МОДЕЛИ АДАПТАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТРАКТАХ

М.В. Белов, Д.А. Новиков

Получены новые достаточные условия оптимальности скачкообразных и компенсаторных систем стимулирования в вероятностных задачах стимулирования; предложены и исследованы динамические модели адаптации участников организационной системы к изменению статистических характеристик внешней среды.
Ключевые слова: теория контрактов, задача стимулирования, вероятностная неопределенность, адаптивное поведение, задача о разладке.

Введение

Задачи стимулирования в организационных системах, т.е. побуждения управляемых субъектов к выбору определенных действий в интересах субъекта, осуществляющего управление, являются предметом исследований в *теории управления организационными системами* [12, 13] и в *теории контрактов* [21, 28], причем в рамках последней основное внимание уделяется ситуациям, когда результаты деятельности управляемых субъектов зависят не только от их собственных действий, но и от внешних случайных факторов. Если взаимодействие участников организационной системы повторяется во времени неоднократно, то возникает необходимость рассмотрения динамических контрактов, описываемых в рамках теории повторяющихся игр (в дискретном [10, 24, 27] или в непрерывном [22, 29] времени) – см. обзоры в [11, 23, 27]. Однако возможны ситуации, когда характеристики внешней неопределенности изменяются во времени, следовательно, необходимы разработка и исследование моделей, учитывающих эффекты обнаружения участниками оргсистемы подобных изменений и эффективной реакции на них.

Изложение материала настоящей работы имеет следующую структуру. В первом разделе вводится система классификаций моделей контрактов в организационных системах, рассматриваются статические модели контрактов, в том числе, в условиях аддитивной неопределенности (подраздел 1.4) и в рамках т.н. модели простого агента (подраздел 1.5), для которых получены новые достаточные условия оптимальности скачкообразных и компенсаторных систем стимулирования. Второй раздел посвящен контрактам в многоагентных системах, третий и четвертый разделы – динамическим моделям, соответственно, освоенного объема и процессов адаптации участников организационной системы к изменению характеристик внешней среды.

1. Статическая модель

Рассмотрим организационную систему (ОС) [13], состоящую из одного управляющего органа – *центра* – и одного управляемого им субъекта – *агента*. Агент выбирает неотрицательное *действие* $y \geq 0$, которое совместно с реализацией неопределенного параметра - *состояния природы* $\theta \in [0; \Delta]$ - однозначно определяет *результат* $z = y - \theta$ его деятельности (т.н. *аддитивная модель* учета неопределенности, в которой, содержательно, неопределенность «аддитивно ухудшает» действие агента). Предположим, что размер *затрат* агента $c(y, r)$ зависит от его действия y и *типа* $r > 0$ (параметр агента, отражающий эффективность его деятельности), причем будем считать, что $c(\cdot, r)$ – строго монотонно возрастающая гладкая выпуклая функция первого аргумента, равная нулю в случае выбора агентом нулевого действия (в случаях, когда тип агента фиксирован и/или несущественен с содержательной точки зрения, будем его опускать в записи функции затрат, используя для последней обозначение $c(y)$), и монотонно убывающая функция второго аргумента.

Центр предлагает агенту заключить *контракт* $\sigma(z)$, определяющий размер неотрицательного вознаграждения (и условия его получения) в зависимости от достигнутого результата. Целевая функция агента имеет вид разности между стимулированием и затратами:

(1) $f(\sigma(\cdot), y, z) = \sigma(z) – c(y, r)$.

Центр получает *доход* $H(z)$ от деятельности агента (где $H(\cdot)$ – непрерывная неубывающая функция) и несет затраты на стимулирование, т.е. его целевая функция равна разности между доходом и стимулированием:

(2) $\Phi(\sigma(\cdot), z) = H(z) - \sigma(z)$.

Примем традиционный для задач стимулирования в рамках теории управления организационными системами [2, 12, 13] и теории контрактов [21, 26, 28, 30] *порядок функционирования*: сначала центр и агент согласовывают контракт (центр предлагает агенту контракт, от которого агент может «отказаться», выбирая нулевое действие, т.е. не получая вознаграждения, но и не неся затрат), затем агент выбирает действие, после чего производятся выплаты.

Будем считать, что при принятии решений участники ОС стремятся максимизировать свои целевые функции. Так как результат деятельности агента зависит и от его действия, и от состояния природы, то для устранения *неопределенности* относительно значения состояния природы и центр, и агент должны использовать всю имеющуюся у них информацию. В зависимости от информированности участников, выделяют:

- *детерминированный случай* (неопределенность отсутствует ($\Delta \equiv 0$), и это является общим знанием для центра и агента);
- случай *полной информированности* (когда субъект, принимающий решение, знает истинное значение состояния природы);
- *интервальную неопределенность* (когда субъект, принимающий решение, знает лишь множество возможных значений $[0; \Delta]$ неопределенного параметра – состояния природы);
- *вероятностную неопределенность* (когда субъект, принимающий решение, знает распределение вероятностей на множестве возможных значений неопределенного параметра – состояния природы или результата деятельности агента);
- *нечеткую неопределенность* (когда субъект, принимающий решение, знает функцию принадлежности неопределенного параметра, определенную на множестве его возможных значений).

Обозначим через $<f(\sigma(\cdot), y)>$ и $<\Phi(\sigma(\cdot), y)>$ «детерминированные» целевые функции агента и центра, т.е. получающиеся после устранения ими неопределенности относительно состояния природы. Для устранения интервальной неопределенности обычно – см. обзор методов устранения неопределенности в задачах стимулирования в [12] - используют принцип максимального гарантированного результата, в случае вероятностной неопределенности – принцип ожидаемой полезности, в случае нечеткой – принцип максимально недоминируемых альтернатив.

Обозначим через $P(\sigma(\cdot)) = \operatorname{Arg} \max\limits_{y \geq 0} <f(\sigma(\cdot), y)>$ – *множество реализуемых действий* агента в рамках контракта $\sigma(\cdot)$, через M – *множество допустимых контрактов*. Примем *гипотезу благожелательности* [12, 13], в соответствии с которой агент выбирает из множества реализуемых действий то действие, которое наиболее предпочтительно для центра. Тогда *задача стимулирования* будет заключаться в нахождении *оптимального контракта* $\sigma^*(\cdot)$, т.е. допустимого контракта, максимизирующего выигрыш центра:

(3) $\sigma^*(\cdot) \in \operatorname{Arg}\max\limits_{\sigma \in M} \max\limits_{y \in P(\sigma)} <\Phi(\sigma(\cdot), y)>$.

Если гипотеза благожелательности не выполнена, то ищется система стимулирования (контракт), имеющая максимальную гарантированную эффективность: $\sigma_g^*(\cdot) \in \operatorname{Arg}\max\limits_{\sigma \in M} \min\limits_{y \in P(\sigma)} <\Phi(\sigma(\cdot), y)>$.

Отметим, что даже при наличии одного неопределенного параметра число возможных комбинаций информированности центра и агента достаточно велико (точнее, равно $17 = 1 + 4^2$; случаи нетривиальной взаимной информированности [14] лежат вне рассмотрения настоящей работы). Проанализируем некоторые из них.

1.1. Детерминированный случай. В его рамках $z \equiv y$, и оптимальной (решением задачи (3)) является *скачкообразная система стимулирования*, использующая *принцип компенсации затрат* агента [1, 3, 13]:

(4) $\sigma_C(x_0, y) = \begin{cases} c(x_0), & y \ge x_0, \\ 0, & y < x_0, \end{cases}$

где оптимальный *план по действию* (желательное для центра действие агента) равен

(5) $x_0 = \arg\max\limits_{z \ge 0} [H(z) - c(z)]$.

Подставляя (4) и (5) в (2), легко найти оптимальный выигрыш центра

(6) $K_0 = \max\limits_{z \ge 0} [H(z) - c(z)]$.

Значение целевой функции агента при этом равно нулю.

Если гипотеза благожелательности не выполнена, то ε-оптимальной является система стимулирования

(7) $\sigma_{Cg}(x_0, y) = \begin{cases} c(x_0) + \varepsilon, & y \ge x_0, \\ 0, & y < x_0, \end{cases}$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая константа.

1.2. Случай полной информированности центра и агента. Пусть на момент принятия решений о выбираемом действии и размере выплат соответственно, агент и центр знают реализовавшееся значение состояния природы. Тогда центр может использовать т.н. *механизм гибкого планирования* [9], в котором и оптимальный план

(8) $x^*(\theta) = \arg\max\limits_{y \ge 0} [H(y - \theta) - c(y)]$,

и система стимулирования

(9) $\sigma_C(x^*(\theta), z) = \begin{cases} c(x^*(\theta)), & z \ge x^*(\theta) - \theta, \\ 0, & z < x^*(\theta) - \theta \end{cases}$

зависят в явном виде от состояния природы θ. Значение целевой функции агента при этом равно нулю, а оптимальный выигрыш центра равен

(10) $K(\theta) = \max\limits_{y \ge 0} [H(y - \theta) - c(y)]$.

Очевидно, что в силу неубывания функции затрат агента, $\forall \theta \ge 0$ $K(\theta) \le K_0$, то есть влияние неопределенности на выигрыш центра негативно.

1.3. Интервальная неопределенность. В ситуациях неполной информированности целесообразно разделять случаи *симметричной* (одинаковой) и *асимметричной информированности* центра и агента (обычно считается, что агент информирован о неопределенных параметрах не хуже центра [13], поэтому в рамках асимметричной информированности ниже предполагается, что агент на момент принятия решений знает реализовавшееся значение состояния природы, а центр принимает решения в условиях неопределенности). Отметим, что возможность сообщения агентом центру информации [2, 13] мы не рассматриваем.

Асимметричная информированность. В этом случае центр, зная только диапазон $[0; \Delta]$ возможных значений состояния природы, вынужден гарантировать агенту компенсацию затрат:

(11) $x_{МГР} = \arg \max\limits_{y \ge 0} \min\limits_{\theta \in [0;\Delta]} [H(y - \theta) - c(y)] = \arg \max\limits_{y \ge 0} [H(y - \Delta) - c(y)]$,

т.е. использовать систему стимулирования

(12) $\sigma_C(x_{МГР}, z) = \begin{cases} c(x_{МГР}), & z \ge x_{МГР} - \Delta, \\ 0, & z < x_{МГР} - \Delta. \end{cases}$

Агент при этом, зная реализовавшееся значение состояния природы θ, выбирает действие

(13) $y^*(\theta) = x_{МГР} - \Delta + \theta$,

приводящее к «ожидаемому» центром результату $x_{МГР} - \Delta$ его деятельности (то, что агенту выгодно выполнять план, легко проверяется сравнением размеров его выигрышей при выполнении и невыполнении плана).

Оптимальный выигрыш центра

(14) $K_\Delta = \max\limits_{y \ge 0} [H(y - \Delta) - c(y)]$

в случае асимметричной информированности при любом значении состояния природы не выше, чем в случае полной информированности (ср. (10) и (14)).

Значение целевой функции агента при этом равно

(15) $f(\sigma_C(x_{МГР}, x_{МГР}), y^*(\theta), x_{МГР}) = c(x_{МГР}) - c(x_{МГР} - \Delta + \theta) \geq 0$.

Величина (15) называется *информационной рентой*, т.е. выигрышем, который получает субъект (в данном случае - агент) за счет лучшей своей информированности по сравнению с другими субъектами (центром).

Симметричная информированность. В этом случае ни центр, ни агент на момент принятия решений не знают реализации состояния природы, а им известен только диапазон $[0; \Delta]$ его возможных значений. Поэтому центр использует систему стимулирования (12) и получает выигрыш (14), а агент вынужден выбирать действие, гарантирующее ему получение ненулевого вознаграждения:

(16) $y_{МГР} = x_{МГР}$,

что приносит ему нулевой выигрыш. При этом в организационной системе реализуется «перепроизводство», равное $\Delta - \theta \geq 0$.

1.4. Вероятностная неопределенность: аддитивная модель. Пусть состояние природы θ, относительно которого в ОС имеет место симметричная информированность, является случайной величиной с непрерывной *функцией распределения* $\hat{F}_\theta(\cdot)$: $[0; \Delta] \to [0; 1]$, для которой существует п.р.в. $p_\theta(\cdot)$. В дальнейшем нам будет удобно пользоваться функцией распределения $F_\theta(\cdot)$: $(-\infty; +\infty) \to [0; 1]$:

$$F_\theta(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta \leq 0, \\ \hat{F}_\theta(\zeta), & \zeta \in [0; \Delta], \\ 1, & \zeta \geq \Delta. \end{cases}$$

При заданном действии агента y, в силу определения результата деятельности $z = y - \theta$, последний является случайной величиной с функцией распределения $F_z(\cdot, y)$: $[y - \Delta; y] \to [0; 1]$, равной

(17) $F_z(q, y) = 1 - F_\theta(y - q)$.

Предположим, что центр ограничен параметрическим классом (параметры: $\pi \geq 0$, $\lambda \geq 0$ – см. выражение (18)) скачкообразных систем стимулирования (как показано в [6, 12], в рассматриваемом случае скачкообразные системы стимулирования могут быть не оптимальны – см. также ниже, но, тем не менее, они просты и широко распространены на практике):

(18) $\sigma_C(\pi, z) = \begin{cases} \lambda, z \geq \pi, \\ 0, z < \pi, \end{cases}$

где π – *план по результату* (желательный для центра результат деятельности агента).

При выборе агентом действия $y \geq \pi$ математическое ожидание размера его вознаграждения (18) равно

(19) $E_z\, \sigma_C(\pi, z) = \lambda\, F_\theta(y - \pi)$.

Будем считать, что агент выбирает действие, максимизирующее его ожидаемую полезность [12, 13, 21], поэтому из условий первого порядка можно записать, что действие агента $y^*(\pi, \lambda) \geq \pi$ должно удовлетворять уравнению

(20) $\lambda\, p_\theta(y^*(\pi, \lambda) - \pi) = c'(y^*(\pi, \lambda))$.

Задача центра заключается в выборе параметров $\pi \geq 0$, $\lambda \geq 0$ системы стимулирования (контракта), максимизирующих его ожидаемую полезность:

(21) $\int\limits_0^\Delta H(y^*(\pi,\lambda) - \zeta) p_\theta(\zeta) d\zeta - \lambda\, F_\theta(y^*(\pi, \lambda) - \pi) \to \max\limits_{\pi \geq 0,\, \lambda \geq 0}$.

<u>Пример 1.</u> Пусть центр имеет линейную функцию дохода $H(z) = \gamma\, z$, где $\gamma > 0$ – известная константа; агент имеет квадратичную функцию затрат $c(y, r) = y^2 / 2\, r$, где $r > 0$ – тип агента [13], отражающий эффективность его деятельности; а распределение $F_\theta(\cdot)$ равномерное: $F_\theta(v) = v / \Delta$, $v \in [0; \Delta]$.

Из выражения (19) следует, что математическое ожидание размера вознаграждения агента равно $\lambda\, (y - \pi) / \Delta$. Следовательно, при выборе агентом действия $y \geq \pi$ математическое ожидание значения его целевой функции равно

(22) $E_z\, f(\sigma_C(\pi, z), y, z) = \lambda\, (y - \pi) / \Delta - y^2 / 2\, r$.

Максимизируя свой ожидаемый выигрыш (22), агент выберет действие (см. также выражение (20))

(23) $y^*(\pi, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda r}{\Delta}, \text{ при } \pi \leq \dfrac{\lambda r}{2\Delta}, \\ 0, \quad \text{при } \pi > \dfrac{\lambda r}{2\Delta}. \end{cases}$

Математическое ожидание значения целевой функции центра равно:

(24) $E_z\, \Phi(\sigma_C(\pi, z), z) = \gamma\, (y - \Delta / 2) - \lambda\, (y - \pi) / \Delta$.

Подставляя (23) в (24), получим задачу (см. (21)) выбора центром параметров системы стимулирования (18)

(25) $\gamma\,(\lambda\, r / \Delta - \Delta / 2) - \lambda\,(\lambda\, r / \Delta - \pi) / \Delta \to \max\limits_{\lambda\geq 0,\, \pi\leq\lambda r/(2\Delta)}$.

Решение задачи (25) имеет вид $\lambda^* = \gamma\,\Delta$, $\pi^* = \gamma\, r / 2$. Ожидаемый выигрыш центра при этом равен $\gamma\,(\gamma\, r - \Delta) / 2$, а ожидаемый выигрыш агента равен нулю. •[1]

Решим задачу синтеза оптимальной системы стимулирования для рассматриваемой вероятностной аддитивной модели. Общая схема решения вероятностных задач стимулирования такова [12]: сначала для каждого действия агента x ищется минимальная (с точки зрения ожидаемых затрат центра на стимулирование) *реализующая* его система стимулирования $\sigma_{\min}(x,\cdot)$, то есть побуждающая агента выбирать именно это действие: $x \in P(\sigma_{\min}(x,\cdot))$. Затем ищется действие, реализация которого наиболее выгодна для центра (максимизирует его ожидаемый выигрыш – см. также выражение (3)):

(26) $x^* = \arg\max\limits_{x\geq 0}\ E\Phi(\sigma_{\min}(x,\cdot),\, x)$,

где E – оператор вычисления математического ожидания.

Обозначим через $x^{**} = \arg\max\limits_{x\geq\Delta}\ [\int\limits_0^\Delta H(x-\zeta)p_\theta(\zeta)d\zeta\ - c(x)]$.

<u>Лемма 1.</u> В вероятностной задаче стимулирования для любого действия агента $x \geq 0$ не существует системы стимулирования, реализующей это действие с ожидаемыми затратами центра на стимулирование, строго меньшими затрат агента, т.е. $\sigma_{\min}(x,\cdot) \geq c(x)$.

Доказательство. Пусть существует действие агента $\hat{x} \geq 0$ и система стимулирования $\hat{\sigma}(z)$, такие, что выполнено

(27) $E_z\ \hat{\sigma}(z)|\hat{x}\ =\ \int\limits_0^{+\infty} \hat{\sigma}(z)p_z(v,\hat{x})dv\ <\ c(\hat{x})$,

и система стимулирования $\hat{\sigma}(z)$ реализует действие $\hat{x} \geq 0$, т.е. $\forall\ y \geq 0$ выполнено

(28) $E_z\ \hat{\sigma}(z)|\hat{x}\ -\ c(\hat{x})\ \geq E_z\ \hat{\sigma}(z)|y\ -\ c(y)$.

Для $y = 0$ выражение (28) с учетом условия $c(0) = 0$ примет вид:

---

[1] Символ «•» здесь и далее обозначает окончание примера или доказательства.

$$E_z\ \hat{\sigma}(z)|\hat{x}\ \geq\ c(\hat{x})\ +E_z\ \hat{\sigma}(z)|0\,,$$

что в силу неотрицательности стимулирования (и, следовательно, его математического ожидания) противоречит (27). •

Найдем достаточные условия оптимальности системы стимулирования типа (18), а именно контракта

(29) $\sigma_C(x, z) = \begin{cases} c(x), & z \geq x - \Delta, \\ 0, & z < x - \Delta. \end{cases}$

Утверждение 1. Если $\forall x \in [x^{**} - \Delta;\ x^{**}]$ выполнено

(30), $p_\theta(x - x^{**}) \geq \frac{c'(x)}{c(x^{**})}$

то в аддитивной модели учета вероятностной неопределенности система стимулирования (29) реализует действие x^{**} агента с минимальными ожидаемыми затратами центра на стимулирование, равными $c(x^{**})$ и является оптимальной.

Доказательство. Вычислим математическое ожидание вознаграждения агента при выборе им действия y при плане x: $E_z\ \sigma_C(x, z)|y = \int_0^\Delta \sigma_C(x-\Delta, y-\zeta)p_\theta(\zeta)d\zeta$. Из выражения (19) следует, что $E_z\ \sigma_C(x, z)|y = c(x)\ F_\theta(y - x + \Delta)$. Ожидаемая полезность агента равна

$$E_z\ \sigma_C(x, z)|y - c(y) = \begin{cases} -c(y), & y \leq x - \Delta, \\ c(x)\ F_\theta(y - x + \Delta) - c(y), & y \in [x - \Delta,\ x], \\ c(x) - c(y), & y \geq x. \end{cases}$$

При плане $x = x^{**}$ в силу условия (30), максимум данной ожидаемой полезности достигается при выборе агентом либо нулевого действия, либо действия, совпадающего с планом x (условие (30) гарантирует неубывание ожидаемой полезности агента по его действию на отрезке $[x^{**} - \Delta;\ x^{**}]$). В силу гипотезы благожелательности агент выберет действие x^{**}, что приведет к ожидаемым затратам центра на стимулирование в точности равным затратам агента. Следовательно, в силу результата леммы 1, система стимулирования (29) оптимальна. •

Очевидно, что, если гипотеза благожелательности не выполнена, то ε-оптимальной системой стимулирования в рамках условия (30) будет система стимулирования $\sigma_{Cg}(x, z) = \begin{cases} c(x)+\varepsilon, & z \geq x-\Delta, \\ 0, & z < x-\Delta. \end{cases}$

Пример 2. В условиях примера 1 условие (30) примет вид: $\gamma\, r \geq 2\,\Delta$. •

Теперь исследуем достаточные условия оптимальности компенсаторной системы стимулирования. Для этого найдем систему стимулирования $\hat{\sigma}(z)$, которая обращает в ноль ожидаемую полезность агента для любых его действий, т.е. для которой выполнено

(31) $\int\limits_{y-\Delta}^{y} \hat{\sigma}(z) p_\theta(y-z) dz = c(y,r)$.

Утверждение 2. Если существует контракт $\hat{\sigma}(z) \geq 0$, удовлетворяющий выражению (31), то он является оптимальным в аддитивной модели учета вероятностной неопределенности.

Справедливость утверждения 2 следует из свойства (31) системы стимулирования $\hat{\sigma}(z)$ и результата леммы 1.

Итак, система стимулирования $\hat{\sigma}(z)$ является оптимальной, если существует положительнозначное решение интегрального уравнения (31). Сформулируем условия существования такого решения.

Утверждение 3. Если функции $c'_y(y,r)$ и $p'_\theta(v)$ непрерывны в областях определения, то интегральное уравнение (31) имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений:

(32) $\begin{cases} \hat{\sigma}_0(z) = \frac{c'(z,r)}{p_\theta(0)}, \\ \hat{\sigma}_{i+1}(z) = \frac{c'(z,r)}{p_\theta(0)} - \int_0^z \hat{\sigma}_i(u) \frac{p'_\theta(z-u)}{p_\theta(0)} du, i = 1, 2, \ldots. \end{cases}$

Для положительнозначимости решения интегрального уравнения (32) необходимо

(33) $c'(y,r) \geq \int_0^y \hat{\sigma}_i(u) p'_\theta(y-u) du, i = 1, 2, \ldots.$

Доказательство. Продифференцируем выражение (31):

(34) $p_\theta(0)\,\hat{\sigma}(z) - p_\theta(\Delta)\,\hat{\sigma}(z-\Delta) + \int_{z-\Delta}^{z} \hat{\sigma}(u) p'_\theta(z-u) du =$
$= c'(z,r)$.

Сначала решаем (34) при $z \leq \Delta$:

$$p_\theta(0)\,\hat{\sigma}(z) + \int_0^z \hat{\sigma}(u) p'_\theta(z-u) du = c'(z,r).$$

Перепишем данное выражение в виде:

(35) $\hat{\sigma}(z) = \frac{c'(z,r)}{p_\theta(0)} - \int_0^z \hat{\sigma}(u) \frac{p'_\theta(z-u)}{p_\theta(0)} du.$

Уравнение (35) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Известно (см., например, [17]), что в рамках условий доказываемого утверждения оно имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений (32). Для положительнозначимости решения необходимо выполнения (33). Таким образом, решение для $z \leq \Delta$ получено.

Используя (34), аналогичное решение можно получить для $z\epsilon[j\Delta; (j+1)\Delta]; j = 1,2 \ldots$:

$$\hat{\sigma}(z) = \frac{\{c'(z,r) + p_\theta(\Delta)\hat{\sigma}(z-\Delta)\}}{p_\theta(0)} - \int_0^z \sigma(u) \frac{p'_\theta(z-u)}{p_\theta(0)} du,$$

причем доказательство положительности решения $\hat{\sigma}(z)$ достаточно выполнить только для решения на первом интервале, далее $c'(z,r) + p_\theta(\Delta)\sigma(z-\Delta) \geq c'(z,r)$.

<u>Пример 3.</u> Пусть п.р.в. $p_\theta(\cdot)$ является равномерной, то есть

$$p_\theta(v) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{при } v \in [a_0; a_1], \\ 0 & \text{при } v \notin [a_0; a_1], \end{cases}$$

где $0 < a_0; a_1 = a_0 + \Delta$.

Тогда (31) примет вид $\int_{z-a_1}^{z-a_0} \sigma(u)dz = \Delta c(z,r)$. Дифференцируя обе части, получим функциональное уравнение:

$$\sigma(z - a_0) - \sigma(z - a_1) = \Delta c'(z,r).$$

Учитывая, что $c(y,r) = 0$ и $c'(y,r) = 0$ при $y \leq 0$, решение итогового уравнения получится в виде функционального ряда:

$$\sigma(z - a_0) = \Delta \sum_{i=0}^{\infty} c'(z - \Delta i, r).$$

Так как $c(\cdot, r)$ непрерывно дифференцируема и выпукла, сумма функционального ряда положительна и возрастает, что соответствует основному требованию к функции стимулирования $\sigma(\cdot)$.

В частности, в условиях примера 1 $c(y,r) = y^2 / 2r$, а $c'(y,r) = y / r$, при $y > 0$ тогда

$$\sigma(z - a_0) = \Delta/r \sum_{i=0}^{\infty} \theta(z - \Delta i)(z - \Delta i);$$

где $\theta(\cdot)$ - функция Хевисайда: $\theta(u) = \begin{cases} 1 \text{ при } u \geq 0 \\ 0 \text{ при } u < 0 \end{cases}$ •

1.5. Вероятностная неопределенность: модель с простым агентом. Альтернативой рассмотренной выше в подразделе 1.4 аддитивной модели учета неопределенности является т.н. модель *простого агента* [3, 5, 6, 12], в которой функция распределения результатов деятельности имеет вид:

(36) $F_z(q, y) = \begin{cases} G(q), & q \le y, \\ 1, & q > y, \end{cases}$

где $G(\cdot)$: $[0; +\infty) \to [0; 1]$ – известная функция распределения (соответствующую ей п.р.в. обозначим через $g(\cdot)$), $G(0) = 0$, т.е., как и в аддитивной модели, действие агента определяет максимально возможный результат, а распределение $G(\cdot)$ не зависит явным образом от действия. П.р.в., соответствующую функции распределения (36), обозначим через $p_z(q, y)$.

При использовании центром скачкообразной системы стимулирования (18) и выборе агентом действия $y \ge \pi$ математическое ожидание размера его вознаграждения равно $\lambda\,(G(y) - G(\pi))$. Аналогом условия первого порядка (20) для модели простого агента является

$$\lambda\, g(y^*(\pi, \lambda)) = c'(y^*(\pi,\lambda),r).$$

В [12] доказано, что в модели нейтрального к риску простого агента оптимальны компенсаторные системы стимулирования, а в [6] доказано, что в этом классе моделей оптимальны:

- для несклонного к риску агента - *компенсаторные системы стимулирования* вида

(37) $\sigma_{\text{K}}(z) = \int\limits_0^z \frac{c'(v,r)dv}{1-G(v)}$;

- для склонного к риске агента – *скачкообразные системы стимулирования* следующего вида:

(38) $\sigma_{\text{C}}(x, z) = \begin{cases} \dfrac{c(x,r)}{1-G(x)}, & z \ge x, \\ 0, & z < x. \end{cases}$

Легко убедиться, что функция стимулирования (37) является неотрицательной, возрастающей и выпуклой. По аналогии с леммой 1 в [6] можно доказать следующие свойства систем стимулирования (37) и (38).

<u>Утверждение 4.</u> В модели простого агента $\forall y \ge 0$ выполнено:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \sigma_K(q)\, p_z(q, y) dq = c(y,r)$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \sigma_C(q)\, p_z(q, y) dq = c(x, r)$.

Содержательно результат первого пункта утверждения 4 означает, что для любого действия агента математическое ожидание его вознаграждения (37) в точности равно затратам агента по выбору этого действия. Следовательно, при выборе центром функции стимулирования (37), для любых действий агента его ожидаемая полезность обращается в ноль, что делает его индифферентным к выбору действий, следовательно, в рамках гипотезы благожелательности, агент выберет действие, которое наиболее предпочтительно с точки зрения центра.

При использовании центром системы стимулирования (38) агент индифферентен между нулевым действием (отказ от контракта) и выполнением плана. Для того чтобы ожидаемая полезность агента достигала единственного максимума при выборе действия, совпадающего с планом, необходимо увеличить размер выплат за выполнение плана на сколь угодно малую положительную величину ε. Но такая система стимулирования будет уже не оптимальной, а ε-оптимальной. Легко убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. В модели простого агента $\forall x \geq 0$ система стимулирования

(39) $$\sigma_C^{\varepsilon}(x, z) = \begin{cases} \dfrac{c(x, r) + \varepsilon}{1 - G(x)}, & z \geq x, \\ 0, & z < x, \end{cases}$$

ε-оптимальна (т.е. реализует действие агента x с минимальными ожидаемыми затратами центра на стимулирование).

Независимо от того какую – компенсаторную или скачкообразную – систему стимулирования использует центр, оптимальным с его точки зрения будет план (по действию):

(40) $$x^* = \arg \max_{y \geq 0} \left[\int\limits_0^{y} H(z) g(z) dz + (1 - G(y))\, H(y) - c(y, r) \right].$$

Условием первого порядка для выражения (40) является:

(41) $H(x^*) + (1 - G(x^*))\, H'(x^*) = c'(x^*, r)$.

Пример 4. Пусть в условиях примера 1 $G(z) = z / (1 + z)$. Из выражения (37) следует, что $\sigma_K(z) = \frac{z^2}{2r}(1+\frac{2z}{3})$, а из выражения (41) находим $x^* = \frac{1}{2}[\sqrt{\frac{1+3\gamma r}{1-\gamma r}} - 1]$. •

Так как в рассматриваемой в настоящей работе модели простого агента последний нейтрален к риску, то, выбирая из систем стимулирования (37) и (38), наверное, следует отдать предпочтение скачкообразной системе стимулирования, так как она, во-первых, проще, а, во-вторых, ее ε-оптимальный аналог побуждает агента выбирать действие, совпадающее с планом (см. утверждение 5).

Основными результатами первого раздела, в котором рассматривалась статические задачи теории контрактов, являются «аналитические» зависимости типа (31), (37), которые позволяют ставить и решать более сложные задачи – в частности динамические, в которых изменяются характеристики агентов и/или состояния природы (например, изменяются параметры его функции распределения). Однако сначала рассмотрим непосредственное обобщение модели с одним агентом и аддитивной неопределенностью на многоагентный случай (раздел 2), а затем обобщение статической модели с простым агентом на случай нескольких последовательных периодов его деятельности (раздел 3).

2. Многоагентная модель

Пусть в ОС центру подчинены n агентов, принимающих решения одновременно и независимо (через $N = \{1, \dots, n\}$ обозначим множество этих агентов), а функция затрат i-го агента $c_i(y_i, r_i) = c(y_i, r_i)$, где $y_i \geq 0$ – его действие, $r_i > 0$ – его тип (нижним индексом здесь и далее будем обозначать номер агента).

Обозначим через $Y = \sum_{i \in N} y_i$ сумму действий всех агентов. Предположим, что задачей центра является обеспечение суммарного результата $X \geq 0$ деятельности всех агентов с вероятностью не меньшей заданного значения $\alpha \in [0; 1]$. Величина α называется *надежностью контракта* [4].

Для аддитивной модели учета неопределенности это условие примет вид следующего ограничения на действия агентов:

(42) $Y \geq X + n\ F_\theta^{-1}(\alpha)$.

Величина $n\ F_\theta^{-1}(\alpha)$ может рассматриваться как «*плата за неопределенность*» в терминах действий агентов.

Рассмотрим следующую задачу: каковы должны быть оптимальные планы (по действиям)? Воспользовавшись утверждением 1, получаем, что ожидаемые затраты центра на стимулирование каждого агента в точности равны затратам последнего от выбора соответствующего действия (так как при использовании центром системы стимулирования (31) ожидаемый выигрыш агента постоянен при любом его действии, то, в силу гипотезы благожелательности, он выберет действие, совпадающее с планом). Так как затраты агентов – неубывающие, то в оптимальном решении условие (42) выполняется как равенство. Следовательно, поиск оптимальных планов сводится к следующей задаче условной оптимизации:

$$(43)\quad \begin{cases} \sum_{i \in N} c(x_i, r_i) \to \min_{\{x_i \geq 0\}}, \\ \sum_{i \in N} x_i = X + nF_\theta^{-1}(\alpha). \end{cases}$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем, что справедливо следующее утверждение.

<u>Утверждение 6.</u> В аддитивной модели учета вероятностной неопределенности оптимальные планы $\{x_i^*\}$ в контракте по обеспечению суммарного результата $X \geq 0$ с надежностью α имеют вид:

(44) $x_i^* = c'^{-1}(\mu, r_i)$, $i \in N$,

где $\mu > 0$ – решение следующего уравнения:

(45) $\sum_{i \in N} c'^{-1}(\mu, r_i) = X + n\ F_\theta^{-1}(\alpha)$.

В силу монотонности функции распределения получаем из анализа задачи (43), что справедливо следующее утверждение.

<u>Утверждение 7.</u> В аддитивной модели учета вероятностной неопределенности с ростом надежности контракта минимальные затраты центра на обеспечение заданного суммарного результата деятельности агентов не убывают.

<u>Пример 5.</u> Пусть агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, т.е. $c(y, r) = \frac{1}{\delta} y^\mu r^{1-\mu}$, $\mu > 1$. Из выражений (44) и (45) получаем:

(46) $x_i^* = \frac{r_i}{\sum_{j \in N} r_j} \ (X + n \ F_\theta^{-1}(\alpha)), \ i \in N.$

Зная оптимальные планы (46), вычисляем оптимальное значение критерия эффективности:

(47) $\sum_{i \in N} c(x_i^*, r_i) = \frac{(X + nF_\theta^{-1}(\alpha))^\mu}{\mu(\sum_{j \in N} r_j)^{\mu-1}}.$

Правая часть выражения (47) не убывает по α (см. утверждение 5).

Размер «платы за неопределенность» (разность между (47) и значением критерия эффективности в соответствующей детерминированной задаче) в терминах критерия эффективности составляет $\frac{(X + nF_\theta^{-1}(\alpha))^\mu - X^\mu}{\mu(\sum_{j \in N} r_j)^{\mu-1}}$ и не убывает с ростом надежности контракта. •

3. Модель освоенного объема

Рассмотрим взаимодействие центра и одного агента в течение выполнения некоторого *проекта* - нескольких последовательных периодов дискретного времени. К концу периода T_0 (планового, называемого *планируемым сроком завершения проекта*) центру требуется обеспечить заданный суммарный результат $X_0 \geq 0$ деятельности. Пусть значения состояния природы $\{\theta^t\}_{t=1,2,\ldots}$ в различные периоды – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F_\theta(\cdot)$, а центр заключает с агентом оптимальный (см. утверждение 2) контракт $\hat{\sigma}(z^t)$, удовлетворяющий выражению (31) и определяющий размер вознаграждения агента в зависимости от результата его деятельности в периоде t, $t = 1, 2, \ldots$.

Так как тип агента и его функция затрат не зависят от номера периода, то при заданной надежности α каждого однопериодного контракта центру следует назначать агенту в каждом периоде один и тот же план (по действию), равный (ср. с выражением (42))

(48) $x_0 = X_0 / T_0 + F_\theta^{-1}(\alpha),$

причем, в силу (31), агенту выполнять этот план выгодно.

Плановый результат (суммарный) деятельности агента в момент времени t равен

(49) $X_0^t = t\, x_0 - t\ F_\theta^{-1}(\alpha) = t\, X_0 / T_0$.

Последовательность (49) в терминах *методики освоенного объема*, принятой в современном управлении проектами [7, 16], называется *планируемой динамикой объемов работ* (BQWS – Budgeted Quantity of Work Scheduled).

Так как результат $z^\tau = x_0 - \theta^\tau$ деятельности агента в периоде τ – случайная величина, то суммарный результат X^t, достигнутый к периоду t, также является случайной величиной:

(50) $X^t = t\, x_0 - \sum_{\tau=1}^{t} \theta^\tau = t\,(X_0 / T_0 + F_\theta^{-1}(\alpha)) - \sum_{\tau=1}^{t} \theta^\tau =$

$$= X_0^t + t\ F_\theta^{-1}(\alpha) - \sum_{\tau=1}^{t} \theta^\tau .$$

Последовательность (50) в терминах методики освоенного объема является *фактической траекторией* (фактическая динамика объема работ: AQWP – Actual Quantity of Work Performed).

Определим другие показатели освоенного объема в терминах рассматриваемой аддитивной модели учета неопределенности ($t = \overline{1,T}$) [7]:

- *плановые ожидаемые* (в смысле математического ожидания) *затраты* центра (Budgeted Cost of Work Scheduled – BCWS), директивный график:

(51) $c_0^t = t\, c(X_0 / T_0 + F_\theta^{-1}(\alpha), r)$;

- *фактические затраты* центра (Actual Cost of Work Performed – ACWP):

(52) $c^t = \sum_{\tau=1}^{t} \hat{\sigma}(x_0 - \theta^\tau)$;

- отставание от плана (временн*о*е, может в общем случае быть как положительным, так и отрицательным):

(53) $\delta(t) = \min \{\delta \mid X_0^{t-\varepsilon} = X^t\}$;

- *освоенный объем* (EV – Earned Value, Budgeted Cost of Work Performed – BCWP), как плановая стоимость фактически выполненных работ:

(54) $c_e^t = c_0^{t-\delta(t)}$.

- текущий *прогноз* $T(t)$ *времени завершения проекта*:

(55) $T(t) = T_0 + \varepsilon(t)$;

- общие плановые затраты C_0 (*BAC* – Budget at Completion или BC – Budget Cost):

(56) $C_0 = T_0\, c(X_0 / T_0 + F_\theta^{-1}(\alpha), r)$;

- текущая линейная *оценка общих затрат*:

(57) $C(t) = T(t)\, c^t / t$.

- *фактический срок завершения проекта*:

(58) $T' = \min \{t \geq 0 \mid X^t \geq X_0\}$;

– разность между фактическими и освоенными затратами (Cost Overrun – «*перерасход*» *средств*):

(59) $\Delta c_e(t) = c^t - c_e^t$;

- *показатель освоенного объема* (SPI – Schedule Performance Index):

(60) $a^t = c_e^t \,/\, c_0^t$;

- показатель динамики (освоения) затрат (CPI – Cost Performance Index):

(61) $b^t = c_e^t \,/\, c^t$.

Показатели освоенного объема (48)-(61), которые подразделяются на *первичные*: (48)-(52) и *производные* - (53)-(61), являются эффективным инструментом планирования проектов и оперативного управления их реализацией.

Пример 6. Пусть в условиях примера 1 $r = 1$, $T_0 = 100$, $X_0 = 100$, $\Delta = 1$, $\alpha = 0{,}2$. Плановая (см. выражение (49)), фактическая (см. выражение (50)) и ожидаемая ($X^t = X_0^t + t\,(F_\theta^{-1}(\alpha) - E\,\theta)$) траектории приведены на Рис. 1 (моделирование осуществлялось в программном комплексе РДС [15]).

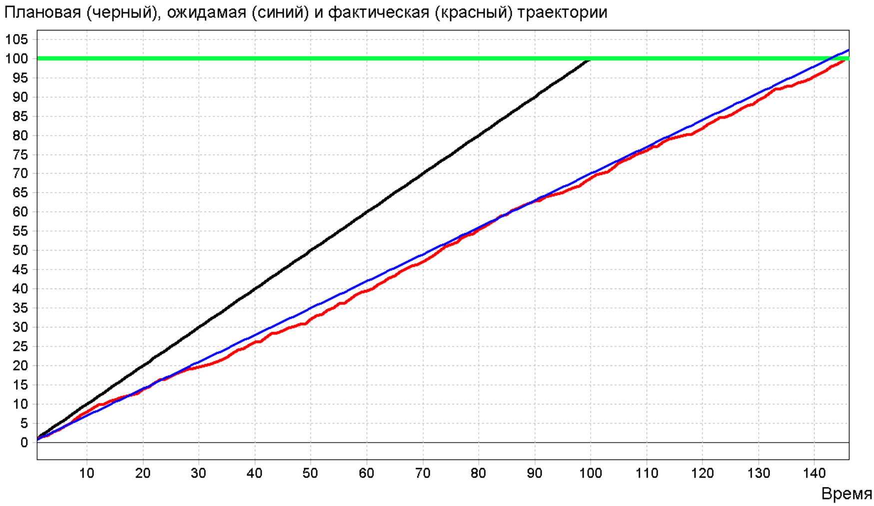

Рис. 1. Динамика результатов в примере 6

Динамика плановых и фактических затрат, а также освоенного объема приведены на Рис. 2. •

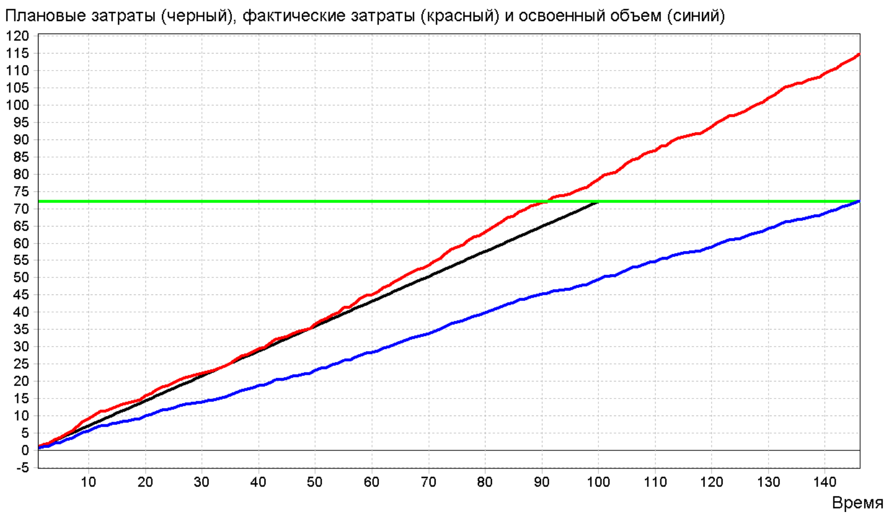

Рис. 2. Динамика затрат и освоенного объема в примере 5

Получаем: $T' = 145$, $BAC = 72$, $\Delta c_e(T') \approx 60$ %. •

4. Модель адаптации

Классификацию задач стимулирования в динамических организационных системах можно осуществлять по различным основаниям – взаимосвязь периодов, дальновидность участников, режим принятия решений и др. (см. [11]). В настоящем разделе сначала вводится классификация динамических задач стимулирования в условиях, когда на протяжении рассматриваемого промежутка времени может однократно (в момент времени t_p) измениться один из параметров модели – целевая функция центра, функция затрат агента или функция распределения результатов деятельности агента (подобное событие будем условно называть «*разладкой*»). Участники организационной системы при этом предполагаются *недальновидными*, то есть принимающими в каждом периоде решения только на данный период, не принимая во внимание возможные будущие последствия этих решений. Затем изучается одна из моделей, в которой предметом разладки является функция распределения, а момент разладки не известен ни центру, ни агенту. Изменение поведения участников организационной системы при обнаружении факта разладки можно условно трактовать как их адаптацию к новым условиям функционирования [8, 18].

4.1. Классификация динамических задач стимулирования. В Табл. 1 перечислены все возможные варианты информированности центра и агента о «новых» функциях (дохода, затрат и распределения) после наступления момента разладки (эти функции будем обозначать, используя верхнюю тильду). При этом будем считать, что перед принятием решения на период t относительно «истории игры» центр знает $Z_{t-1} = (z^1, \dots, z^{t-1})$, а агент – и Z_{t-1}, и $Y_{t-1} = (y^1, \dots, y^{t-1})$. Информированность агента и центра отражены в третьем и четвертом столбцах Табл. 1.

Табл. 1. Классификация динамических задач стимулирования

№	Предмет разладки	Агент знает	Центр знает	Задача
1	$H(z) \to \widetilde{H}(z)$	Не важно	t_p; $\widetilde{H}(z)$	Типовая задача
2			Ничего или t_p	Не имеет смысла
3	$c(y,r) \to \tilde{c}(y,r)$	t_p; $\tilde{c}(y,r)$	t_p; $\tilde{c}(y,r)$	Типовая задача
4			$\tilde{c}(y,r)$	Screening
5			Ничего	Не имеет решения

6			t_p; $\tilde{c}(y,r)$	Типовая задача
7		$\tilde{c}(y,r)$	$\tilde{c}(y,r)$	Типовая задача
8			Ничего	Не имеет решения
9		Ничего	Не важно	Не имеет решения
10			t_p; $\tilde{F}_\theta(z,y)$	Типовая задача
11		t_p; $\tilde{F}_\theta(z,y)$	$\tilde{F}_\theta(z,y)$	Screening
12			Ничего	Не имеет решения
13	$F_\theta(z,y) \to \tilde{F}_\theta(z,y)$		t_p; $\tilde{F}_\theta(z,y)$	Типовая задача
14		$\tilde{F}_\theta(z,y)$	$\tilde{F}_\theta(z,y)$	P1
15			Ничего	Не имеет решения
16		Ничего	Не важно	Не имеет решения

1-2. Изменение функции дохода центра ($H(z) \to \widetilde{H}(z)$) рассмотрено в строках 1 и 2 Табл. 1. Если новая функция дохода и момент времени t_p (*момент разладки*) известны центру (первая строка Табл. 1), то постановка сводится к набору *типовых* – рассмотренных в первом разделе – статических задач стимулирования, решаемых отдельно для каждого периода. Если новая функция дохода центра $\widetilde{H}(z)$ или момент времени t_p неизвестны центру, то такая постановка не имеет смысла, так как центр не имеет достаточной информации для принятия решений (не знает своей функции дохода).

3-9. Изменение функции затрат агента ($c(y,r) \to \tilde{c}(y,r)$) рассмотрено в строках 3 - 9 Табл. 1.

Если момент изменения и новая функция затрат известны и агенту, и центру (строка 3 Табл. 1), то постановка сводится к набору типовых задач, последовательно и независимо решаемых в различные моменты времени.

Если центр знает новую функцию затрат агента, но не знает момента её изменения (строка 4 Табл. 1), то рациональным поведением для него является предлагать всякий раз агенту меню контрактов, являющихся оптимальными для набора вариантов функции затрат – известный принцип screening’а, используемый в условиях асимметричной информированности (см. [13, 21]).

Если агент знает и новую функцию затрат, и момент изменения, а центр – ничего из этого (строка 5 Табл. 1), то задача не имеет решения по следующим причинам. Для того чтобы получить самому выигрыш больший нуля, центр должен побудить агента действовать хотя бы каким-то образом, а для этого он должен сформировать контракт, который даст агенту выигрыш не меньший нуля. Но в условиях, когда центр не знает функции затрат агента, он не сможет сформировать такой контракт. По аналогичным причинам не имеют решения задачи в строках 8, 12 и 15 Табл. 1, когда центр не знает новых функций затрат $\tilde{c}(y, r)$ или распределения $\tilde{F}_\theta(z, y)$.

Если центр знает и новую функцию затрат агента, и момент её изменения, а агент – только функцию затрат (строка 6 Табл. 1), то данный случай сводится к типовой задаче: центр обладая полной информацией будет предлагать до момента разладки контракт, соответствующий $c(y, r)$, а после нее - $\tilde{c}(y, r)$; агент может идентифицировать момент разладки через момент смены предложения центра и реагировать оптимально. Т.е. в этом случае получаем набор типовых задач.

Рассмотрим случай, когда центр и агент знают новую функцию затрат, но не знают момент её изменения (строка 7 Табл. 1). Выше мы предполагали, что функция затрат агента непрерывно дифференцируема и строго монотонна, а это означает, что, наблюдая свои фактические затраты, агент может идентифицировать факт разладки (если последняя имела место), причем изменения функции затрат достоверно обнаруживаются агентом непосредственно по окончанию периода, наступившего после разладки, и в котором агент выберет некоторое действие y, для которого $c(y, r) \neq \tilde{c}(y, r)$. Однако в этом одном периоде (выбирая свое действие) он гарантированно не знает своей функции затрат. Поэтому в условиях недальновидности агента, центр должен будет всегда предлагать контракт, рассчитанный на наихудший для агента вариант функции затрат, т.е. на функцию $\hat{c}(y, r) = \max\{c(y,r); \tilde{c}(y,r)\}$, причем и до, и после наступления разладки и обнаружения её агентом. Таким образом, в этом случае возникает типовая задача с дополнительными затратами центра, величина которых может быть оценена обоими игроками (и центром, и агентом).

Если агент не знает новой функции затрат, задача также не имеет решения в данной постановке независимо от информированности центра (строка 9 Табл. 1): в этом случае он не может оценить своих возможных потерь в течение периодов, пока он не идентифицирует новую функцию затрат и поэтому предпочтет отказ от действий.

10-16. Изменение функции распределения результата деятельности агента в зависимости от его действия или функции распределения состояния природы ($F_\theta(z, y) \to \tilde{F}_\theta(z, y)$) рассмотрено в строках 10-16 Табл. 1.

Если центр знает и новую функцию распределения $\tilde{F}_\theta(z, y)$, и момент разладки, а агент знает хотя бы новую функцию $\tilde{F}_\theta(z, y)$, то возникает набор типовых задач (строки 10 и 13 Табл. 1).

Если агент знает и новую функцию распределения $\tilde{F}_\theta(z, y)$, и момент разладки, а центр – только новую функцию $\tilde{F}_\theta(z, y)$, то возникает последовательная задача screening'а (строка 11 Табл. 1).

Если агент не знает новой функции распределения $\tilde{F}_\theta(z, y)$, задача также не имеет решения в данной постановке независимо от информированности центра (строка 16 Табл. 1): в этом случае он не может оценить своих возможных ожидаемых выигрышей и потерь в течение периодов, пока он не идентифицирует новую функцию $\tilde{F}_\theta(z, y)$ и поэтому предпочтет отказ от действий.

Модель **P1** (строка 14 Табл. 1) является многопериодной моделью контрактов с изменением функции распределения $F_\theta(z, y)$ в некоторый момент времени. В этой модели и центр, и агент знают новую функцию $\tilde{F}_\theta(y, r)$ и знают, что она может измениться не более одного раза, но априори не знают момента разладки.

Перед первым периодом взаимодействия и агент, и центр не имеют никакой информации о разладке кроме априорной, поэтому они обязаны действовать в предположении, что в первом периоде результат будет соответствовать одному из вариантов функции $F_\theta(z, y)$ или $\tilde{F}_\theta(z, y)$. При этом в условиях недальновидности агента центр должен предлагать контракт, рассчитанный на наихудший для агента вариант. Потому что если центр этого не сделает, то агент откажется от контракта, а следовательно ни агент, ни центр не получат новой информации о состоянии природы, и дальнейшее их взаимодействие потеряет смысл.

Если центр сформировал такой контракт, а агент рационален, то центр может прогнозировать действие агента y. Результат z наблюдаем центром, поэтому центр апостериори будет обладать той же информацией, что и агент. Этот факт можно обобщить в виде *принципа «прозрачности стимулирующего контракта»*, сформулировав его в следующей форме: если условия задачи позволяют центру сформировать стимулирующий контракт, агент рационален и не осуществляет манипулирования, то центр может достоверно прогнозировать действия агента и обладать, таким образом, той же полнотой информации, что и агент.

Следовательно, после окончания первого периода центр сможет построить контракт для второго периода на основании не только априорных знаний о функциях $F_\theta(z, y)$ и $\widetilde{F}_\theta(z, y)$, но также и «наблюдений» Z_1 и Y_1. Аналогично центр будет поступать и в дальнейшем, формируя контракт $\sigma_t(z)$ для периода t с использованием знаний о функциях $F_\theta(z, y)$ и $\widetilde{F}_\theta(z, y)$ и наблюдениях Z_{t-1} и Y_{t-1}.

Альтернативой является использование недальновидным центром контракта, оптимального в условиях распределения $F_\theta(z, y)$, до тех пор, пока центр не примет решение о том, что разладка произошла (именно такая ситуация рассматривается ниже при анализе модели P1). Отметим, что в силу одинаковой информированности, центр и агент примут решение о наличии разладки, условно говоря, одновременно.

В зависимости от наличия дополнительной априорной информации у центра и агента возможны несколько постановок задачи формирования таких контрактов.

Если обоим участникам доступна априорная информация о распределении вероятности момента разладки, то может быть сформирован последовательный оптимальный байесовский алгоритм формирования контракта $\sigma_t(z)$.

Если оба участника не имеют дополнительной информации о возможности наступления разладки в различные моменты времени и знают, что их взаимодействие может прерваться после любого количества периодов, то оптимальным будет минимаксный подход.

4.2. Задача о разладке (задача **P1** – см. Табл. 1). Пусть в рамках многопериодной модели (с несвязанными периодами [10]) простого агента центр использует оптимальную систему стимулирования (38) с оптимальным планом (40), причем первоначально и центр, и агент имели одинаковую информацию о функции распределения $G(\cdot)$. Предположим, что в некоторый момент времени $t_p > 0$ происходит *разладка* – распределение $G(\cdot)$ меняется на $\tilde{G}(\cdot)$. Предполагается, что новое распределение $\tilde{G}(\cdot)$ известно априори и центру, и агенту, но момент разладки неизвестен никому из них. Изменение в результате разладки значения ожидаемой полезности агента в одном периоде равно

$$(62)\ \Delta f(G(\cdot),\ \tilde{G}(\cdot)) = c(x^*)\ \frac{G(x^*) - \tilde{G}(x^*)}{1 - G(x^*)}\ .$$

Выбирая в каждый момент времени действие x^*, агент и центр наблюдают последовательность результатов Z_t (агент дополнительно наблюдает последовательность $Y_t = (x^*, \ldots, x^*)$ и должны принять решение, произошла разладка или нет. Получается, что последовательная задача распадается (из-за независимости периодов) на «одношаговые задачи с дополнительной информацией»:

На период t агент и центр перезаключают контракт, имея информацию о двух возможных распределениях $G(\cdot)$ и $\tilde{G}(\cdot)$ и дополнительные наблюдения Z_{t-1}.

Определим величину: $L_t = \ln(\tilde{g}(z_t, y_t) - \ln(g(z_t, y_t))$, которая позволяет сформировать оптимальное последовательное *правило максимального правдоподобия* обнаружения разладки: в каждый момент времени $t > 0$ вычисляется значение l_t ($l_0 = 0$):

(63) $l_t = \begin{cases} 0; & \text{если } l_{t-1} + L_t \le 0, \\ l_{t-1} + L_t; & \text{если } l_{t-1} + L_t > 0. \end{cases}$

Если в какой-то момент $l_t > \delta$, то принимается решение, что разладка имела место, где порог δ задает значения характеристик ошибок первого и второго рода.

Известно (например, [19], что статистика максимального правдоподобия позволяет сформировать решающее правило, наиболее эффективное (по сравнению с другими статистиками) по следующему критерию эффективности: когда одна из ошибок фиксируется на уровне не ниже заданного, а вторая – оптимизируется. Порог δ выбирается исходя из значений характеристик ошибок первого и второго рода.

<u>Пример 7.</u> Пусть в условиях примеров 1 и 4 $G(z) = z / (\beta_1 + z)$, $\tilde{G}(z) = z / (\beta_2 + z)$. Тогда $Ez(y) = \beta_i \ln (1 + y / \beta_i)$. Из условия (41) находим:

$$x^* = \frac{\beta}{2}\left(\sqrt{\gamma r - 1 - \frac{4\gamma r}{(\gamma r\text{-}1)\beta}} - 1\right).$$

Выражение (38) примет вид:

(64) $\sigma_C(x^*, z) = \begin{cases} \dfrac{(x^*)^2(x^* + \beta)}{2r\beta}, & z \ge x^*, \\ 0, & z < x^*. \end{cases}$

Тогда согласно условиям примера и принципу прозрачности стимулирующего контракта агент будет всегда выбирать действие $y = x^* = \frac{\beta_1}{2}\left(\sqrt{\gamma r - 1 - \frac{4\gamma r}{(\gamma r - 1)\beta_1}} - 1\right)$. До момента разладки результат действий агента будет иметь распределение

$$g(z; x^*) = \frac{\beta_1}{\beta_1 + x^*}\delta(z - x^*) + \frac{\beta_1}{(\beta_1 + z)^2} \text{ при } z \in [0, x^*],$$

а после разладки - распределение

$$\tilde{g}(z; x^*) = \frac{\beta_2}{\beta_2 + x^*}\delta(z - x^*) + \frac{\beta_2}{(\beta_2 + z)^2} \text{ при } z \in [0, x^*],$$

где $\delta(\cdot)$ - δ-функция. Тогда

$$L_t = \begin{cases} \ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) + 2\ln\left(\frac{\beta_1 + z_t}{\beta_2 + z}\right) \text{ при } z_t \in [0, x^*), \\ \ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) + \ln\left(\frac{\beta_1 + x^*}{\beta_2 + x^*}\right) \quad \text{при } z_t = x^*. \end{cases}$$

Пусть $T = 500$, $T_p = 200$, $r = 1$, $\gamma = 10$, $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 60$. Плановая, ожидаемая (в смысле математического ожидания) и фактическая траектории (кумулятивная сумма результатов деятельности агента) приведены на Рис. 3 (пунктиром изображены кривые, соответствующие необнаружению разладки).

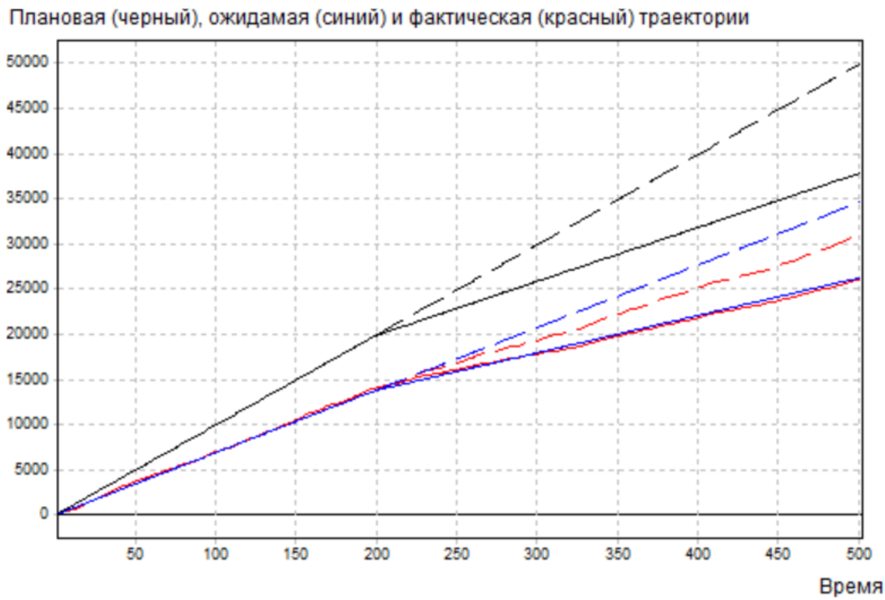

Рис. 3. Динамика кумулятивных результатов деятельности агента в примере 7

Графики динамики кумулятивных затрат агента и затрат центра на стимулирование приведены на Рис. 4 (пунктиром изображены кривые, соответствующие необнаружению разладки).

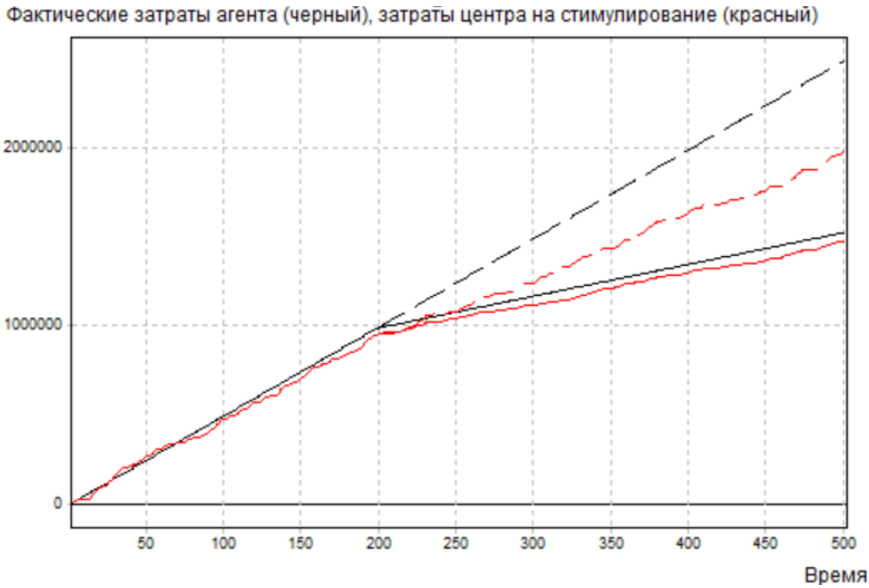

Рис. 4. Динамика кумулятивных затрат агента и центра в примере 7

В рамках метода кумулятивных сумм величины

(65) $S_1^t = \sum_{\tau=1}^{t} z^\tau - t\, Ez(x^*)$

или

(66) $S_2^t = \sum_{\tau=1}^{t} \sigma_C(x^*, z^\tau) - t\, c(x^*, r)$

могут служить показателями разладки (их графики для рассматриваемого примера приведены на Рис. 5).

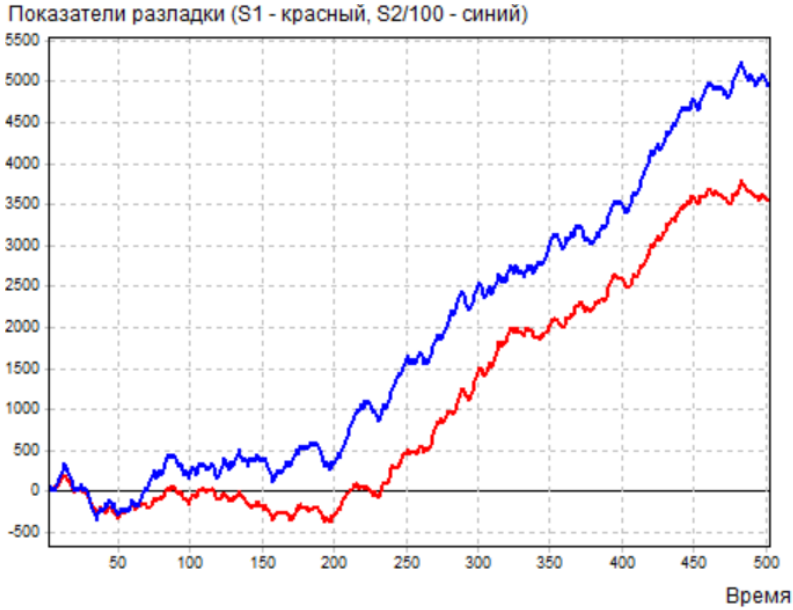

Рис. 5. Динамика показателей разладки S_1 и S_2 *в примере 7*

Воспользуемся выражением (63). Динамика его значений приведена на Рис. 6. Средние значения статистики L_t до и после разладки равны -0,04 и +0,04 соответственно, а среднеквадратичные отклонения – 0,29 и 0,27. Причем до разладки статистика L_t будет принимать значение ($\ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)+\ln\left(\frac{\beta_1+x^*}{\beta_2+x^*}\right)=-0{,}29$ с вероятностью $\frac{\beta_1}{\beta_1+x^*}=0{,}5$, а после разладки – с вероятностью $\frac{\beta_2}{\beta_2+x^*}=0{,}38$.

В рассматриваемом примере при δ = 2 разладка обнаруживается спустя 10 периодов после того, как она происходит. •

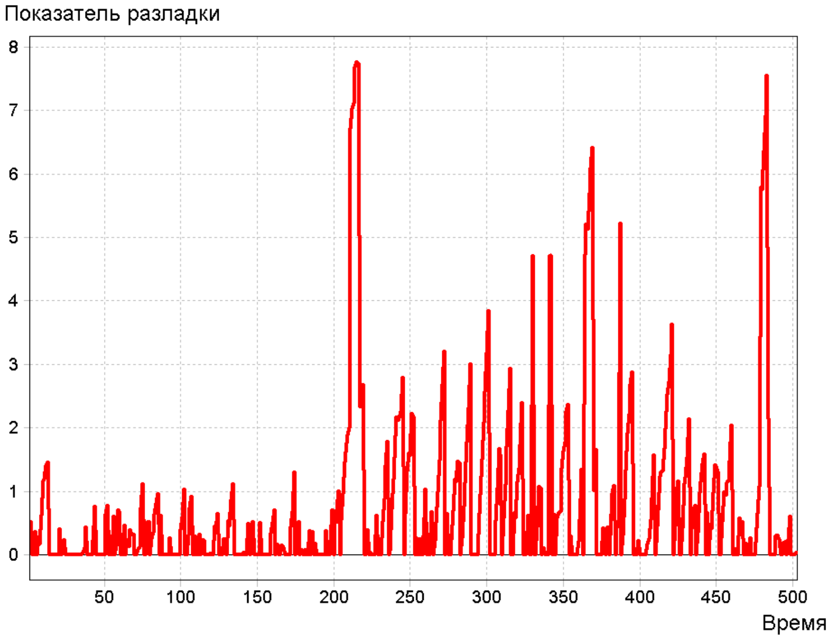

Рис. 6. Динамика показателей разладки в примере 7

Заключение

В настоящей работе рассмотрены контракты между недальновидными центром и агентами, функционирующими в условиях внешней вероятностной неопределенности (*измеримой неопределенности* в терминах F. Knight [25]), характеристики которой могут меняться со временем (отражение *истинной неопределенности* в его же терминах). Именно реакция на истинную неопределенность является одной из основных функций управляющих органов, обеспечивающих адаптивность поведения подчиненных им структурных элементов деятельности [1, 20].

Перспективными направлениями будущих исследований представляются рассмотрение других методов описания влияния внешней неопределенности на результаты деятельности агентов, изучение условий перезаключения контрактов дальновидными центром и агентами и анализ задач «разладки» в многоэлементных динамических организационных системах.

Литература

1 Белов М.В., Новиков Д.А. Структурные модели комплексной деятельности / Управление развитием крупномасштабных систем. – М.: Физматлит, 2017. С. – .

2 Бурков В.Н. и др. Механизмы управления / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: Ленанд, 2011. – 192 с.

3 Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ивановский А.Г. Простой активный элемент. Реализация плана и переоценка будущего состояния. Синтез функций дохода / Активные системы. Сборник статей № 2 (Проблемы и методы управления в активных системах). - М.: ИАТ, 1974. С. 52 - 62.

4 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. – М.: Синтег, 1997. – 188 с.

5 Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. - М.: Наука, 1977. – 255 с.

6 Губко М.В. Задача теории контрактов для модели «простого» агента // Управление большими системами. 2000. № 2. С. 22 - 27.

7 Колосова Е.В., Новиков Д.А., Цветков А.В. Методика освоенного объема в оперативном управлении проектами. – М.: Апостроф, 2000. – 156 с.

8 Новиков Д.А. Математические модели формирования и функционирования команд. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2008. – 184 с.

9 Новиков Д.А. Механизмы гибкого планирования в активных системах с неопределенностью // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 5. С. 118 - 125.

10 Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 - 26.

11 Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. - М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.

12 Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах. – М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.

13 Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. 3-е изд. – М.: Физматлит, 2012. – 604 с.

14 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексия и управление: математические модели. – М.: Физматлит, 2013. – 412 с.

15 Рощин А.А. Расчет Динамических Систем (РДС). Руководство для программистов. Приложение: описание функций и структур. Приложение к руководству для программистов. - М.: ИПУ РАН, 2012. – 719 с.

16 Руководство к своду знаний по управлению проектами (PMBOK). – М.: Олимп-Бизнес, 2014. – 388 с.

17 Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 299 с.

18 Цыганов В.В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении. - М.: Наука, 1991. – 166 с.

19 Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки. - М.: Физматлит, 1976. - 272 с.

20 Belov M., Novikov D. Reflexive Models of Complex Activity / Proceedings of WOSC World Congress. – Rome, 2017. P. - .

21 Bolton P., Dewatripont M. Contract Theory. – Cambridge: MIT Press, 2005. – 740 p.

22 Cvitanic J., Zhang J. Contract Theory in Continuous-Time Models. – Heidelberg: Springer, 2012. – 256 p.

23 Horne M. Essays on Dynamic Contract Theory. - Ann Arbor: The University of North Carolina, 2016. – 96 p.

24 Ljungqvist L., Sargent T. Recursive Macroeconomic Theory. 2nd ed. – Cambridge: MIT Press, 2004. – 1082 p.

25 Knight F. Risk, Uncertainty and Profit. Hart, Schaffner, and Marx Prize Essays, no. 31. - Boston and New York: Houghton Mifflin, 1921. – 381 p.

26 Menard C. Institutions, Contracts and Organizations: Perspectives from New Institutional Economics. – Northampton: Edward Elgar Pub, 2000. – 458 p.

27 Renner P., Schmedders K. Dynamic Principal-Agent Models / Swiss Finance Institute Research Paper No. 16-26. – Zurich: University of Zurich, 2016. – 35 p.

28 Salanie B. The Economics of Contracts. 2nd Edition. – Massachusetts: MIT Press, 2005. – 224 p.

29 Sannikov Y. A Continuous-Time Version of the Principal-Agent Problem // Review of Economic Studies. 2008. Vol. 75. No 3. P. 957 - 984.

30 Stole L. Lectures on the Theory of Contracts and Organizations. – Chicago: Univ. of Chicago. 1997. – 104 p.