

УДК 342.8  
ББК 67.400.5

## ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРОГ ГОЛОСОВАНИЯ КАК ФУНКЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ВАРИАЦИИ СРЕДЫ<sup>1</sup>

Чеботарев П.Ю.<sup>2</sup>, Малышев В.А.<sup>3</sup>, Цодикова Я.Ю.<sup>4</sup>,  
Логинов А.К.<sup>5</sup>, Лезина З.М.<sup>6</sup>, Афонькин В.А.<sup>7</sup>

(Учреждение Российской академии наук Институт проблем  
управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*В рамках модели социальной динамики, определяемой коллективными решениями в стохастической среде, рассмотрен случай однородного общества, состоящего из рациональных экономических субъектов (эгоистов). Получены выражения для оптимального порога голосования и максимального ожидаемого приращения капитала как функции от параметров среды. Найдена оценка скорости изменения оптимального порога в нуле, выражаемая абсолютной константой.*

Ключевые слова: социальная динамика, голосование, стохастическая среда, голосование, *homines eonomici*, оптимальный порог голосования.

### 1. Введение

Рассмотрим модель голосования в стохастической среде [1] в случае, когда общество состоит из  $n$  рациональных экономи-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-07-00990.

<sup>2</sup> Павел Юрьевич Чеботарев, доктор физико-математических наук (pavel4e@gmail.com).

<sup>3</sup> Виталий Алексеевич Малышев (vit312@gmail.com).

<sup>4</sup> Яна Юльевна Цодикова (codikova@mail.ru).

<sup>5</sup> Антон Константинович Логинов (a\_k\_log@mail.ru).

<sup>6</sup> Зоя Марковна Лезина, кандидат технических наук (lezinazo@gmail.com).

<sup>7</sup> Вадим Александрович Афонькин (afonkinvadim@yandex.ru).

ческих субъектов (*homines economici*), или, в иной терминологии, эгоистов. Пусть  $\alpha \in [0, 1]$  – строгий порог голосования, т.е. число, превышение которого долей общества, поддерживающей предложение, необходимо и достаточно для принятия этого предложения.

Каждый участник характеризуется текущим значением капитала. Предложение среды есть вектор предлагаемых приращений капиталов участников. Номо *economicus* голосует за те и только те предложения, которые увеличивают его капитал.

Приращения капиталов, составляющие предложение среды, есть реализации независимых одинаково распределенных случайных величин. В данной работе рассматривается случай, когда эти величины имеют распределение  $N(\mu, \sigma)$ , т.е. нормальны с математическим ожиданием  $\mu$  и стандартным отклонением  $\sigma$ . Предложение принимается (и реализуется), если оно одобрено обществом с использованием процедуры голосования « $\alpha$ -большинство» [7, 5, 6] (большинство со строгим порогом  $\alpha$ ). Голосование проводится многократно.

Отношение  $\sigma/\mu$  называют коэффициентом вариации случайной величины. Далее нам понадобится обратный коэффициент вариации:  $\rho = \mu/\sigma$ , который будем называть приведенным средним среды.

Если  $\rho > 0$ , то возможности, предоставляемые средой, чаще благоприятны, если же  $\rho < 0$ , то преобладают невыгодные предложения. В работе изучается вопрос об оптимальном пороге голосования – пороге, максимизирующем совокупный капитал общества, – и о зависимости его от показателя  $\rho$ , характеризующего благоприятность среды.

## **2. Зависимость приращений капиталов от параметров среды и числа участников**

Зависимость среднего приращения капитала за 1 шаг от параметров среды и порога голосования рассматривалась в [3], где, в частности, было установлено, что голосование простым большинством (т.е. при  $\alpha = 0,5$ ) в умеренно неблагоприятной среде

ведет к разорению общества.

Аналитически эта зависимость выражается следующим предложением.

**Предложение 1.** 1. В обществе, состоящем из  $n$  эгоистов, математическое ожидание приращения капитала участника за 1 шаг равно

$$(1) \quad M(\tilde{d}) = \sigma \sum_{x=[\alpha n]+1}^n \left( \rho + \frac{f}{q} \left( \frac{x}{pn} - 1 \right) \right) b(x|n),$$

где  $p = F(\rho)$ ,  $q = 1 - p = F(-\rho)$ ,  $f = f(\rho)$ ,  $b(x|n) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ ,  $F(\cdot)$  и  $f(\cdot)$  – функция распределения и плотность стандартного нормального распределения  $N(0, 1)$ .

2. Использование стандартной нормальной аппроксимации биномиального распределения приводит к приближению

$$(2) \quad \hat{M}(\tilde{d}) = \sigma \left( \rho F(\tau) + \frac{f}{\sqrt{pqn}} f(\tau) \right),$$

где

$$(3) \quad \tau = \frac{pn - [\alpha n] - 0,5}{\sqrt{pqn}}.$$

Предложение 1 следует из леммы о голосующей нормальной выборке [2]. Легко заметить, что  $p$  и  $q$  – соответственно вероятности положительности и отрицательности одиночного приращения капитала в предложении среды;  $f/\sigma$  – плотность вероятности предложения среды, равного 0.

Нормальную аппроксимацию рекомендуют использовать, когда  $pqn \geq 9$ . При фиксированном  $pqn$  ее точность максимальна при  $p = 0,5$  и снижается, когда  $p$  приближается к 0 или 1. В связи с этим при  $0,1 < p < 0,9$  нормальное приближение часто применяют уже при  $pqn > 5$ . Для значений  $p$ , очень близких к 0 или 1, иногда требуют выполнения условия  $pqn > 25$ .

Зависимость среднего приращения капитала участника за 1 шаг от приведенного среднего среды  $\rho$  при 21 участнике и  $\alpha = 0,5$  показана на рис. 1.

На рис. 1 видно, что при  $\rho \in (-0,9, -0,266)$  среднее приращение капитала составляет заметную отрицательную величину,

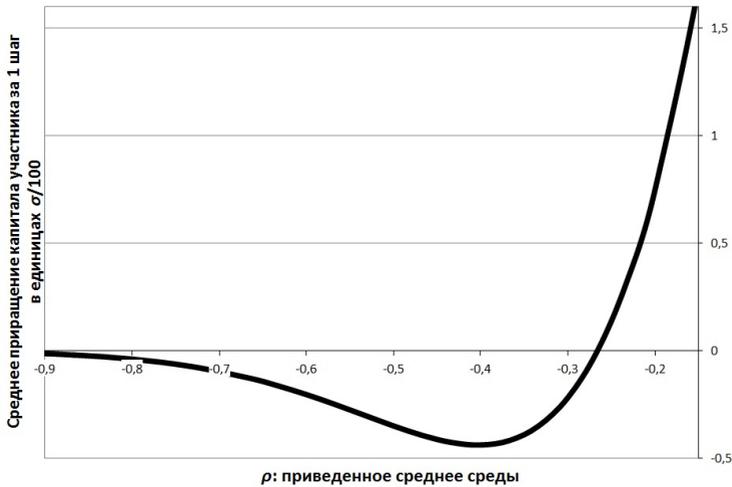


Рис. 1. Среднее приращение капитала участника за 1 шаг: 21 участник,  $\alpha = 0,5$ .

то есть предложения, одобренные большинством, оказываются в среднем невыгодными для общества. Соответствующую часть графика будем называть «ямой ущерба». При  $\rho < -0,9$  отрицательное  $M(\tilde{d})$  очень близко к нулю, поскольку предложения принимаются крайне редко.

Феномен ямы ущерба объясняется тем, что в силу отрицательности  $\rho$  положительные предложения среды в среднем имеют меньший модуль, чем отрицательные. В результате совокупный убыток проигравшего меньшинства систематически превосходит совокупный доход выигравшего большинства. Таким образом, несмотря на стремление всех участников к увеличению капитала и одобрение всех изменений большинством, общество разоряется. Итак, в умеренно неблагоприятной среде решения, принимаемые большинством голосов эгоистов, в среднем уменьшают их суммарный капитал!

Как среднее приращение капитала зависит от числа участников? Эта зависимость иллюстрируется рисунком 2. При уве-

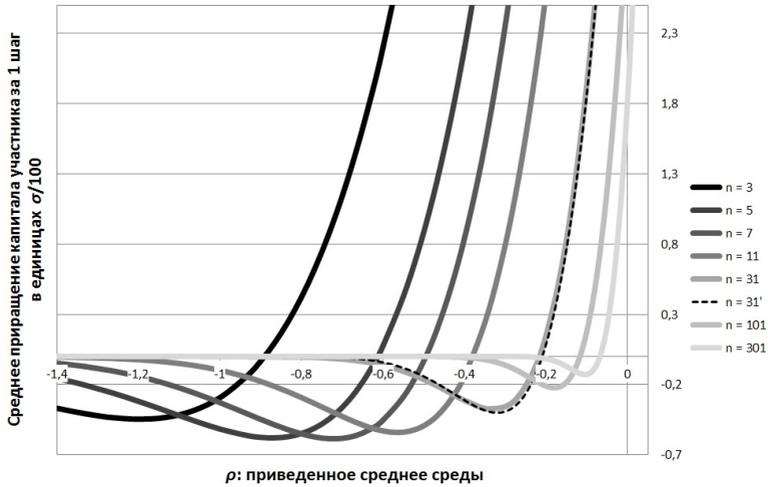


Рис. 2. Среднее приращение капитала участника за 1 шаг при нечетных  $n$  и  $\alpha = 0,5$ .

личении  $n$  точка минимума сдвигается вправо и «яма ущерба» становится уже. Глубина «ям» сначала увеличивается, достигает максимума при  $n = 7$  и при дальнейшем увеличении  $n$  стремится к нулю, монотонно уменьшаясь. Отметим, что при малых  $n$  аппроксимация (2) имеет недостаточную точность и не отражает начальную тенденцию углубления «ям» при росте  $n$ . При  $n = 31$  ее точность (см. пунктирную линию на рис. 2) уже приемлема.

Таким образом, эффект разорения общества в результате решений, принятых большинством, при росте  $n$  постепенно ослабевает. При четных  $n$  «яма» несколько «мельче», чем при нечетных, поскольку де-факто порог голосования оказывается выше: для принятия предложения необходим перевес минимум в два голоса.

Можно заметить, что форма графиков при разных  $n$  сходна. Более того, если обозначить через  $\varphi_n(\rho)$  зависимость  $M(\tilde{d})$  от  $\rho$  при  $n$  участниках и фиксированном  $\sigma$ , то при  $n, n'$  начиная с

15 – 20 имеет место приближительное соотношение

$$(4) \quad \varphi_{n'}(\rho) \approx \sqrt{\frac{n}{n'}} \varphi_n\left(\rho \sqrt{\frac{n'}{n}}\right).$$

Тем самым уменьшение  $n$  в  $k^2$  раз приводит к растяжению графика в  $k$  раз по обеим осям. Совмещение зависимостей  $M(\tilde{d})$  от  $\rho$ , полученное с помощью (4) для разных  $n$ , иллюстрирует рисунок 3, где показаны графики  $\sqrt{n} \varphi_n(\rho/\sqrt{n})$ . В случае, когда

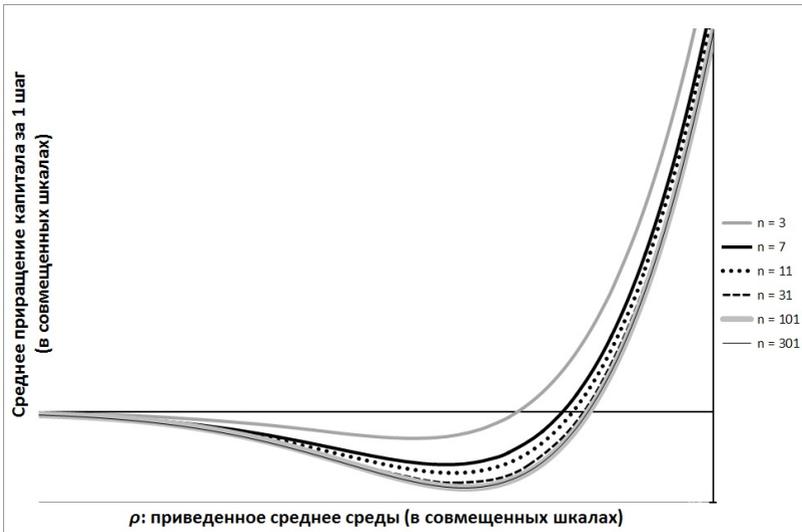


Рис. 3. Совмещение графиков для разных  $n$  (рис. 2) посредством масштабирования (4) по двум осям.

$n$  и  $n'$  больше 30, точность приближения (4) достаточно высока.

Из (2) и (4) следует, что  $k^2$ -кратное увеличение числа участников действует аналогично  $k$ -кратному уменьшению  $\sigma$ . Соответственно, увеличение дисперсии «уравновешивает» такое же кратное увеличение числа голосующих: график зависимости  $M(\tilde{d})$  от  $\rho$  при этих одновременных изменениях почти не меняется. Так, при нечетном  $n$ ,  $\alpha = 0,5$  и  $\rho = 0$  (нейтральной среде) из (2) и (3) следует

$$(5) \quad \hat{M}(\tilde{d}) = \frac{\sigma}{\pi\sqrt{n}}.$$

Для вероятностных схем усреднения такая закономерность вполне естественна.

### 3. Зависимость динамики капиталов от порога голосования $\alpha$

При увеличении порога прохождения предложений  $\alpha$  наблюдаемая «яма ущерба» становится узкой и неглубокой: среднее приращение капитала участника всё меньше заходит в отрицательную область (рис. 4).

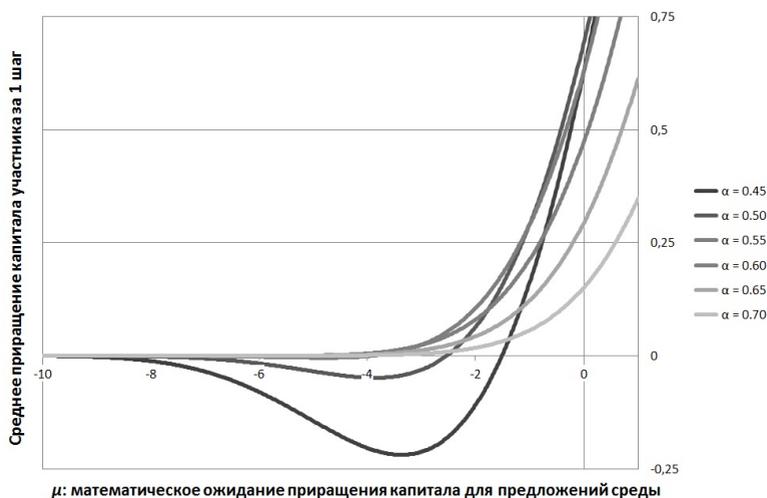


Рис. 4. Среднее приращение капитала участника за 1 шаг при разных порогах  $\alpha$  ( $n = 21$ ,  $\sigma = 10$ ).

В то же время в случае высоких  $\alpha$  скорость роста капитала участника при увеличении  $\mu$  значительно ниже, чем при голосовании простым большинством. Посредством высокого  $\alpha$  общество страхуется от ущерба при умеренно отрицательных  $\mu$ , но одновременно теряет выгоду при больших значениях  $\mu$ , т.е. когда среда более благоприятна. В числе прочих на рис. 4 (где использована аппроксимация (2)) показана кривая для  $\alpha = 0,45$ . Она

имеет относительно широкую и глубокую «яму ущерба», но при увеличении  $\mu$  растет быстрее других и в области положительных  $\mu$  обгоняет кривые, соответствующие  $\alpha \geq 0,5$  (см. также рис. 5). Это означает, что в благоприятной среде можно «рисковать» принимать предложения, поддержанные не большинством, а несколько меньшей долей общества. Несмотря на то, что большинству некоторые из них могут быть невыгодны, выгода меньшинства будет систематически превышать ущерб большинства, и, в силу независимости приращений капитала участников, при достаточно большом числе шагов это приведет к выгоде для всех.

#### **4. Оптимальный порог голосования в обществе, состоящем из эгоистов**

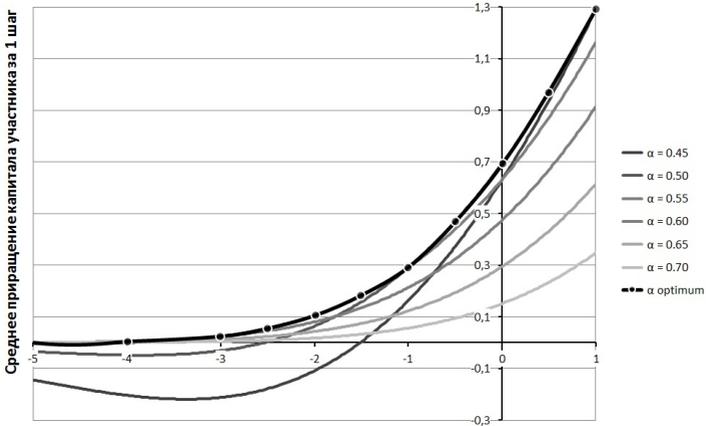
Проведенный анализ показывает, что если  $n$  и  $\sigma$  фиксированы, то при каждом уровне благоприятности среды  $\mu$  имеет оптимальное значение<sup>8</sup> порога голосования  $\alpha$  – это значение, максимизирующее среднее приращение капитала участника.

Оптимальный порог  $\alpha$  можно найти графически. Для всевозможных  $\alpha$  построим кривые зависимости  $M(\tilde{d})$  от  $\mu$  при голосовании с порогом  $\alpha$  и каждому  $\mu$  сопоставим кривую с наибольшей ординатой в точке  $\mu$ . Ей и будет отвечать оптимальное  $\alpha$ . Отметим, что кривой наибольших приращений будет сплайн кривых, показанных на рис. 4 (см. рис. 5), а не их верхняя огибающая (касающаяся бесконечного множества кривых), поскольку при каждом  $n$  возможны лишь  $n + 2$  существенно различных порогов голосования  $\alpha$ :  $\{-\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$  (крайние значения здесь соответствуют принятию и отклонению всех предложений).

При голосовании с оптимальным порогом (рис. 5б) среднее приращение капитала участника положительно при любом  $\mu$ , отсутствует «яма ущерба» и обеспечивается максимально возможный рост капитала при увеличении  $\mu$ .

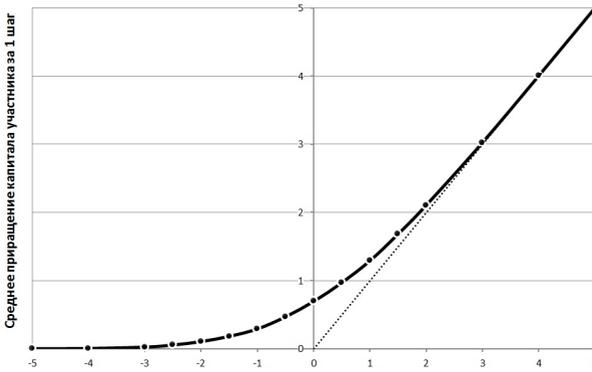
---

<sup>8</sup> О других подходах к оптимизации порога голосования см. [5, 4], а также [7, 8] для случая многократного голосования.



$\mu$ : математическое ожидание приращения капитала для предложений среды

а)



$\mu$ : математическое ожидание приращения капитала для предложений среды

б)

Рис. 5. а) сплайн, максимизирующий приращение капитала по  $\alpha$ ;  
 б) среднее приращение капитала участника при голосовании с оптимальным порогом  $\alpha$  ( $n = 21$ ,  $\sigma = 10$ ).

Какие же значения принимает оптимальный порог голосования? Прежде всего, зависимость его от  $\mu$  – «лестница» со ступеньками равной высоты в силу отмеченной выше конечности существующих различных порогов голосования. Если порог  $\alpha$  оп-

тимален и  $[\alpha_1 n] = [\alpha n]$ , то  $\alpha_1$  – также оптимальный порог. На рис. 6 показан график среднего значения класса эквивалентности оптимальных порогов голосования как функция  $\rho \in [-0,5, 0,5]$  при  $n = 21$ ; вертикальные отрезки проведены для наглядности.

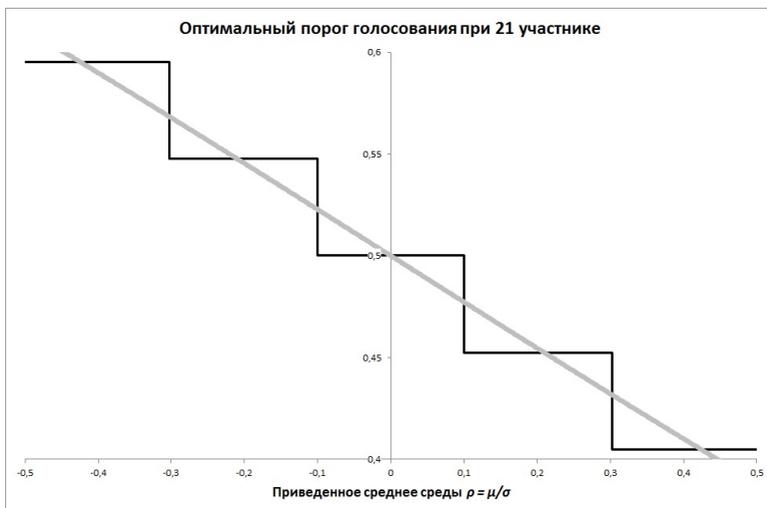


Рис. 6. Средние значения классов эквивалентности оптимальных порогов голосования  $\alpha_0$  («лестница») при  $n = 21$  и оценка (б) оптимального порога голосования (серая линия).

Если  $\bar{\alpha}_0$  – среднее значения класса эквивалентности оптимальных порогов голосования при фиксированных  $n, \sigma$  и  $\mu$ , то сам этот класс есть полуинтервал  $[\bar{\alpha}_0 - \frac{1}{2n}, \bar{\alpha}_0 + \frac{1}{2n}]$ . За пределами отрезка  $\rho \in [-0,7, 0,7]$  при голосовании с порогом, близким к оптимальному, и заметным числом участников предложения либо практически никогда не принимаются (левее этого отрезка), либо (правее отрезка) практически всегда принимаются (см. рис. 5б). Поэтому задача точного определения оптимального порога теряет здесь практический смысл.

Оценка оптимального порога голосования  $\alpha$  в реальных ситуациях представляется в принципе решаемой задачей. Для полу-

чения такой оценки нужно из опыта оценить  $\rho = \mu/\sigma$  и иметь основания считать, что рассматриваемая модель хотя бы приблизительно адекватна. Но даже в случае, когда оценивание  $\rho$  и вопрос об адекватности модели вызывают затруднения, общий вывод о выгоде повышения порога голосования, когда среда становится менее благоприятной, по-видимому, остается верным. Этот вывод основан на том, что в агрессивной среде совокупные потери меньшинства могут систематически превышать суммарный выигрыш большинства. Здесь проявляется фундаментальное свойство стандартных процедур голосования: голоса учитываются независимо от важности рассматриваемого вопроса для голосующих – от того, много или мало каждый из них приобретает/терять в случае принятия предложения.

В разделе 5 статьи дана аппроксимация оптимального порога голосования в обществе, состоящем из *homines economici*.

## 5. Выражение для оптимального порога голосования

Оценку оптимального порога голосования  $\alpha_0$  дает следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha_0$  – порог голосования в обществе, состоящем из эгоистов, обеспечивающий наибольшее значение математического ожидания приращения капитала за один шаг. Тогда использование стандартной нормальной аппроксимации биномиального распределения приводит к:

– оценке оптимального порога голосования

$$(6) \quad \hat{\alpha}_0 = p \left( 1 - \frac{q\rho}{f} \right);$$

– выражению для ожидаемого приращения капитала при голосовании с оптимальным порогом

$$(7) \quad \hat{M}(\tilde{d}_0) = \mu F\left(\frac{\mu}{\nu}\right) + \nu f\left(\frac{\mu}{\nu}\right), \quad \text{где } \nu = \frac{\sigma f}{\sqrt{pqn}},$$

а остальные обозначения приведены в разделе 1 и предложении 1.

Доказательства приведены в приложении.

Порог (6) определяется параметрами среды и не зависит от  $n$ . Поскольку  $p$ ,  $q$  и  $f$  есть функции от  $\rho$ , единственным параметром, определяющим оценку  $\hat{\alpha}_0$ , является  $\rho$ . Подробная запись этого выражения:

$$\hat{\alpha}_0 = F(\rho) \left( 1 - \frac{\rho F(-\rho)}{f(\rho)} \right).$$

Ступенчатая зависимость типа «лестницы», показанной на рис. 6, получается из этой оценки применением формулы

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{[\hat{\alpha}_0 n] + 0,5}{n}.$$

Отметим, что теорема 1 дает исключительно простые аналитические оценки для оптимального порога и соответствующего ему среднего приращения капитала участника. Для сравнения, задачи нахождения абсцисс и ординат минимумов функций  $M(\vec{d})$ , показанных на рисунках 2 и 4, а также точек их пересечения с горизонтальной осью не приводят к простым аналитическим выражениям.

## **6. Скорость изменения оптимального порога голосования как функция $\rho$**

Зависимость  $\hat{\alpha}_0$  от  $\rho$  на рис. 6 выглядит линейной, однако, в силу финитности  $\alpha$  и инфинитности  $\rho$ , на большем интервале значений аргумента кажущаяся линейность нарушается (рис. 7).

Чтобы найти угол наклона кривой  $\hat{\alpha}_0(\rho)$  в нуле, продифференцируем функцию (6) по  $\rho$ .

### **Предложение 2.**

$$(8) \quad \frac{d\hat{\alpha}_0(\rho)}{d\rho} = \frac{(f + p\rho)(f - q\rho) - qp}{f}.$$

Функция  $d\hat{\alpha}_0(\rho)/d\rho$  отрицательна; модуль ее показан на рис. 7.

При  $\rho = 0$  имеем  $p = q = 1/2$ ,  $f = 1/\sqrt{2\pi}$ . Подставив эти значения в (8), получаем

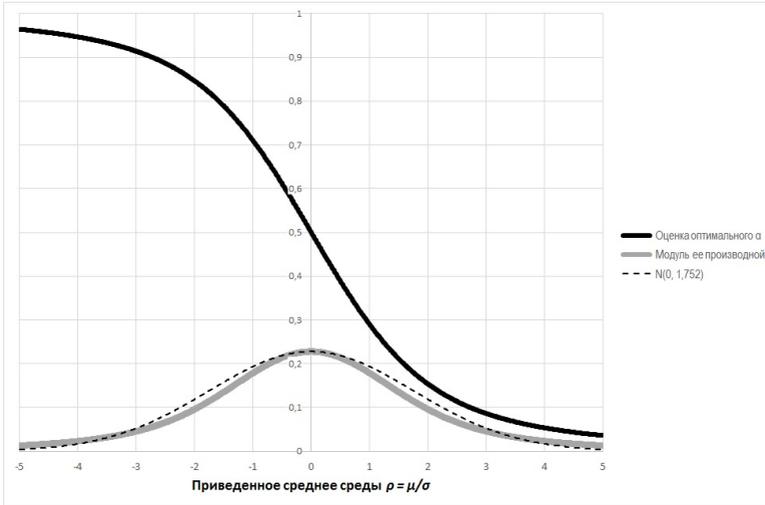


Рис. 7. Оценка  $\hat{\alpha}_0$  оптимального порога голосования и взятая с минусом производная выражения (6). Последняя, интерпретированная как весовая функция распределения, имеет «тяжелые хвосты», что заметно при сравнении ее с нормальной плотностью, показанной пунктиром.

**Следствие 1.**

$$\left. \frac{d\hat{\alpha}_0(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \approx -0,2277.$$

Найденное значение производной в нуле не зависит ни от числа участников, ни от других параметров модели. Вывод: если в результате кризиса  $\mu$  уменьшилось от 0 до  $-\frac{\sigma}{2}$  (т.е.  $\rho$  изменилось от 0 до  $-\frac{1}{2}$ ), то оптимальный порог голосования увеличивается с 50% до 61%. Если же  $\mu = -\sigma$ , то (с поправкой на нелинейность  $\hat{\alpha}_0(\rho)$ )  $\hat{\alpha}_0 \approx 71\%$ .

## 7. Заключение

В работе получен и проинтерпретирован ряд соотношений, описывающих голосование с «оптимальным» порогом в предположениях модели социальной динамики, определяемой голосованием в стохастической среде. Эти соотношения приводят к выводу, что при наступлении неблагоприятной внешней конъюнктуры порог голосования следует повысить, а при улучшающихся условиях – понизить, и указывают – насколько.

## Приложение

**Доказательство теоремы 1.** Для нахождения аргумента наибольшего значения приращения капитала посредством дифференцирования в выражении (3) заменим  $[\alpha n] + 0,5$  на  $\alpha n$ . При этой замене получаем дифференцируемую функцию, которая в точках  $\left\{ \frac{k+0,5}{n} \mid k = 0, \dots, n \right\}$  совпадает с исходной. Тогда вместо (3) имеем

$$(П.1) \quad \tau = (p - \alpha) \sqrt{\frac{n}{qp}}.$$

Дифференцируя по  $\alpha$  выражение (2) после указанной замены (получившуюся функцию обозначим  $\hat{M}(\alpha, \tau, \sigma)$ ), находим:

$$(П.2) \quad \frac{d\hat{M}(\alpha, \tau, \sigma)}{d\alpha} = \mu f(\tau) \frac{d\tau}{d\alpha} + \frac{\sigma f}{\sqrt{pqn}} f(\tau) \tau \frac{d(-\tau)}{d\alpha}.$$

Условие первого порядка для максимума (равенство нулю первой производной) приводится к виду

$$(П.3) \quad -\rho = \frac{(\alpha - p)f}{pq}.$$

С учетом отрицательности второй производной отсюда выводим (6).

Второе утверждение теоремы доказывается подстановкой оценки (6) оптимального порога голосования в выражение (2).

**Доказательство предложения 2.** Учитывая, что  $dp/d\rho = -dq/d\rho = f$  и  $df/d\rho = -\rho f$  (поскольку  $f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ ), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\alpha}_0(\rho)}{d\rho} &= \frac{d}{d\rho}p\left(1 - \frac{q\rho}{f}\right) = \\ &= f\left(1 - \frac{q\rho}{f}\right) + p\left(-\frac{(-f)\rho f + qf + \rho f q\rho}{f^2}\right) = \\ &= \frac{(f + p\rho)(f - q\rho) - q\rho}{f}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

### Литература

1. БОРЗЕНКО В. И., ЛЕЗИНА З. М., ЛОГИНОВ А. К., ЦОДИКОВА Я. Ю., ЧЕБОТАРЕВ П. Ю. *Стратегии при голосовании в стохастической среде: эгоизм и коллективизм* // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 2. — С. 140–152.
2. ЧЕБОТАРЕВ П. Ю. *Аналитическое выражение ожидаемых значений капиталов при голосовании в стохастической среде* // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 3. — С. 57–68.
3. ЧЕБОТАРЕВ П. Ю., ЛОГИНОВ А. К., ЦОДИКОВА Я. Ю., ЛЕЗИНА З. М. *Об оптимальном пороге голосования* // XIII Апрельская международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества: в 4 кн. / Под ред. Е. Г. Ясина. — Т. 4. — Москва : Изд. дом ВШЭ, 2013. — С. 123–132.
4. AZRIELI Y., KIM S. *Pareto efficiency and weighted majority rules* // International Economic Review. — 2014. — Vol. 55. — No. 4. — P. 1067–1088.
5. NITZAN S., PAROUSH J. *Optimal decision rules in uncertain dichotomous choice situations* // International Economic Review. — 1982. — Vol. 23. — No. 2. — P. 289–297.

6. NITZAN S., PAROUSH J. *Are qualified majority rules special?* // *Public Choice*. — 1984. — Vol. 42. — No. 3. — P. 257–272.
7. RAE D. W. *Decision-rules and individual values in constitutional choice* // *American Political Science Review*. — 1969. — Vol. 63. — No. 1. — P. 40–56.
8. SEKIGUCHI T., OHTSUKI H. *Effective group size of majority vote accuracy in sequential decision-making* // *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*. — 2015. — Vol. 32. — No. 3. — P. 595–614.

## THE OPTIMAL MAJORITY THRESHOLD AS A FUNCTION OF THE COEFFICIENT OF VARIATION OF THE ENVIRONMENT

**Pavel Chebotarev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,  
Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65,  
pavel4e@gmail.com).

**Vitaly Malyshev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow  
(vit312@gmail.com).

**Yana Tsodikova**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow  
(codikova@mail.ru).

**Anton Loginov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,  
Doctor of Science (a\_k\_log@mail.ru).

**Zoya Lezina**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,  
Cand.Sc. (lezinazo@gmail.com).

**Vadim Afonkin**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow  
(afonkinvadim@yandex.ru).

*Abstract: Within the model of social dynamics determined by collective decisions in a stochastic environment, we consider the case of a homogeneous society consisting of rational economic agents (or homines economici, or egoists). Expressions for the optimal majority threshold and the maximum expected capital increment as a function of the parameters of the environment are obtained. An estimate of the rate of change of the optimal threshold at zero is given, which is an absolute constant.*

**Keywords:** social dynamics, voting, stochastic environment, homines economici, optimal majority threshold.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии ...*

*Поступила в редакцию 19.01.2016  
Дата опубликования ...*