

УДК 004.82,512.58,512.57

ББК 32.813,22.144

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ СПОСОБОВ УПОРЯДОЧЕНИЯ МНОЖЕСТВА МОРФИЗМОВ С ОБЩИМ ИСТОЧНИКОМ

Жожикашвили А.В.¹

(Институт проблем передачи информации РАН)

В статье рассматривается категория Клейсли, построенная по монаде на категории множеств, ставящей в соответствие каждому множеству свободную в некотором многообразии универсальную алгебру, для которой это множество является множеством образующих. Рассмотрены два способа задания предпорядка на множестве морфизмов этой категории с фиксированным источником. Доказаны условия эквивалентности этих предпорядков для частного случая абсолютно свободных алгебр. Задача важна для развитой автором алгебраической теории продукционных систем. В этой теории действие продукции описывалось на языке сопоставления с образцом, а операция сопоставления была формализована в общем виде на языке теории категорий.

Ключевые слова: сопоставление с образцом, продукционная система, теория категорий, универсальная алгебра.

1. Введение

Настоящая работа посвящена достаточно специальной математической задаче, однако для того, чтобы объяснить интерес автора к этой задаче, необходимо сказать пару слов о тех исследованиях, которые он вел в прикладных областях.

¹ Александр Владимирович Жожикашвили, кандидат технических наук, старший научный сотрудник (zhozhik@iitp.ru).

Одним из способов управления сложными системами, поведение которых не удастся описать простыми алгоритмами, является использование экспертных систем и аналогичных интеллектуальных компьютерных систем, основанных на знании. Автор многие годы изучал системы, знания в которых записываются в виде набора правил. Для теоретического исследования таких систем автору потребовалось абстрактное определение правила, не зависящее от вида конкретных структур данных, на которые действует это правило. Такое определение было дано на языке теории категорий [5].

В самом общем понимании применение правила состоит из двух шагов. На первом шаге проверяется применимость правила в данной ситуации. В случае положительного ответа на этот вопрос правило преобразует эту ситуацию, в результате чего возникает новая ситуация. После этого можно искать правило, применимое в этой новой ситуации и т.д. до достижения некоторой заданной цели. Правилу сопоставляется некоторое обобщенное описание ситуации, описывающее класс сходных в чем-то ситуаций. Для проверки применимости правила в определенной ситуации выясняется, подходит ли она под это обобщенное описание. Сопоставление ситуации с описанием класса ситуаций в некотором смысле обобщает известную в программировании процедуру сопоставления с образцом (pattern matching), поэтому такое обобщенное описание называется образцом. Именно абстрактное описание образца и процедуры сопоставления с образцом было дано автором на языке теории категорий. Определения были даны в самом общем случае, но для получения содержательной теории надо было конкретизировать вид категории.

Автор использовал для этого [1] категорию Клейсли, построенную по монаде [2]. С целью дальнейшей конкретизации можно рассмотреть монаду сопряжения, представляющую собой композицию функтора свободы и забывающего функтора. Еще более специальный, но важный пример – монада $G \circ F$, где F – функтор свободы из категории множеств в категорию универсальных алгебр с некоторой сигнатурой Ω , а G – забывающий функтор, действующий в обратном направлении.

Отметим, что похожие конструкции с близкими целями использовались давно. Наиболее распространен этот язык в работах, связанных с исследованием унификации. Обычно в этих работах вместо языка морфизмов используется язык подстановок, но теоретико-категорный смысл изучаемых понятий достаточно хорошо осознавался исследователями: см. напр. [3], где термин «категория» вынесен в название.

Автора интересовал в частности вопрос о соотношении свойств образцов и свойств описываемых ими множеств ситуаций. Самый первый вопрос, который возникает на этом пути – следующий: тождественны ли утверждения «образец P сопоставим с образцом Q » и «всякая ситуация, сопоставимая с образцом P , сопоставима также и с образцом Q ». Этому вопросу и посвящена статья.

2. Основные понятия

Будем рассматривать многообразие универсальных алгебр с сигнатурой Ω , задаваемое набором тождеств E [4]. Обозначим символом $\mathbf{C}_{\Omega, E}$ категорию алгебр этого многообразия вместе с гомоморфизмами Ω - алгебр. Пусть $\mathbf{Set}$ - категория множеств и отображений, $S: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{C}_{\Omega, E}$ - функтор свободы, ставящий в соответствие множеству X свободную алгебру с множеством образующих X , а $T: \mathbf{C}_{\Omega, E} \rightarrow \mathbf{Set}$ - забывающий функтор, ставящий в соответствие Ω - алгебре A множество A , а гомоморфизму Ω - алгебр $\varphi: A \rightarrow B$ - отображение множеств $\varphi: A \rightarrow B$. Тогда функтор $F = T \circ S: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ - монада на $\mathbf{Set}$. Рассмотрим категорию Клейсли, связанную с этой монадой. Объектами этой категории являются множества, а морфизмы из X в Y - это отображения из множества X в множество FY . Поскольку такие отображения находятся во взаимно-однозначном соответствии с гомоморфизмами Ω - алгебр из FX в FY , а композиция морфизмов в категории Клейсли соответствует при этом обычной композиции гомоморфизмов, можно заключить, что категория Клейсли изоморфна полной подка-

теории категории $\mathbf{C}_{\Omega, E}$, объектами которой являются свободные алгебры. В прикладных исследованиях автора интересовала еще меньшая полная подкатегория $\mathbf{C}_{\Omega, E}$, объектами которой являются свободные алгебры FU , где множество U конечно. Чтобы избежать проблем с теоретико-множественной аксиоматикой ограничимся малой категорией. Именно, фиксируем счетное множество X и рассмотрим полную подкатегорию категории $\mathbf{C}_{\Omega, E}$, состоящую из объектов вида FU , где $U \subset X$ и U конечно. Эту категорию мы и будем рассматривать в дальнейшем. Обозначим ее для простоты символом $\mathbf{C}$, опуская явное указание на Ω и E там, где это не может вызвать разночтений. Будем также свободно пользоваться обозначениями FU , FV , опуская постоянные уточнения «где U - конечное подмножество множества X ».

Пусть $U \subset X$. Определим $P(U)$ как $\bigcup_{V \subset X} \text{hom}(VU, FV)$.

Пусть $\varphi, \psi \in P(U)$, т.е. $\varphi: FU \rightarrow FV$, $\psi: FU \rightarrow FW$. Будем считать, что $\varphi \leq \psi$, если $\varphi = \chi\psi$ для некоторого $\chi: FW \rightarrow FV$. Легко проверяется, что отношение $\leq$ является предпорядком. Символом $C(U)$ обозначим множество $\text{hom}(FU, F\emptyset)$. Ясно, что $C(U) \subset P(U)$. Если $\varphi \in P(U)$, положим $C(\varphi) = \{\alpha \in C(U) \mid \alpha \leq \varphi\}$. Если $\varphi, \psi \in P(U)$, будем говорить, что $\varphi \leq_0 \psi$, если $C(\varphi) \subset C(\psi)$. Очевидно, что отношение $\leq_0$ также задает предпорядок на множестве $P(U)$. Нас будет интересовать связь $\leq$ и $\leq_0$.

Элементарно доказывается, что из условия $\varphi \leq \psi$ следует условие $\varphi \leq_0 \psi$. Обратное в общем случае не верно. Вот простой пример, подтверждающий это.

Пусть $\Omega = \{a, f\}$, причем a - 0-арный оператор, т.е. константа, а f - бинарный. Будем считать, что множество E состоит из одного тождества: $f(a, a) \equiv a$. Здесь и далее будем опускать скобки после 0-арных операторов, ибо запись a вы-

глядит более естественно, чем $a()$. Очевидно что множество $F\emptyset$ состоит из одного элемента – элемента a , $C(U)$ для любого U тоже состоит из одного морфизма $\alpha: FU \rightarrow F\emptyset$, отображающего все элементы FU в a . Легко видеть, что для любого $\varphi \in P(U)$ выполнено неравенство $\alpha \leq \varphi$, т.е. $C(\varphi) = \{\alpha\}$. Это означает, что неравенство $\varphi \leq_0 \psi$ выполнено для любых $\varphi, \psi \in P(U)$. Однако для неравенства $\varphi \leq \psi$ это не так. Действительно, возьмем $U = \{u_1, u_2\}$, $V = \{v_1, v_2\}$, $W = \{w\}$, гомоморфизм $\varphi: FU \rightarrow FV$ зададим формулами $\varphi(u_1) = v_1$, $\varphi(u_2) = v_2$, гомоморфизм $\psi: FU \rightarrow FW$ - формулой $\psi(u_1) = \psi(u_2) = w$. Ясно, что $\varphi \neq \chi\psi$ ни для какого $\chi: FW \rightarrow FV$, ибо $\chi\psi(u_1) = \chi\psi(u_2)$.

Пример этот приведен потому, что он содержит более-менее нормальное многообразие, с операциями и тождеством. Более простые, но совсем уж вырожденные примеры, дает теорема из следующего раздела.

Возвращаясь к сказанному во введении, отмечу связь построенных конструкций с породившими их прикладными исследованиями. При формализации на языке теории категорий операции сопоставления ситуации с образцом и ряда близких понятий морфизм $\varphi: FU \rightarrow FV$ служит для кодирования образца, морфизм $\alpha: FU \rightarrow F\emptyset$ - для кодирования ситуации, неравенство $\varphi \leq \psi$ означает, что образец φ сопоставим с образцом ψ , в частности, неравенство $\alpha \leq \psi$ означает сопоставимость ситуации α с образцом ψ . Пусть $U = \{u\}$ - одноэлементное множество. Тогда $\psi(u) \in FV$ - выражение, составленное из операторов множества Ω и переменных множества V , $\alpha(u)$ - выражение, не содержащее переменных, условие $\alpha \leq \psi$ означает, что выражение $\psi(u)$ превращается в $\alpha(u)$ при подстановке вместо переменных соответствующих выражений.

Связь между условиями $\varphi \leq \psi$ и $\varphi \leq_0 \psi$, т.е. $C(\varphi) \subset C(\psi)$ - это один из вопросов о том, насколько много информация об устройстве образца может сказать о множестве ситуаций, опи-

сываемых этим образцом. Условие $\varphi \leq \psi$ означает, что первый образец сопоставим со вторым, условие $\varphi \leq_0 \psi$ - что всякая ситуация, сопоставимая с первым, сопоставима и со вторым. Второе условие является более значимым для прикладных исследований, ибо образец задуман как способ описания множества сходных в чем-то ситуаций. Первое же условие легче проверить, так как для этого не требуется рассмотрение множеств ситуаций, возможно, бесконечных, сопоставимых с каждым из образцов.

3. Случай абсолютно свободных алгебр

Условия того, что порядки $\leq$ и $\leq_0$ совпадают, представляются довольно сложными. В настоящей статье разобран самый простой случай: случай, когда $E = \emptyset$. В этом случае элементы FU равны если они совпадают тождественно. Алгебра FU - это то, что называется абсолютно свободной алгеброй - множество правильно построенных выражений, состоящих из операторов множества Ω и переменных множества X . В этом случае связь между порядками $\leq$ и $\leq_0$ определяется следующей теоремой, доказательству которой посвящена оставшаяся часть статьи.

Теорема. *В категории абсолютно свободных Ω алгебр порядки $\leq$ и $\leq_0$ совпадают на каждом FU в том и только том случае, если сигнатура Ω содержит хотя бы 2 оператора, один из которых - 0-арный.*

Доказательству теоремы предпослели несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть $a \in FU$, $a \notin U$. Существует элемент $c \in F\emptyset$ такой, что $\xi(a) \neq c$ для любого морфизма $\xi: FU \rightarrow F\emptyset$.*

Доказательство. Пусть $f, g \in \Omega$, оператор f является 0-арным. Существование таких операторов f и g следует из условия теоремы. Тогда $F\emptyset$ содержит элементы f и $g(f, f, \dots, f)$. Количество аргументов во втором элементе зави-

сит от арности g , в частности, он может быть равен просто g , если эта арность -0 . Поскольку $a \notin U$, $a = h(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $h \in \Omega$, $a_i \in FU$. Тогда $\xi(a) = h(\xi(a_1), \xi(a_2), \dots, \xi(a_n))$. Достаточно, следовательно, положить $c = f$, если $h \neq f$, и $c = g(f, f, \dots, f)$, если $h \neq g$. $\square$

Лемма 2. Пусть $a, b \in FU$ и $a \neq b$. Существуют морфизм $\alpha: FU \rightarrow F\emptyset$ такой, что $\alpha(a) \neq \alpha(b)$.

Доказательство. Пусть $M \subset FU$ - множество таких $a \in FU$, что для некоторого $b \in FU$, $b \neq a$ имеем $\alpha(a) = \alpha(b)$ для любого морфизма $\alpha: FU \rightarrow F\emptyset$. Докажем, что $M = \emptyset$. Допустим, это не так. Выберем в M элемент a с наименьшим значением $L(a)$.

Допустим сначала, что $a \in U$. Для этого докажем, что $U \subset M$ и что из $a_i \in M$, $i = 1, 2, \dots, n$, следует что $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M$ для любого n -арного оператора f .

Первое из этих двух утверждений доказывается следующими рассуждениями. Пусть $a = x \in U$, $b \in FU$, $a \neq b$. Согласно лемме 1, в $F\emptyset$ есть такой элемент c , что $c \neq \xi(b)$ ни для какого $\xi: FU \rightarrow F\emptyset$. Определим $\alpha: FU \rightarrow F\emptyset$ так, чтобы $\alpha(x) = c$. Образы остальных переменных из U можно выбрать произвольно. Мы получим, что $\alpha(a) = \alpha(x) = c \neq \alpha(b)$.

Для доказательства второго утверждения допустим, что $a = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $a_i \in M$, $i = 1, 2, \dots, n$. Возьмем $b \in FU$, $b \neq a$. Случай $b \in U$ был только что разобран. Пусть $b \notin U$. Тогда $b = g(\dots)$, $g \in \Omega$. Если $g \neq f$, то $\alpha(a) \neq \alpha(b)$ для любого $\alpha: FU \rightarrow F\emptyset$ (а множество таких α , очевидно, не пусто). Осталось рассмотреть случай $g = f$, т.е. $b = f(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Поскольку $b \neq a$, $b_i \neq a_i$ для некоторого i . Но $a_i \in M$. Следовательно, для некоторого $\alpha: FU \rightarrow F\emptyset$ имеем $\alpha(b_i) \neq \alpha(a_i)$, а тогда

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \varphi(f(..., a_i, ...)) = \\ &= f(..., \alpha(a_i), ...) \neq f(..., \alpha(b_i), ...) = \alpha(f(..., b_i, ...)) = \alpha(b).\end{aligned}$$

что и завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 3. Пусть $a \in FU$, $\varphi, \psi: FU \rightarrow FV$, $\varphi(a) = \psi(a)$. Тогда для любой переменной x , входящей в выражение a , имеем $\varphi(x) = \psi(x)$.

Доказательство. Пусть M - множество таких $a \in FU$, для которых это утверждение верно. Докажем, что $M = FU$.

То, что $U \subset M$ - очевидно. Рассмотрим теперь выражение $a = f(a_1, a_2, ..., a_n) \in FU$, для которого $a_i \in M$, $i = 1, 2, ..., n$. Поскольку

$$\varphi(f(a_1, a_2, ..., a_n)) = f(\varphi(a_1), \varphi(a_2), ..., \varphi(a_n))$$

и

$$\psi(f(a_1, a_2, ..., a_n)) = f(\psi(a_1), \psi(a_2), ..., \psi(a_n)),$$

из равенства $\varphi(a) = \psi(a)$ следуют равенства $\varphi(a_i) = \psi(a_i)$,

$i = 1, 2, ..., n$. Учитывая, что $a_i \in M$, заключаем, что

$\varphi(x) = \psi(x)$ для всех переменных x , входящих в выражение

$a_1, a_2, ..., a_n$, т.е. входящих в a . $\square$

Следствие. Пусть задан морфизм $\varphi: FU \rightarrow FV$. Если для каждого $v \in V$ найдется $u \in U$: v входит в выражение $\varphi(u)$, то φ - эпиморфизм. $\square$

Доказательство теоремы.

Начнем с доказательства того, что условия, наложенные на Ω , являются необходимыми.

Пусть Ω не содержит ни одной 0-арной операции. Очевидно, что в этом случае $F\emptyset = \emptyset$, $C(U) = \emptyset$ для любого U , $C(\varphi) = \emptyset$ для любого φ , неравенство $\varphi \leq_0 \psi$ выполнено для любых $\varphi, \psi \in P(U)$, неравенство же $\varphi \leq \psi$ - нет. Для того, чтобы

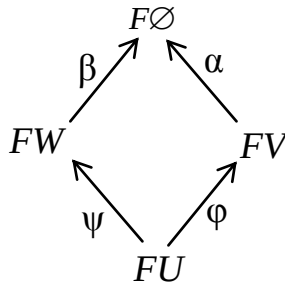
убедиться в последнем, можно использовать то же рассуждение, которое было использовано при разборе примера в конце предыдущего раздела.

Пусть Ω содержит 0-арную операцию a , и больше не содержит ничего. Тогда $F\emptyset = \{a\}$, $C(U)$ состоит из единственного гомоморфизма $\alpha: FU \rightarrow F\emptyset$, который отображает все элементы FU в a . Очевидно, что $\alpha \leq \varphi$ для любого $\varphi \in C(U)$, поэтому $C(\varphi) = \{\alpha\}$. Мы снова видим, что $\varphi \leq_0 \psi$ всегда, но $\varphi \leq \psi$ не всегда. Подтверждающий это пример – тот же.

Теперь перейдем к доказательству достаточности. Как уже отмечалось, тот факт, что из условия $\varphi \leq \psi$ следует $\varphi \leq_0 \psi$, элементарно может быть доказан для любых Ω и E . Наша задача – доказать, что в условиях теоремы из $\varphi \leq_0 \psi$ следует $\varphi \leq \psi$.

Итак, пусть заданы морфизмы $\varphi: FU \rightarrow FV$ и $\psi: FU \rightarrow FW$. Условие $\varphi \leq_0 \psi$ на категорном языке записываются следующим образом:

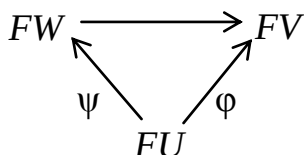
- i. для любого морфизма $\alpha: FV \rightarrow F\emptyset$ найдется морфизм $\beta: FW \rightarrow F\emptyset$, делающий диаграмму



КОММУТАТИВНОЙ.

Условие $\varphi \leq \psi$ означает что

- ii. существует морфизм $\chi: FW \rightarrow FV$, делающего коммутативной диаграмму



Наша задача, следовательно, показать, что из выполнения условия i следует выполнение условия ii.

Пусть $a \in FX$ (в частности, это относится к элементам множеств FU , FV и других подобных). Это означает, что a - выражение, построенное из операторов - элементов множества Ω , и переменных - элементов множества X . Обозначим через $L(a)$ количество символов операторов, входящих в выражение a . Формальное определение выглядит следующим образом:

если $a \in X$, то $L(a) = 0$;

если $a = f(c_1, \dots, c_n)$, $f \in \Omega$, $c_i \in FX$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $L(a) = L(c_1) + \dots + L(c_n) + 1$.

В частности, если f - 0-арный оператор, то $L(f) = 1$.

Для любого морфизма $\xi: FU \rightarrow FW$ положим

$$L(\xi) = \sum_{u \in U} L(\xi(u)).$$

Рассмотрим теперь множество M таких морфизмов $\psi: FU \rightarrow FW$, что для некоторого морфизма $\phi: FU \rightarrow FV$ условие i выполнено, а условие ii - нет. Наша задача - показать, что $M = \emptyset$. Допустим, это не так. Выберем тогда в M элемент ψ с наименьшим значением $L(\psi)$. Возможны два варианта: $L(\psi) = 0$ и $L(\psi) > 0$. Покажем, что оба варианта приводят к противоречию.

Рассмотрим первый вариант - $L(\psi) = 0$, и докажем, что в этом случае условие $\psi \in M$ невозможно, т.е. если морфизм $\phi: FU \rightarrow FV$ таков, что ϕ и ψ удовлетворяют условию i, они удовлетворяют и условию ii.

Согласно определению L , равенство $L(\psi) = 0$ означает, что $\psi(u) \in W$ для всех $u \in U$. Определим морфизм $\chi: FW \rightarrow FV$ следующим образом: если $w \in W$ таково, что для любого $u \in U$ имеем $\psi(u) \neq w$, значение $\psi(w)$ можно выбрать произвольно, если же $w = \psi(u)$ для некоторого $u \in U$, положим $\chi(w) = \phi(u)$. Чтобы такое определение было бы корректным, нужно, чтобы при $u_1, u_2 \in U$, $\psi(u_1) = \psi(u_2)$, имело бы место равенство $\phi(u_1) = \phi(u_2)$. Докажем, что это так.

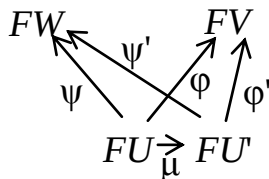
Пусть $\psi(u_1) = \psi(u_2)$, $\phi(u_1) \neq \phi(u_2)$. Согласно лемме 2, существует морфизм $\alpha: FV \rightarrow F\emptyset$ такой, что $\alpha(\phi(u_1)) \neq \alpha(\phi(u_2))$. Поскольку ϕ и ψ удовлетворяют условию i, должен найтись морфизм $\beta: FW \rightarrow F\emptyset$ такой, что $\alpha\phi = \beta\psi$. Но это невозможно, ибо $\alpha(\phi(u_1)) \neq \alpha(\phi(u_2))$, $\beta(\psi(u_1)) = \beta(\psi(u_2))$.

Итак, мы можем построить морфизм $\chi: FW \rightarrow FV$ так, что $\chi\psi = \phi$. Таким образом, морфизмы ϕ и ψ удовлетворяют условию ii. Вариант $L(\psi) = 0$ невозможен.

Рассмотрим теперь вариант $L(\psi) > 0$.

То, что $\psi \in M$, означает, что существует морфизм $\phi: FU \rightarrow FV$ такой, ϕ и ψ удовлетворяют условию i, но не условию ii. Ниже мы построим множество $U' \subset X$, эпиморфизм $\mu: FU \rightarrow FU'$ и морфизмы $\psi': FU' \rightarrow FW$ и $\phi': FU' \rightarrow FV$ такие, что

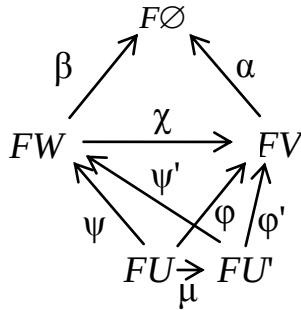
1. $\psi = \psi'\mu$, $\phi = \phi'\mu$;



2. $L(\psi') < L(\psi)$.

Тогда морфизмы ϕ' и ψ' также будут удовлетворять условию i, но не условию ii. Действительно, пусть задан морфизм

$\alpha: FV \rightarrow F\emptyset$. Поскольку φ и ψ удовлетворяют условию i, существует морфизм $\beta: FW \rightarrow F\emptyset$ такой, что $\alpha\varphi = \beta\psi$. Тогда $\alpha\varphi'\mu = \beta\psi'\mu$, откуда, в силу эпиморфности μ , следует равенство $\alpha\varphi' = \beta\psi'$, и мы видим, что морфизмы φ и ψ удовлетворяют условию i. Однако они не удовлетворяют условию ii. В самом деле, если бы существовал морфизм $\chi: FW \rightarrow FV$, такой, что $\varphi' = \chi\psi'$ то были бы выполнены равенства $\varphi = \varphi'\mu = \chi\psi'\mu = \chi\psi$, и морфизмы φ и ψ удовлетворяли бы условию ii, что противоречит выбору этих морфизмов.



Поскольку $L(\psi') < L(\psi)$, все это противоречит тому, что ψ - элемент M с наименьшим $L(\psi)$. Это противоречие и будет лужить доказательством теоремы.

Таким образом, для завершения доказательства нам осталось провести построение $U' \subset X$, $\mu: FU \rightarrow FU'$, $\psi': FU' \rightarrow FW$ и $\varphi': FU' \rightarrow FV$ с указанными выше двумя свойствами. Для этого отметим сперва, что условие $L(\psi) > 0$ влечет условие $L(\psi(u_0)) > 0$ для некоторого $u_0 \in U$. Это, в свою очередь, означает, что $\psi(u_0) \notin X$, т.е. $\psi(u_0) = f(a_1, a_2, \dots, a_m)$, $f \in \Omega$, $a_i \in FW$, $i = 1, 2, \dots, m$. Выберем произвольные $u_1, u_2, \dots, u_m$: $u_i \in X \setminus U$, и пусть $U' = U \cup \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \setminus \{u_0\}$. Пусть $\mu: FU \rightarrow FU'$ - морфизм, определяемый формулами $\mu(u_0) = f(u_1, u_2, \dots, u_m)$, $\mu(u) = u$ для всех $u \in U$, $u \neq u_0$. След-

ствие из леммы 3 показывает, что так определенный морфизм μ является эпиморфизмом.

Определим теперь морфизм $\psi': FU' \rightarrow FW$ формулами $\psi'(u_i) = a_i$, $\psi'(u) = \psi(u)$ при $u \in U$, $u \neq u_0$. Тогда $\psi = \psi'\mu$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\psi(u_0) &= f(a_1, a_2, \dots, a_m) = f(\psi'(u_1), \psi'(u_2), \dots, \psi'(u_m)) = \\ &= \psi'(f(u_1, u_2, \dots, u_m)) = \psi'(\mu(u_0)),\end{aligned}$$

$$\psi(u) = \psi'(u) = \psi'(\mu(u)) \text{ при } u \neq u_0.$$

Для того, чтобы построить морфизм $\phi': FU' \rightarrow FV$, рассмотрим, каким может быть $\phi(u_0)$.

Случай $\phi(u_0) \in V$ невозможен. Действительно, пусть $\phi(u_0) = v \in V$. Поскольку $\psi(u_0) \notin W$, согласно лемме 1 существует элемент $c \in F\emptyset$ такой, что $\beta(\psi(u_0)) \neq c$. Определим $\alpha: FV \rightarrow F\emptyset$, положив $\alpha(v) = c$. Значение α на остальных переменных из V зададим произвольно. Тогда при любом $\beta: FW \rightarrow F\emptyset$ имеем $\beta(\psi(u_0)) \neq c = \alpha(v) = \alpha(\phi(u_0))$, т.е. $\beta\psi \neq \alpha\phi$, что противоречит условию i, выполненному для ϕ и ψ . Следовательно, $\phi(u_0) = g(\dots)$, $g \in \Omega$.

Случай $g \neq f$ также невозможен, ибо в этом случае при любых α, β имеем $\alpha(\phi(u_0)) = g(\dots)$, $\beta(\psi(u_0)) = f(\dots)$, т.е. опять $\beta\psi \neq \alpha\phi$.

Остается вариант $\phi(u_0) = f(b_1, b_2, \dots, b_m)$. Определим тогда $\phi': FU' \rightarrow FU$ формулами $\phi'(u_i) = b_i$, $\phi'(u) = \phi(u)$ при $u \in U$, $u \neq u_0$. Теперь $\phi' = \phi\mu$. Проверка этого полностью аналогична сделанной ранее проверке равенства $\psi = \psi'\mu$.

Осталось показать, что $L(\psi') < L(\psi)$. Имеем:

$$L(\psi') = \sum_{i=1}^m L(\psi'(u_i)) + \sum_{u \in U, u \neq u_0} L(\psi'(u)) = \sum_{i=1}^m L(a_i) + \sum_{u \in U, u \neq u_0} L(\psi(u)),$$

$$\begin{aligned} L(\psi) = L(\psi(u_0)) + \sum_{u \in U, u \neq u_0} L(\psi(u)) = L(f(a_1, a_2, \dots, a_m)) + \\ + \sum_{u \in U, u \neq u_0} L(\psi(u)) = \sum_{i=1}^m L(a_i) + 1 + \sum_{u \in U, u \neq u_0} L(\psi(u)), \end{aligned}$$

откуда $L(\psi') = L(\psi) - 1$.

Этим завершено доказательство теоремы. $\square$

4. Заключение

Случай $\Omega = \emptyset$, т.е. случай многообразия, не содержащего тождеств, является самым простым, однако исследование связи предпорядков $\leq$ и $\leq_0$ и в этом случае оказалось не вполне тривиальным. В исследованиях автора другие интересные для практики случаи сопоставления с образцом, приводящие к иным многообразиям. Исследование порядка на множестве образцов является важным для ряда задач, например, для задачи автоматического порождения новых образцов посредством обобщения. Все это делает интересным задачу сравнения предпорядка $\leq$, как более важного для практических задач, и предпорядка $\leq_0$, легче поддающемуся проверке и теоретическому исследованию. На сегодняшний день, однако, автору не известны результаты, подобные доказанной теореме, для каких-либо многообразий, отличных от многообразия всех алгебр с данной сигнатурой. Из близких работ укажем упоминавшуюся уже статью [3], где исследуется та же категория и некоторые свойства этой категории выводятся из свойств многообразия универсальных алгебр.

Литература

1. Жожикашвили А.В., Монады для формализации процедуры сопоставления с образцом // Программирование, N3, 2014 г, стр. 15-29.
2. Маклейн С. Категории для работающего математика. - Москва, Физматлит, 2004.

3. Baader F. Unification Properties of Commutative Theories: A Categorical Treatment // Proceedings of the Conference on Category Theory and Computer Science, volume 389 of Lecture Notes in Computer Science, 1989. - Springer. – p. 273-299.
4. Grätzer, George. Universal Algebra. — 2nd. — Springer, 2008. — 585 c.
5. Stefanuk V.L., Zhzhikashvili A.V. Productions and rules in artificial intelligence // KYBERNETES, The International Journal of Systems & Cybernetics. MCB University Press, 2002. - P. 817-826.

THE EQUIVALENCE OF THE TWO ORDERINGS OF A SET OF MORPHISMS WITH A COMMON DOMAIN

Alexander Zhzhikashvili, Institute for Information Transmission Problem of RAS, Moscow, Cand.Sc., (zhzhik@iitp.ru).

Abstract: the article deals with the Kleisli category of a monad in the category of sets which assigns to each set a free algebra in a variety of universal algebras based on this set. Two ways of ordering the set of morphisms with a common domain are proposed. The conditions of equivalence of these two ordering are proved in case of absolutely free algebras. This result is useful for author's production system theory in which the application of productions described in the category language.

Keywords: pattern matching, production system, category theory, universal algebra.