1}^{n} (A(i,k) \wedge B(k,\, j))$$

Латинские квадраты, греко-латинские квадраты и квадрат из настоящей работы обладают тем свойством, что $A \cdot A^T = E$, где E- единичная матрица.

Для матрицы A транспонированная матрица A^T это матрица такая, что $A^T(i,j) = A(j,i)$.

№станции Время	1	2	3	4	5	6	7
10:00	1 2			3 4	7 8	5 6	
10:15		1 3	5 7	6 8		2 4	
10:30	6 7		1 4			3 8	2 5
10:45	4 8	2 6		1 5			3 7
11:00	3 5	4 7	2 8		1 6		
11:15		5 8			2 3	1 7	4 6
11:30			3 6	2 7	4 5		1 8

Рис. 3. Окончательный вариант маршрутного листа.

Литература

1. ОЛЕХНИК С.Н. *Старинные занимательные задачи* – М.: «Наука» главная редакция физико-математической литературы, 1988.

2. ТАРАННИКОВ Ю.В. *Комбинаторные свойства дискретных структур и приложения к криптологии* - М.:МЦНМО, 2014.
3. ТРИШИН А.Е. *Способ построения ортогональных латинских квадратов на основе подстановочных двучленов конечных полей* – М.: ТВП.
4. ТУЖИЛИН М. Э. *Об истории исследований латинских квадратов* // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2012. Том 19, выпуск 2. С. 226—227.
5. ШИРЯЕВ А.Н., ЭРЛИХ И.Г., ЯСЬКОВ П.А. – *Вероятность в теоремах и задачах(с доказательством и решениями). Книга 1* - М.:МЦНМО, 2014.
6. ШМАТКОВ В. Д. *Алгебры инцидентности над решетками*//Успехи математических наук.-1992-т.47-вып4-с.217-218-1992.
7. EULER L. *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques.* — Middelburg, 1782.

PRACTICAL APPLICATION ORTHOGONAL LATIN SQUARES FOR THE PROBLEM OF A ITINERARY.

Ekaterina Rusakova, Ryazan State Radio Engineering University, Ryazan, student (katya._rus@mail.ru).

Abstract: The article is devoted to the study of Latin and orthogonal Latin squares, the problem of finding them first raised the Euler in 1782. Some properties of Latin squares and their practical application on the basis of own problem.

Keywords: Latin squares, orthogonal Latin squares, Euler, properties of orthogonal Latin squares, the problem of the itinerary.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором…

Поступила в редакцию ...заполняется редактором…
Опубликована ...заполняется редактором…