

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЕМ ТОЛПЫ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ

И.Н. Барабанов, Д.А. Новиков

(Институт проблем управления РАН, Москва)

Формулируется и решается задача динамического управления возбуждением толпы в непрерывном времени за счет выбора числа внедряемых в каждый момент времени «провокаторов».

Ключевые слова: коллективное поведение, модель Грановеттера, стохастические модели управления толпой.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи управления *конформным принятием решений* агентами, осуществляющими бинарный выбор – «бездействовать» или «действовать» - исследуются в рамках моделей *коллективного поведения*, основывающихся на классической модели М. Грановеттера [9] (см. обзоры в [3, 7]).

Если речь идет о коллективном поведении *агентов*, составляющих *толпу* [4], то управление содержательно заключается в выборе доли внедряемых в толпу агентов, которые всегда действуют (условно таких агентов называют «*провокаторами*»). Задачи данного класса можно условно классифицировать по следующим основаниям: *дискретность* или *непрерывность* времени, однократность или многократность осуществления управленческих воздействий (соответственно – *постоянные управления* и *управления, зависящие от времени*), *программное* или *позиционное управление*.

В статье [4] сформулирована и решена задача выбора управляющим органом – *центром* – оптимального значения однократного (постоянного во

времени) управленческого воздействия на толпу, функционирующую в дискретном времени. В статье [1] эта задача обобщена на случай многократных программных управленческих воздействий, реализуемых также в дискретном времени.

Настоящая работа посвящена моделям управления толпой с непрерывным временем.

Собственно модель толпы (обобщение модели Грановеттера на случай непрерывного времени) заимствована из работ [6, 8]. Так, считается, что, если известна доля $x_0 \in [0; 1]$ агентов, действующих в начальный (нулевой) момент времени, то в дальнейшем ее эволюция во времени $x(t)$, $t \geq 0$ описывается уравнением

$$(1) \quad \dot{x} = F(x) - x,$$

где $F(\cdot)$ – известная непрерывная функция, обладающая свойствами функции распределения [3, 4], такая что $F(0) = 0$. Введение управления $u(t) \in [0; 1]$ по аналогии с тем, как это делается в [1, 4], приводит к управляемой динамической системе

$$(2) \quad \dot{x} = u(t) + (1 - u(t))F(x) - x.$$

Изложение материала настоящей работы следующее. Во втором разделе изучаются множество достижимости и свойство «монотонности траекторий» по управлению. Затем (в третьем разделе) в соответствии с приведенной выше системой классификаций исследуется случай постоянных управлений. Четвертый раздел посвящен моделям, в которых цель управления заключается в возбуждении всей толпы. В заключительном (пятом) разделе рассматривается случай позиционного управления.

2. МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ И МОНОТОННОСТЬ

Сформулируем следующую лемму, результат которой используется ниже.

Рассмотрим функции $G_1(x, t)$ и $G_2(x, t): R \times [t_0, +\infty) \rightarrow R$ непрерывно дифференцируемые по x и непрерывные по t . Кроме того, будем считать,

что функции G_1 и G_2 таковы, что решения задач Коши для дифференциальных уравнений $\dot{x} = G_i(x, t)$, $i = 1, 2$, с начальными условиями (t_0, x_0) , $x_0 \in R$ бесконечно продолжимы по t . Обозначим эти решения задач Коши $x_i(t, (t_0, x_0))$, $i = 1, 2$ соответственно.

Лемма. Пусть $\forall x \in R, \forall t \geq t_0 \rightarrow G_1(x, t) > G_2(x, t)$. Тогда $\forall t > t_0 \rightarrow x_1(t, (t_0, x_0)) > x_2(t, (t_0, x_0))$.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Обозначим через $x_t(u)$ значение доли действующих агентов в момент времени t при использовании управления $u(\cdot)$. В силу того, что $\forall x \in [0; 1]$ $F(x) \leq 1$, а правая часть выражения (1) монотонна по u при каждом t , справедливо следующее

Утверждение 1. Если $\forall t \geq t_0 \rightarrow u_1(t) > u_2(t)$ и $x_0(u_1) = x_0(u_2)$, то $\forall t > t_0$ $x_t(u_1) > x_t(u_2)$.

Предположим, что на управления наложено *ограничение*:

$$(3) u(t) \leq \Delta, t \geq t_0,$$

где $\Delta \in [0; 1]$ – некоторая константа.

Далее будем считать, что $t_0=0$, $x(t_0)=x(0)=0$, т.е. в начальный момент времени толпа не возбуждена.

Если *критерием эффективности* является доля агентов, действующих в заданный момент времени $T > 0$, то соответствующая *задача терминального управления* имеет вид:

$$(4) \begin{cases} x_T(u) \rightarrow \max_{u(\cdot)}, \\ (2), (3). \end{cases}$$

Приведем ряд утверждений (утв. 2-4), являющихся аналогами соответствующих утверждений в [1].

Утверждение 2. Решение задачи (4) имеет вид: $u(t) = \Delta, t \in [0; T]$.

Обозначим через $\tau(\hat{x}, u) = \min \{t \geq 0 \mid x_t(u) \geq \hat{x}\}$ самый ранний момент времени, в который доля действующих агентов достигнет заданного значения

$\hat{x}$ (если множество $\{t \geq 0 \mid x_t(u) \geq \hat{x}\}$ пусто, то положим $\tau(\hat{x}, u) = +\infty$). В рамках рассматриваемой модели можно сформулировать следующую задачу о быстродействии:

$$(5) \quad \begin{cases} \tau(\hat{x}, u) \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \\ (2), (3). \end{cases}$$

Утверждение 3. Решение задачи (5) имеет вид: $u(t) = \Delta$, $t \in [0; \tau]$.

Содержательно, как и в моделях с дискретным временем [1], в рамках задачи (4) или (5) центру наиболее выгодно внедрить в толпу в начальный момент времени максимальное допустимое число провокаторов и больше ничего не делать (не пытаться, например, потом уменьшать, а затем опять увеличивать число внедренных провокаторов в последующие моменты времени). Такая структура оптимального решения обусловлена тем, что в моделях (4) и (5) центр не несет затрат на внедрение и/или содержание провокаторов.

Исследуем свойства множества достижимости $D = \bigcup_{u(t) \in [0; \Delta]} x_T(u)$,

$D \subseteq [0; 1]$ в силу того, что правая часть динамической системы (2) обращается в ноль при $x = 1$.

С точки зрения возможных приложений значительный интерес представляет случай т.н. *постоянных управлений*: $u(t) = v$, $t \geq 0$, при использовании которых доля $v \in [0; \Delta]$ провокаторов во все моменты времени одинакова. Обозначим через $x_T(\Delta) = x_T(u(t) \equiv \Delta)$, $t \in [0; T]$, через $D_0 = \bigcup_{v \in [0; \Delta]} x_T(v) \subseteq [0; 1]$ - множество достижимости при постоянных управлениях. Так как $x_T(v)$ - монотонное (в силу утверждения 1) непрерывное отображение $[0; \Delta]$ в $[0; 1]$, причем $x_T(0) = 0$, то справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. $D_0 = [0; x_T(\Delta)]$.

Рассмотрим модели, учитывающие *затраты центра на управление*. При фиксированной «цене» $\lambda \geq 0$ содержания одного провокатора в единицу времени, затраты центра за время $\tau \geq 0$ примут вид:

$$(6) \quad c_t(u) = \lambda \int_0^{\tau} u(t) dt.$$

Пусть заданы монотонные функции: терминальный выигрыш центра $H(\cdot)$ от доли действующих агентов и текущий выигрыш $h(\cdot)$. Тогда «обобщением» задачи (4) будет задача

$$(7) \quad \begin{cases} H(x_T(u)) + \int_0^T h(x(t)) dt - c_T(u) \rightarrow \max_u, \\ (2), (3). \end{cases}$$

Если заданы ограничения на «суммарные» затраты C центра, то задачу типа (7) можно сформулировать в виде:

$$(8) \quad \begin{cases} H(x_T(u)) + \int_0^T h(x(t)) dt \rightarrow \max_u, \\ (2), c_T(u) \leq C. \end{cases}$$

Возможным вариантом задач типа (4), (5), (7), (8) будет *задача минимизации затрат* по обеспечению к моменту времени T заданной доли $\hat{x}$ действующих агентов:

$$(9) \quad \begin{cases} c_T(u) \rightarrow \min_u, \\ x_T(u) \geq \hat{x}, \\ (2). \end{cases}$$

Задачи типа (7)-(9) приводятся к стандартным задачам оптимального управления.

Пример 1. Рассмотрим задачу (9) в случае, когда $F(x) = x$. Предположим, что $x_0 = 0$, а затраты центра задаются (6) с $\lambda_0 = 1$. В результате получим следующую задачу оптимального программного управления с закрепленными концами:

$$\dot{x} = u(1 - x),$$

$$(10) \quad \begin{aligned} x(0) &= 0, x(T) = \hat{x}, \\ 0 &\leq u \leq \Delta, \end{aligned}$$

$$\int_0^T u(t) dt \rightarrow \min_{u \in [0, \Delta]}.$$

Запишем функцию Понтрягина: $H = \psi(u(1-x)) - u$ для (10). В соответствии с принципом максимума эта функция должна принимать максимальные значения по u . В силу линейности функции по u максимум достигается на концах отрезка $[0, \Delta]$ в зависимости от знака коэффициента при u , т.е. можно записать

$$(11) \quad u = \frac{\Delta}{2} (\text{sign}(\psi(1-x)) - 1) + 1.$$

Линейность по управлению функции Понтрягина является следствием линейности по управлению и правой части динамической системы (2), и функционала (6). То есть справедливо следующее

Утверждение 5. Если ограничения в задачах оптимального управления типа (7)-(9) линейны по управлению, то оптимальное программное управление будет иметь структуру, описываемую выражением (11), в рамках которой значение управления в каждый момент времени равно либо максимально возможной, либо минимально возможной, величине.

Уравнения Гамильтона выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \psi} = u(1-x), \\ \dot{\psi} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = u\psi. \end{aligned}$$

Краевые условия накладываются только на первое уравнение. Решением первого уравнения при $u = 0$ будет константа, а при $u = \Delta$ – функция

$$x(t) = 1 - (1 - x(t_0))e^{-\Delta(t-t_0)}.$$

Из этого выражения возникает ограничение на максимальное число провокаторов, необходимое для того, чтобы суметь перевести толпу из нулевого положения в $\hat{x}$: $\Delta \geq \frac{1}{T} \log \frac{1}{1-\hat{x}}$.

При этом существует минимальное время $t_{\min} = \frac{1}{\Delta} \log \frac{1}{1-\hat{x}}$, в течение которого управление должно принимать максимальное значение Δ , а в остальные моменты управление должно быть равным 0. В частности, одним из решений задачи (10) будет

$$(12) \quad u = \begin{cases} \Delta, & t \leq t_{\min} \\ 0, & t_{\min} < t \leq T \end{cases},$$

когда максимальное количество провокаторов вводится сразу и поддерживается постоянным в течение $t_{\min}$.

Структура оптимального решения данной задачи (кусочно-постоянная функция, принимающая значения 0 или Δ) может привести к необходимости минимизировать количество переключений (разрывов) управления. Такое дополнительное ограничение содержательно оправдывается тем, что центр может нести какие-либо дополнительные затраты на ввод или вывод провокаторов. В случае, когда подобное ограничение имеет место в рассматриваемой задаче, из всего множества оптимальных управлений наилучшими остаются либо (12), либо управление $u = \begin{cases} \Delta, & t \in [T - t_{\min}, T], \\ 0, & t < T - t_{\min}. \end{cases}$ •

3. ПОСТОЯННЫЕ УПРАВЛЕНИЯ

Из выражения (6) следует, что при постоянных управлениях $c_t(v) = \lambda \cdot v \cdot \tau$. При заданных функциях $F(\cdot)$ (т.е. при известной зависимости $x_t(v)$) задачи (7)-(9) сводятся к типовым задачам скалярной оптимизации.

Пример 2. Пусть $F(x) = x$, $T = 1$, $x_0 = 0$, $H(x) = x$, $h(x) = \gamma x$, где $\gamma \geq 0$ – известная константа. Из выражения (1) находим:

$$(13) x_t(u) = 1 - \exp \left(- \int_0^t u(y) dy \right).$$

При постоянных управлениях $x_t(v) = 1 - e^{-vt}$.

Задача (7) примет вид следующей задачи скалярной оптимизации:

$$(14) e^{-v} \left(\frac{\gamma}{v} - 1 \right) - \frac{\gamma}{v} - \lambda v \rightarrow \max_{v \in [0; \Delta]}.$$

Задача (8) примет вид следующей задачи скалярной оптимизации:

$$(15) e^{-v} \left(\frac{\gamma}{v} - 1 \right) - \frac{\gamma}{v} \rightarrow \max_{v \in [0; \Delta]}.$$

$$\text{Задача (9) примет вид: } \begin{cases} v \rightarrow \min_{v \in [0; 1]}, \\ 1 - e^{-v} = \hat{x}. \end{cases} \text{ Ее решение: } v = \ln \left(\frac{1}{1 - \hat{x}} \right). \bullet$$

4. ЗАДАЧА ВОЗБУЖДЕНИЯ ВСЕЙ ТОЛПЫ

Рассмотрим «асимптотику» решаемых задач при $T = +\infty$. В настоящем разделе будем предполагать, как и для аналогичной модели в [1], что функция $F(\cdot)$ имеет единственную точку перегиба, $F(0) = 0$, уравнение $F(x) = x$ имеет на интервале $(0; 1)$ единственное решение – точку $q > 0$, причем $\forall x \in (0; q) F(x) < x, \forall x \in (q; 1) F(x) > x$. Примеры функций $F(\cdot)$, удовлетворяющих введенным предположениям, приведены в [1]. Также будем считать, что целью управления является «возбуждение» всех агентов с наименьшими затратами.

Из введенных предположений о свойствах функции $F(\cdot)$ следует, что если для некоторого момента времени τ выполнено $x(\tau) > q$, тогда, даже при $u(t) \equiv 0 \quad \forall t > \tau$, траектория $x_t(u)$ будет неубывающей, причем $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t(u) = 1$. Как отмечалось в [1], содержательно это свойство означает, что рассматриваемая толпа такова, что *область притяжения* нулевого положения равновесия в отсутствии управления (без внедренных провокаторов) составляет полуинтервал $[0; q)$, т.е. в этой толпе достаточно обеспечить «искусственное» возбуждение более чем q (доли) агентов, а затем даже в отсутствии

управления эта толпа будет «сама» стремиться к единичному равновесному состоянию.

Обозначим через u^τ решение следующей задачи:

$$(16) \int_0^\tau u(t)dt \rightarrow \min_{u: u(t) \in [0; \Delta], x_\tau(u) > q}.$$

Вычислим $Q_\tau = \int_0^\tau u^\tau(t)dt$ и найдем $\tau^* = \arg \min_{\tau \geq 0} Q_\tau$.

Решение задачи (16) существует (см. содержательные интерпретации в [1]) при условии

$$(17) \Delta > \Delta^* = \max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)}.$$

В силу введенных предположений о свойствах функции распределения, структура оптимального решения рассматриваемой задачи характеризуется следующим образом.

Утверждение 6. Если выполнено условие (17), то $u^\tau(t) \equiv 0$ при $t > \tau$.

Пример 3. В [2] была построена двухпараметрическая (с параметрами a и b) функция $F(\cdot)$, наилучшим образом описывающая структуру распространения активности в русскоязычных сегментах онлайн-социальных сетей (СС) LiveJournal, FaceBook и Twitter. Эта функция имеет вид:

$$(18) F_{a,b}(x) = \frac{\arctg(a(x-b)) + a \arctg(ab)}{\arctg(a(1-b)) + a \arctg(ab)}, a \approx [7; 15], b \in [0; 1].$$

Выберем $a = 13$ (параметр, соответствующий СС Facebook), $b = 0,4$. Тогда, как показано в [1], $q \approx 0,375$ и $\Delta^* \approx 0,169$. •

5. ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

В предыдущих разделах рассматривалась задача синтеза оптимального программного управления. В то же время, в задачах управления возбуждением толпы может использоваться и позиционное управление.

Рассмотрим два возможных варианта, имеющих прозрачные содержательные интерпретации.

В первом случае задача заключается в поиске закона позиционного управления $\tilde{u}(x):[0;1] \rightarrow [0;1]$, обеспечивающего максимальное возбуждение толпы (в смысле задач (4) или (5)) при тех или иных ограничениях на траекторию системы и/или на управления.

Пусть управление ограничено по аналогии с выражением (3):

$$(19) \quad \tilde{u}(x) \leq \Delta, x \in [0;1],$$

и имеется дополнительное ограничение на траекторию:

$$(20) \quad \dot{x}(t) \leq \delta, t \geq 0,$$

где $\delta > 0$ – известная константа. Содержательно условие (20) означает, например, что слишком быстрый рост (в смысле прироста в единицу времени) доли возбужденных агентов обнаруживается соответствующими органами, делающими дальнейшее управление невозможным. Следовательно, центр, решающий задачу управления возбуждением толпы, должен стремиться максимизировать значение доли возбужденных агентов при условиях (19) и (20). Решение соответствующей задачи, в силу свойств динамической системы (2), устанавливаемых леммой, имеет простой вид:

$$(21) \quad \tilde{u}^*(x) = \min \left\{ \Delta; \max \left\{ 0; \frac{x + \delta - F(x)}{1 - F(x)} \right\} \right\}.$$

Дробь, фигурирующая в выражении (21), получается в результате приравнивания правой части (1) константе δ .

Отметим, что при малых значениях δ может оказаться, что не существует неотрицательного управления, удовлетворяющего (20).

Пример 4. Пусть в условиях примера 3 $\delta = 0,35$. Тогда оптимальное значение позиционного управления приведено на Рис. 1 (пунктиром на данном рисунке изображены биссектриса и функция $F(\cdot)$, тонкой непрерывной линией – ограничение сверху, фигурирующее в выражении (21). •

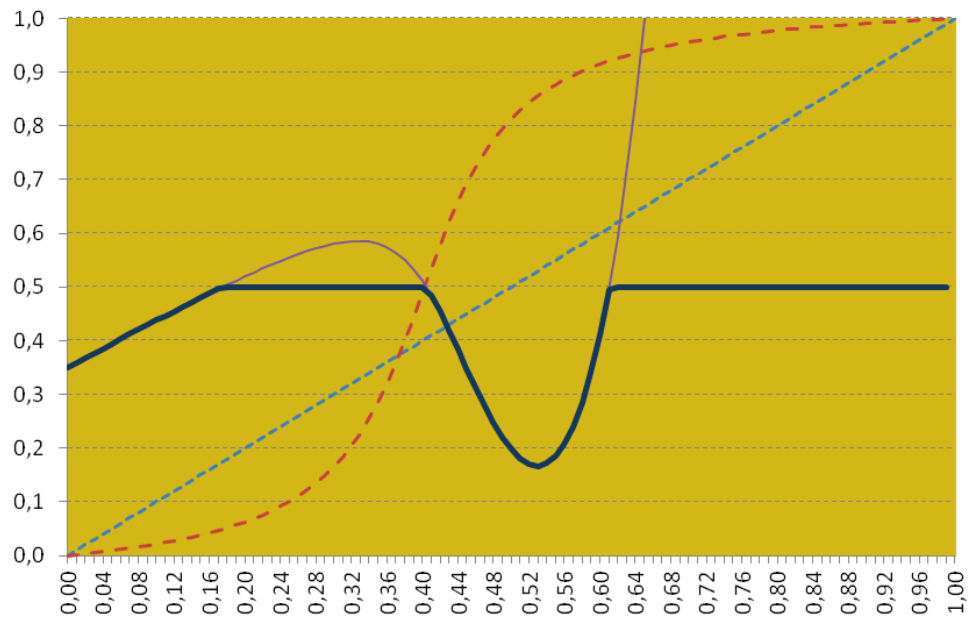


Рис. 1. Оптимальное позиционное управление в примере 4

Второй случай позиционного управления относится к так называемой задаче иммунизации сети [4], в которой управляющий орган заинтересован в снижении доли действующих агентов, причем возможными управлениями с его стороны является число (или доля) внедряемых в топку *иммунизаторов* – агентов, которые всегда бездействуют.

Как показано в [4], если $w \in [0; 1]$ – доля иммунизаторов, то динамика доли действующих агентов будет удовлетворять уравнению

$$(22) \quad \dot{x} = (1-w)F(x) - x, \quad x \in [0; 1].$$

Пусть $\tilde{w}(x):[0;1] \rightarrow [0;1]$ – позиционное управление, тогда, если цель управляющего органа – снижение доли действующих агентов:

$$(23) \quad \dot{x}(t) \leq 0, \quad t \geq 0,$$

то из (22) получаем следующее условие на позиционное управление:

$$(24) \quad \tilde{w}(x) \geq 1 - \frac{x}{F(x)}.$$

Величина $\Delta_{\min} = \max_{x \in [0;1]} (1 - \frac{x}{F(x)})$ характеризует минимальные ограничения на размер управлений в каждый момент времени, при котором система (22) «управляема» в смысле (23).

Пример 5. В условиях примера 4 ограничение (24) снизу на величину позиционного управления изображено жирной линией на Рис. 2 (пунктиром на данном рисунке изображены биссектриса и функция распределения $F(\cdot)$).

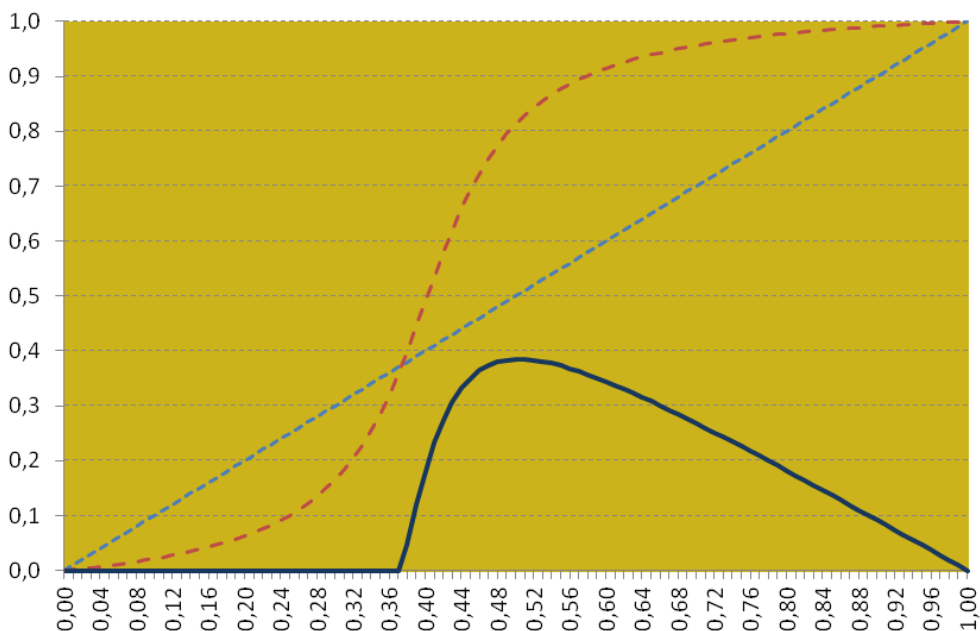


Рис. 2. Минимальное позиционное управление в примере 5

Величина $\Delta_{\min}$ в рассматриваемом примере равна примерно 0,385. ●

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе описаны задачи управления возбуждением толпы в непрерывном времени за счет внедрения в нее провокаторов или иммунизаторов.

Значительный интерес для дальнейших исследований представляет рассмотрение дифференциальной игры, описывающей ситуацию информационного противоборства между двумя управляющими органами, принимающими в непрерывном времени решения о долях (или количествах) внедряемых провокаторов u и иммунизаторов w соответственно (соответствующая статическая задача, которая может служить «точкой

отсчета», рассмотрена в [6]). Объект управления при этом будет описываться динамической системой [4] $\dot{x} = u(1-w) + (1-u-w+2uw)F(x) - x$.

Вторым перспективным направлением представляется рассмотрение задач динамического (программного и/или позиционного) управления толпой, описываемой уравнением переноса [6]:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} ([u + (1-u)F(x) - x] p(x, t)) = 0, \text{ т.е. моделью, в которой состояние толпы}$$

в каждый момент времени описывается не скалярной долей действующих агентов, а соответствующим распределением $p(x, t)$ вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1 Барабанов И.Н., Новиков Д.А. Динамические модели управления возбуждением толпы в дискретном времени // Автоматика и телемеханика. 2016. (в печати)

2 Батов А.В., Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д. Микро- и макромодели социальных сетей: идентификация и имитационные эксперименты // Проблемы управления. - 2014. - № 6. - С. 45 – 51.

3 Бреер В.В. Модели конформного поведения (обзор) // Проблемы управления. - 2014. - № 1. - С. 2 – 13. - № 2. - С. 2 – 17.

4 Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д. Стохастические модели управления толпой // Управление большими системами. – 2014. – № 52. – С. 85 - 117.

5 Новиков Д.А. Модели информационного противоборства в управлении толпой // Проблемы управления. - 2015. - № 3. - С. 29 – 39.

6 Рогаткин А.Д. Модель Грановеттера с непрерывным временем // Управление большими системами. 2016. (в печати)

7 Словохотов Ю.Л. Физика и социофизика // Проблемы управления. - 2012. - Ч. 1. - № 1. - С. 2 – 20; Ч. 2. - № 2. - С. 2 – 31; Ч. 3. - № 3. - С. 2 – 34.

8 Akhmetzhanov A.R., Worden L., Dushoff J. Effects of Mixing in Threshold Models of Social Behavior // Phys. Rev. 2013. E 88. 012816.

9 Granovetter M. Threshold Models of Collective Behavior // AJS. – 1978. – Vol. 83. N 6. – P. 1420–1443.

Приложение

Доказательство леммы. По условию леммы, $G_1(x_0, t_0) > G_2(x_0, t_0)$, т.е.

$$\left. \frac{d}{dt} x_1(t, (t_0, x_0)) \right|_{t=t_0} > \left. \frac{d}{dt} x_2(t, (t_0, x_0)) \right|_{t=t_0}. \text{ Поэтому найдется такое число } \varepsilon > 0, \text{ что}$$

$\forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow x_1(t, (t_0, x_0)) > x_2(t, (t_0, x_0))$, т.е. график решения первого уравнения лежит выше графика второго на всем полуинтервале $(t_0, t_0 + \varepsilon]$.

Покажем, что такое расположение графиков справедливо для всех $t \geq t_0$.

Предположим противное, т.е. $\exists \hat{t} : x_1(\hat{t}, (t_0, x_0)) = x_2(\hat{t}, (t_0, x_0)) = \hat{x}$. Без ограничения общности будем считать, что $\hat{t}$ – первый момент достижения графиком x_2 графика x_1 , т.е. $\hat{t} = \inf \{t > t_0 + \varepsilon : x_1(t, (t_0, x_0)) = x_2(t, (t_0, x_0))\} < +\infty$. Очевидно, что $\hat{t} \geq t_0 + \varepsilon > t_0$ и что $\forall t \in (t_0, \hat{t}) \rightarrow x_1(t, (t_0, x_0)) > x_2(t, (t_0, x_0))$.

Отсюда для $\tau \in [0, \hat{t} - t_0)$ справедливо

$$x_1(\hat{t} - \tau, (t_0, x_0)) - x_1(\hat{t}, (t_0, x_0)) > x_2(\hat{t} - \tau, (t_0, x_0)) - x_2(\hat{t}, (t_0, x_0)),$$

так как вторые слагаемые в обеих частях этого неравенства одинаковы и равны $\hat{x}$. Поделим обе части неравенства на $-\tau$ (знак неравенства сменится на противоположный) и перейдем к пределу при $\tau \rightarrow 0$. В результате получим соотношение для производных решений x_1 и x_2 в точке $\hat{t}$:

$$\left. \frac{d}{dt} x_1(t, (t_0, x_0)) \right|_{t=\hat{t}} \leq \left. \frac{d}{dt} x_2(t, (t_0, x_0)) \right|_{t=\hat{t}}, \text{ откуда следует, что } G_1(\hat{x}, \hat{t}) \leq G_2(\hat{x}, \hat{t}).$$

Выполнение этого неравенства одновременно с выполнением условия утверждения невозможно, следовательно, предположение неверно. Лемма доказана.