УДК 519.876.3
ББК 22.176 + 65.23

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ И ДЕСУПЕРПОЗИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ДВУХПОЛЮСНЫХ СЕТЕЙ

Постовалова И. П.[1]
(*Челябинский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, Челябинск*)

Двухполюсные сети используются, например, при оптимизации сетевых графиков «работы-дуги» с выпуклой ломаной зависимостью между стоимостью и продолжительностью операции. Для сложных сетевых графиков необходимо использование математических методов оптимизации (в частности алгоритма Келли) и применение ЭВМ. Процедура, описанная в основополагающих статьях Келли, Уолкера и Фалкерсона, основанная на линейном программировании и осуществляющаяся с помощью потокового алгоритма в сети, позволяет найти точный оптимум. Даже для лучших потоковых алгоритмов порядка $O(n^3)$ и $O(nm\log(n^2/m))$ с увеличением n возникает проблема упрощения структуры сети, потребность в декомпозиционных и десуперпозиционных методах.

Ключевые слова: двухполюсные сети, график «работы-дуги», оптимизация «стоимость-время», декомпозиция проекта, последовательно-параллельная десуперпозиция.

1. Введение

Оптимизация сетевого графика в зависимости от полноты решаемых задач может быть условно разделена на частную и комплексную. Видами частной оптимизации сетевого графика

---

[1] *Ирина Павловна Постовалова, кандидат физико-математических наук, доцент* (*ira.postovalova@yandex.ru*).

являются: минимизация времени выполнения комплекса работ при заданной его стоимости; минимизация стоимости комплекса работ при заданном времени выполнения проекта.

Комплексная оптимизация представляет собой нахождение оптимального соотношения величин стоимости и сроков выполнения проекта в зависимости от конкретных целей, ставящихся при реализации.

2. *Актуальность и научная значимость данного исследования*

К сожалению, практически все доступные современные программы по СПУ не подсказывают оптимальные решения в части управления затратами (так же, как и по любому другому вопросу). Они лишь обеспечивают возможность достаточно серьёзного анализа отчётных и плановых показателей на основании данных графика. Переход от анализа «узких мест» к процессу принятия решения вызывает качественное усложнение – замену простой имитационной схемы производства его оптимизационной моделью. Такой метод управления проектами является, несомненно, полезным.

3. *Поиск минимального сечения в сети критических работ*

Оптимизация проекта с выпуклой ломаной зависимостью (ВЛЗ) стоимости операций от времени их выполнения сводится к построению результирующей оптимальной ВЛЗ проекта. Каждое звено ВЛЗ проекта характеризуется угловым коэффициентом *UK* и проекцией Δ на ось времени. Наибольшую трудность представляет определение параметра *UK*, соответствующего минимальному сечению сети проекта. Минимальное сечение находится из условия минимизации стоимости сокращения проекта на единицу времени за счёт работ сечения [4].

Изменение резервов операций не требует затрат, поэтому на стадии нахождения минимального сечения можно игнорировать операции, имеющие резервы. После нахождения минимального сечения и вместе с тем *UK* для определения проекции Δ необходимо рассматривать все операции сечения, в том числе и имеющие резервы. Для операций, инцидентных только критическим событиям, проблем не возникает. Сложнее расчёт Δ при наличии событий с резервами.

4. Сечение резервной подсети проекта

Рассмотрим максимальный связный подграф, все внутренние вершины (события) которого имеют резервы, а все концевые вершины – критические работы. Такой подграф сети проекта будем называть резервной подсетью. Все работы-дуги резервной подсети имеют не нулевые резервы. Далее минимальное сечение подсети из критических дуг называется критическим сечением. Термин сечение применяется к дугам резервной подсети, а под сечением сети подразумевается объединение критического сечения и сечения резервной подсети. Минимальное сечение может пересекать резервную подсеть произвольным образом, так что для любой работы подсети существует сечение, пересекающее эту работу.

Естественно выбрать сечение резервной подсети наиболее простым и удобным для вычислений способом. Критерием выбора могут служить: наименьшее количество пересекаемых дуг; наименьшее число вычислений, необходимых для выбора сечения и другие. В известных [1, 7] потоковых алгоритмах оптимизации используются ранние сроки событий, что соответствует выбору сечения резервной подсети по работам со свободными резервами. Однако более обоснован выбор сечения по гарантийным резервам, отвечающим поздним срокам событий. Дело в том, что работы с положительным пересечением встречаются гораздо чаще (примерно на порядок), чем работы с отрицательным пересечением. Пометки расставляют обычно с начального полюса сети, поэтому при положительном пересечении дуг резервной подсети начальные вершины работ со свободными резервами будут помечены последними – в конце подсети. Очевидно, операции с гарантийными резервами будут при этом выбраны быстрее.

Можно предложить дифференцированный подход, учитывающий величины полных резервов и направления концевых работ подсети, то есть работ, инцидентных концевым критическим вершинам резервной подсети. С этой целью множество концевых вершин разбивается ранее найденным критическим сечением на два класса: левый и правый. В каждом классе отыскивается минимальные концевые вершины – вершины, инцидентные операциям подсети с наименьшим полным резервом, отдельно для входящих и для выходящих дуг. Минимальные концевые вершины определяют подкритический путь, состоящий из дуг с одинаковыми минимальными резервами. Подкритических путей, вообще говоря, может быть несколько, и они могут ветвиться, что находит отражение в распределении концевых вершин разной направленности по классам. Например, если входящая концевая вершина находится в левом классе, а выходящая – в правом, то ясно, что их соединяет подкритический путь, положительно пересекаемый сечением.

Если один из подкритических путей пересекается сечением положительно, то для выбора сечения предпочтительнее использовать поздние сроки, для отрицательного пересечения – ранние сроки событий. Если же минимальные концевые вершины принадлежат одному классу, то необходимо найти следующие по значению минимальные концевые вершины и рассмотреть пересечение подкритического пути более высокого уровня. Подчеркнём, что сами подкритические пути находить не обязательно.

5. Накопительный итерационный метод для определения лимита сечения резервной подсети

После того, как сечение резервной подсети определено, следует найти условно-минимальную величину изменения длительности Λ (лимит сечения подсети), при которой часть работ подсети становятся критическими. Лимит сечения подсети определяется очень просто в двух случаях: а) при положительном пересечении подкритического пути лимит Λ равен минимальному резерву дуг сечения; б) при отрицательном пересечении всех дуг сечения лимит равен бесконечности.

В остальных случаях трудно предложить общее правило. Рассмотрим, например, резервную подсеть с одним некритическим событием 3 и четырьмя операциями (1, 3); (2, 3); (3, 4); (3, 5); см. рис. 1.

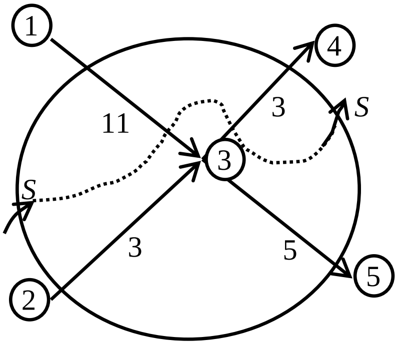


Рис. 1. Сечение резервной подсети

Буквой *S* помечены начало и конец сечения, которые определяются критическим сечением. Возле дуг проставлены полные резервы. Левый класс концевых вершин: {1+, 4–}, правый класс: {2+, 5–}. Верхние знаки + и – указывают, соответственно, на входящие и выходящие дуги. Минимальные концевые вершины в левом классе 4–, в правом 2+. Ясно, что подкритический путь пересекается сечением в отрицательном направлении, но в любом случае имеются дуги, пересекаемые сечением положительно. На рис. 1 пунктиром показано сечение подсети, соответствующее свободным резервам.

Наименьший полный резерв положительно пересекаемой операции в данном случае совпадает с резервом операции (1, 3) и равен 11. Однако лимит операции больше: $\Lambda = 13$. Нетрудно показать, что для сети типа рис. 1 с отрицательным пересечением подкритического пути лимит равен сумме резервов операций, не лежащих на подкритическом пути, за вычетом минимального резерва, то есть $\Lambda = (11 + 5) - 3$.

Итак, в общем случае лимит подсети не совпадает ни с одним полным резервом операции. Для определения Λ можно использовать накопительный итерационный метод, начиная с нуля. На каждой итерации в качестве добавки λ к Λ выбирается наименьший резерв положительно пересекаемых операций, и резервы пересчитываются заново. Итерации заканчиваются, когда в подсети появится хотя бы одна операция с нулевым резервом.

5.1. АЛГОРИТМ ВЫРАВНИВАНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ РЕЗЕРВОВ

Для пересчёта резервов можно использовать метод критического пути, однако, более эффективен (требует меньшего количества операций) алгоритм выравнивания минимальных резервов, основанный на равенстве резерва события R_k наименьшим резервам как входящего (R_{ik}), так и выходящего (R_{kj}) пучка операций: $\min\limits_{i<k} R_{ik} = R_k = \min\limits_{k<j} R_{kj}$.

Для этого поочерёдно пересекаем работы сечения, уменьшая или увеличивая на величину λ их резерв в зависимости от знака пересечения и выравнивая минимальные резервы после каждого пересечения по следующему правилу. Если с одной стороны от некоторого события минимальный резерв пучка изменился, то на такую же величину следует изменить резервы всех работ противоположного пучка, продолжая рекурсивно эту процедуру для всех инцидентных событий до полного выравнивания.

Поясним алгоритм пересчёта резервов на примере пучка последующих работ. На рис. 2 показано раннее положение работ, предшествующих событию (j), а также позднее положение события (j) (вертикальный отрезок) и последующих работ (горизонтальные отрезки). Видно, что резерв события R_j совпадает с минимальными резервами пучков работ. Пусть у одной из работ (i, j), предшествующих событию j, резерв R_{ij} уменьшился на Δ_1. Тогда изменение Δ_2 резервов работ последующего пучка произойдёт при $R_{ij} - \Delta 1 < R_j$: $\Delta_2 = \max\{0, \Delta 1 + R_j - R_{ij}\}$.

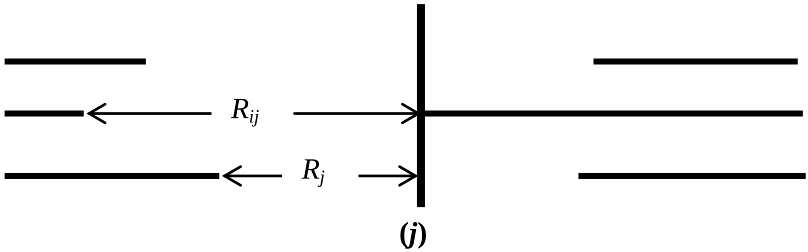


Рис. 2. Прямое пересечение

На рис. 3 наряду с резервом R_{ij} одной из предшествующих работ и минимальным резервом R_j показан резерв R_j^* второй работы из пучка предшествующих работ, упорядоченных по неубыванию резерва.

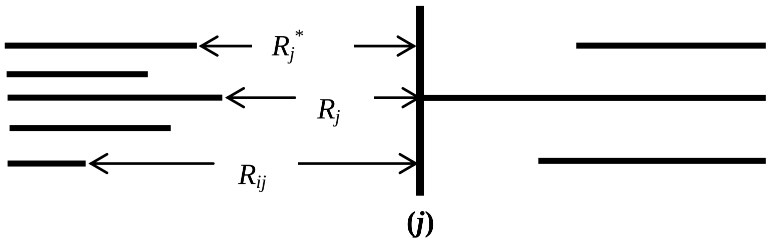


Рис. 3. Обратное пересечение

Пусть резерв работы (i, j) увеличился на Δ_1. Резервы последующих работ изменятся на Δ_2. $\Delta_2 > 0$ только при условии: $Rij = R_j$ & $R_j^* > R_j$. При $\Delta_1 < R_j^* - R_j$ величина изменения сохраняется: $\Delta_2 = \Delta_1$. Окончательная формула 1 для Δ_2:

$$(1) \quad \Delta_2 = \begin{cases} 0, & R_{ij} > R_j \\ \min\{\Delta_1, R_j^* - R_j\}, & R_{ij} = R_j. \end{cases}$$

Поэтому пересчёт резервов выполняется всего за один проход по части путей, составленных из некритических работ, количество которых в ходе оптимизации имеет тенденцию к уменьшению.

5.2. НАКОПИТЕЛЬНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ

Состоит из следующих этапов:

1. $\Lambda = 0$.

2. Начало очередной итерации. Среди положительно пересекаемых сечением работ подсети ищется минимальный резерв – это λ. Если $\lambda = 0$ (есть хотя бы одна работа с 0 резервом), то END, иначе $\Lambda = \Lambda + \lambda$.

3. Пересекаем очередную дугу сечения. Если все дуги сечения пересечены, то переход к 2.

4. У пересечённой дуги изменяем резерв: у положительно пересекаемой работы резерв уменьшаем на λ, у отрицательно пересекаемой – увеличиваем на λ.

5. Пересчёт резервов: если с одной стороны от некоторого события минимальный резерв пучка изменился, то на такую же величину следует изменить резервы всех работ противоположного пучка.

6. Переход к 3.

Ниже подробно рассмотрен пример определения лимита Λ сечения резервной подсети, приведённой на рис. 1 Изменения резервов представлены на рис. 4.

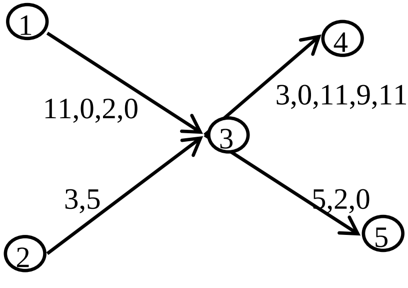


Рис. 4. Изменения резервов с помощью алгоритма выравнивания минимальных резервов для примера на рис. 1

Нумерация в примере соответствует нумерации этапов в накопительном итерационном алгоритме.

1. $\Lambda = 0$.

2. Начало итерации. $\lambda = 11$ – минимальный резерв положительно пересекаемой работы (1, 3) равен 11. $\Lambda = 0 + 11 = 11$.

3. Пересекаем дугу (1, 3).

4. У положительно пересекаемой работы уменьшаем резерв на 11.

5. Пересчёт резервов.

$$\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 3 & 5 \end{array}$$

Так как слева (у входящего пучка) минимальный резерв был 3, а стал 0, то есть уменьшился на 3, то у правого (выходящего пучка) резервы обеих работ тоже уменьшаем на 3.

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{array}$$

Слева и справа равенство минимальных резервов (0).

3. Пересекаем дугу (3, 4) отрицательно.

4. У отрицательно пересекаемой работы увеличиваем резерв на 11.

$$\begin{array}{c|c} 0 & 11 \\ 3 & 2 \end{array}$$

5. Пересчёт резервов. Так как справа (у выходящего пучка) минимальный резерв был 0, а стал 2, то есть увеличился на 2, то у левого (входящего пучка) резервы тоже увеличиваем на 2.

$$\begin{array}{c|c} 2 & 11 \\ 5 & 2 \end{array}$$

Слева и справа равенство минимальных резервов (2).

3. Все дуги сечения пересечены. Переход к 2.

2. Начало очередной итерации.

3. Пересекаем дугу (1, 3). $\lambda = 2$ – минимальный резерв положительно пересекаемой работы (1, 3) равен 2. $\Lambda = 11 + 2 = 13$.

4. У положительно пересекаемой работы уменьшаем резерв на 2.

$$\begin{array}{c|c} 0 & 11 \\ 5 & 2 \end{array}$$

5. Так как слева (у входящего пучка) минимальный резерв был 2, а стал 0, то есть уменьшился на 2, то у правого (выходящего пучка) резервы тоже уменьшаем на 2.

0	9
5	0

Слева и справа равенство минимальных резервов (0).

3. Пересекаем дугу (3, 4) отрицательно.

4. У отрицательно пересекаемой работы увеличиваем резерв на 2.

0	11
5	0

Слева и справа равенство минимальных резервов (0).

3. Все дуги сечения пересечены.

2. Начало очередной итерации. Появилась положительно пересекаемая работа с резервом 0. Конец итерационному процессу. $\Lambda = 13$.

6. Вычисление величины возможного сокращения проекта

Определив лимиты Λ пересекаемых подсетей, легко найти величину Δ возможного сокращения проекта по цене *UK*, как наименьшее значение из множества ограничений, соответствующих пересекаемым объектам:

а) сечению резервной подсети соответствует ограничение Λ;

б) положительному пересечению критической работы соответствует ограничение – величина возможного сокращения продолжительности;

в) отрицательному пересечению критической работы с продолжительностью меньшей максимальной – величина возможного увеличения продолжительности;

г) отрицательное пересечение критической работы максимальной продолжительности переводит её в резервные и не ограничивает Δ так же, как и отрицательное пересечение всех работ резервной подсети, когда $\Lambda = \infty$.

7. Удаление и (или) стягивание работ-дуг и антипараллельная десуперпозиция

В [2, 3, 6] рассмотрена десуперпозиция сети проекта путём выделения подсетей, каждая из которых может рассматриваться независимо от остальных и поэтому может быть заменена одной обобщённой работой с выпуклой кусочно-линейной (ломаной) зависимостью $c(t)$ стоимости от времени выполнения (длительности).

Далее употребляется кусочно-постоянная производная $a = c'(t)$, которая задаётся двумя возрастающими последовательностями чисел – абсцисс границ δ_k звеньев ломаной и их угловых коэффициентов a_k.

В процессе оптимизации удобно вместо длительности t_{ij} работы и её полного резерва R_{ij} использовать одну сборную переменную, задаваемую формулой 2:

(2) $\varepsilon_{ij} = t_{ij}^{\max} - t_j^{\text{п}} + t_i^{\text{р}}$,

где i, j – номера начального и конечного событий для работы (i, j),

$t_{ij}^{\max}$ – наибольшая длительность работы,

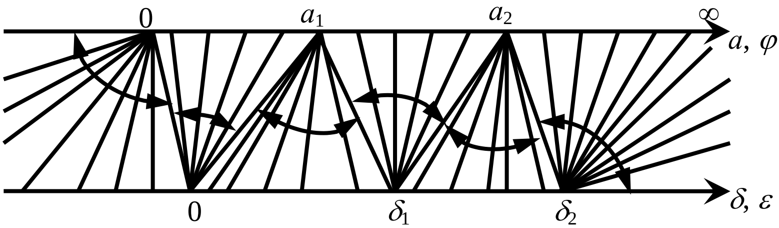
$t_i^{\text{р}}$ – ранний срок начального события,

$t_j^{\text{п}}$ – поздний срок конечного события.

При $\varepsilon_{ij} \geq 0$ эта переменная равна текущему значению времени сокращения $\left(t_{ij}^{\max} - t_{ij}\right)$ длительности работы. При $\varepsilon_{ij} < 0$ длительность работы максимальна, а модуль $|\varepsilon_{ij}|$ равен полному резерву работы R_{ij}.

Представим $c'(t)$ в виде перемежающейся последовательности: $-\infty$ (0) 0 (a_1) δ_1 (a_2) δ_2 … (a_{m}) δ_{m}. В скобках стоят угловые коэффициенты: $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{\text{m}}$. Справа и слева от углового коэффициента записаны границы соответствующих интервалов для ε. Начальный интервал $-\infty < \varepsilon < 0$ соответствует нулевому коэффициенту $c' = 0$, поскольку изменение резерва не требует затрат.

На рис.5 отражена особенность вводимой переменной.



$\varphi = 0 \Rightarrow -\infty < \varepsilon \le 0$ $\qquad$ $\varphi = a_1 \Rightarrow 0 \le \varepsilon \le \delta_1$

$0 \le \varphi \le a_1 \Leftarrow \varepsilon = 0$ $\qquad$ $a_1 \le \varphi \le a_1 \Leftarrow \varepsilon = \delta_1$ $\qquad$ …

Рис. 5. Взаимная шаговая двойственность переменной ε и потоковой переменной φ

На отдельных этапах оптимизации возможно дополнительное упрощение сети проекта за счёт работ, длительность которых не изменяется. На начальном этапе часто многие работы имеют резервы ($\varepsilon < 0$), и на стадии определения минимального сечения соответствующие дуги целесообразно удалить из сети (см. п. 3). Пересчёт резервов после определения минимального сечения элементарен. Для последующих этапов оптимизации характерны работы с предельным сокращением ($\varepsilon = \delta_m$). Положительные пересечения таких работ-дуг запрещены, что упрощает поиск минимального сечения.

Среди несокращаемых дуг выделим те, для которых запрещены или невозможны также отрицательные пересечения. Примерами таких дуг с запрещённым пересечением могут служить:

а) дуги, инцидентные полюсам, то есть начальные и заключительные работы;

б) дуги наружного контура плоской сети для планарных графов;

в) подмножество несокращаемых дуг, для каждой из которых все сечения с отрицательным пересечением положительно пересекают другую дугу подмножества.

При возникновении дуги с запрещённым пересечением её целесообразно сколлапсировать (стянуть), а инцидентные вершины слить в одну. Окончание процесса оптимизации соответствует слиянию полюсов. Подсеть, полученную удалением резервных дуг ($\varepsilon < 0$, $a = 0$) и стягиванием несокращаемых дуг ($\varepsilon = \delta_{max}$) будем называть a-сетью.

К a-сети может быть применена последовательно-параллельная десуперпозиция (ППД) на этапах с неизменными множествами работ с резервами и несокращаемых работ.

Удаление дуг не вызывает дополнительных трудностей при ППД, но при слиянии вершин возможен вариант антипараллельной декомпозиции (суперпозиции), не встречавшийся ранее в [2, 3].

Пусть $I = I^+ \cup I^- = \{1, \ldots, m\}$ – множество номеров параллельных ($i \in I^+$) и антипараллельных ($i \in I^-$) дуг, вообще говоря, обобщённых (квазидуг). Начало квазидуги определяется минимальным номером среди слитых вершин, инцидентных дуге. К очередному моменту слияния вершин у каждой из составляющих квазидуг параметр сокращения принимает вполне определённое значение ε_i. Параметр сокращения ε новой составной квазидуги более высокого уровня в момент её образования естественно считать равным нулю. Кусочно-постоянная производная функции стоимости $c'(\varepsilon)$ для составной квазидуги есть алгебраическая сумма производных составляющих стоимостей:

$$(3) \quad c'(\varepsilon) = \sum_{i \in I} \lambda_i c_i'(\varepsilon_i + \lambda_i \varepsilon).$$

Здесь

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & i \in I^+ \\ -1, & i \in I^- \end{cases}; \qquad \varepsilon \in [\tau_1; \tau_2];$$

$$\tau_1 = \max_{i \in I} \min_{j \in \{1,2\}} \gamma_{ij}; \quad \tau_2 = \min_{i \in I} \max_{j \in \{1,2\}} \gamma_{ij}; \quad \gamma_{ij} = \lambda_i (\tau_{ij} - \varepsilon_i).$$

В свою очередь $[\tau_{i1}; \tau_{i2}]$ – сегменты значений параметров сокращения составляющих квазидуг, $i \in I$. Пока среди составляющих обобщённых дуг не появятся антипараллельные дуги, параметр сокращения не ограничен снизу: $\delta_1 = -\infty$.

При наличии антипараллельных дуг параметр ε ограничен, и несколько первых значений последовательности угловых коэффициентов ломаной $a = c'(\varepsilon)$ могут быть отрицательными.

Рассмотрим пример сети – рис. 6. В скобках записаны удельные затраты на сокращение работы на единицу времени, справа от скобки – предельная величина сокращения работы. С другой стороны дуг проставлены начальные значения параметра ε: нулевые значения у критических работ, отрицательные значения у работ с положительным полным резервом $R = -\varepsilon$.

На первом шаге удаляем резервные дуги. Критические дуги (на рис. 6 – жирные линии) после ППД элементарно определяют минимальное сечение, отсекающее вершину 1.

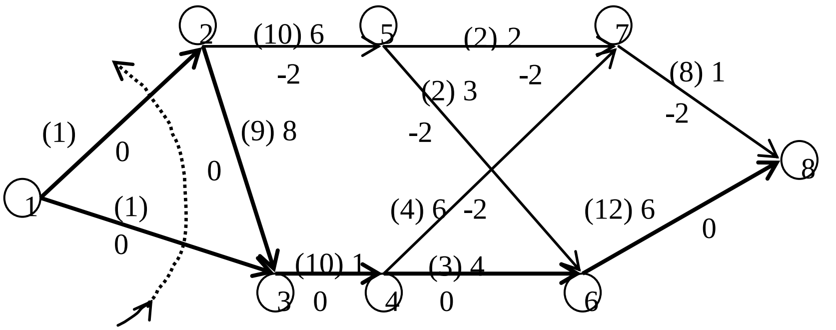


Рис. 6. Пример сети

Угловой коэффициент первого звена ломаной – $UK = 2$, а наибольшее сокращение сечения – $\Delta = 3$. Дуги (1, 2) и (1, 3) получили предельное сокращение и коллапсируют, поскольку они инцидентны полюсу. Замечательно, что вследствие слияния трёх вершин 1, 2 и 3 коллапсирует также дуга (2, 3), хотя она и не сокращалась!

На втором шаге (рис. 7) сеть критических работ упростилась, и минимальное сечение, очевидно, пересечёт дугу (4, 6), $UK = 3$.

Величина $\Delta = 2$ определяется уменьшением резервов до нуля.

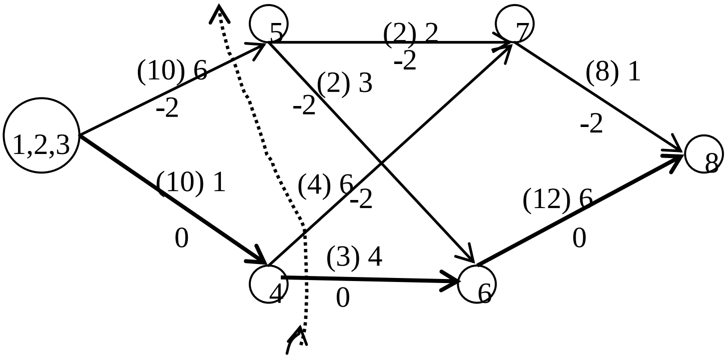


Рис. 7. Второй шаг

На третьем шаге (рис. 8) все операции становятся критическими.

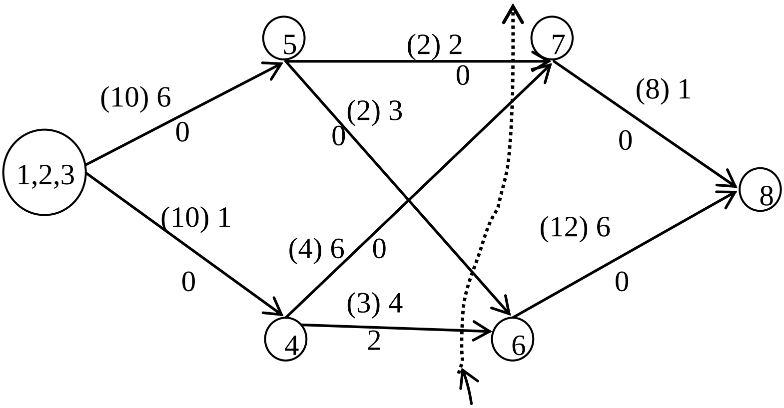


Рис. 8. Третий шаг

Сеть имеет одиннадцать сечений, минимальное показано на рис. 8, $UK = 11$. Проект сокращается на $\Delta = 2$.

На эту же величину сокращаются все дуги минимального сечения: (4, 6) + (4, 7) + (5, 6) + (5, 7). Дуги (4, 6) и (5, 7) имеют предельное сокращение и не могут быть пересечены в отрицательном направлении, поскольку имеется всего два сечения:

(2, 5) – (5, 7) + (7, 8) + (4, 6) и (3, 4) – (4, 6) + (6, 8) + (5, 7) со знаком минус для этих дуг, но каждое из них содержит другую дугу со знаком плюс.

При стягивании дуг (4, 6) и (5, 7) образуются две кратных антипараллельных дуги (4, 7) и (5, 6). Начало объединённой квазидуги будет в слитой вершине {4, 6}, поскольку вершина с наименьшим номером 4 входит именно в слияние {4, 6}.

Будем обозначать на рисунке квазидугу, составленную из антипараллельных дуг, не стрелкой, а ромбиком на конце. У такой квазидуги приводятся все перемежающиеся последовательности границ и угловых коэффициентов (см. рис. 9), в отличие от квазидуг с параллельными дугами, у которых границы первого полубесконечного интервала и нулевой коэффициент опущены.

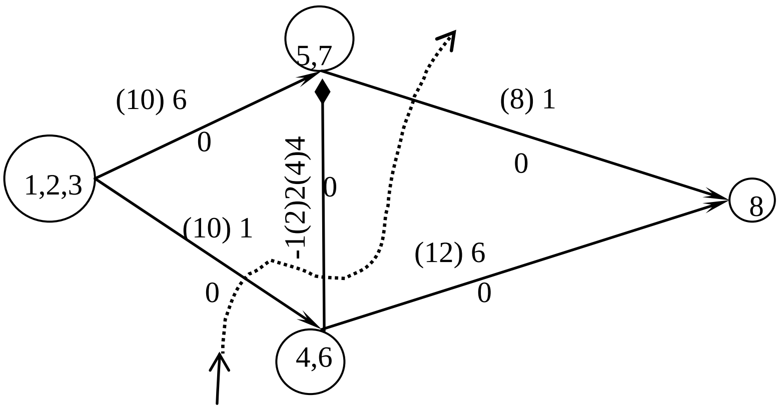


Рис. 9. Возникновение антипараллельной квазидуги

Минимальному сечению рисунка 9 соответствует $UK = 16$, $\Delta = 1$.

Квазидуги ({1, 2, 3}; {4, 6}), а также ({5, 7};8) коллапсируют, поскольку сокращаются до нижнего предела и инцидентны полюсам.

В результате образуется последняя квазидуга, инцидентная обоим полюсам, (см. рис. 10).

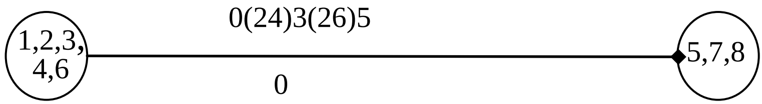


Рис. 10. Завершающая квазидуга

Неувеличиваемая дуга имеет все границы абсцисс звеньев ломаной неотрицательные, а левую границу – нулевую. Набор параметров *UK*, Δ ломаной для последней квазидуги завершает процесс построения оптимальной ломаной всего проекта.

Примеры построения составных квазидуг на основе параллельной и антипараллельной десуперпозиций рассмотрены в [5].

8. Заключение

Для решения задачи комплексной оптимизации проекта с ВЛЗ «стоимость–время» в статье рассмотрена декомпозиция проекта на критическую и резервные подсети, а именно:

– представлен декомпозиционный метод удаления резервных и (или) стягивания насыщенных дуг с применением последовательно-параллельной десуперпозиции (в том числе антипараллельной) при поиске минимального сечения;

– предложен эффективный (по количеству операций) алгоритм выравнивания минимальных резервов вместо метода критического пути для пересчёта резервов;

– введено понятие лимита сечения резервной подсети, а для его вычисления предложен накопительный итерационный алгоритм с использованием полных резервов работ.

Литература

1. АДЕЛЬСОН-ВЕЛЬСКИЙ Г. М., ДИНИЦ Е. А., КАРЗАНОВ А. В. *Потоковые алгоритмы*. – М.: Наука, 1975. – 119 с.
2. ДЫХНОВ А. Е., ПОСТОВАЛОВА И. П. *Десуперпозиция ациклических двухполюсных сетей* // Электронный журнал:

Известия Челябинского научного центра УрО РАН. – Челябинск, 2005, вып. 1(27). – С. 13-18.
3. ДЫХНОВ А. Е., ПОСТОВАЛОВА И. П. *Внешняя последовательно-параллельная декомпозиция (ВППД) ациклической двухполюсной сети* // Обозрение прикладной и промышленной математики. – М.: 2005. Т. 12. № 4. С. 953-954.
4. ПОСТОВАЛОВА И. П., Авдонькина А. В. *Нахождение минимального сечения при оптимизации сетевых графиков* // Теоретические и прикладные аспекты современной науки: сборник научных трудов. – Белгород: ИП Петрова М. Г., 2014, № 3-2.
5. ПОСТОВАЛОВА И. П. *Декомпозиция проекта при удалении и (или) стягивании дуг – операций с антипараллельной десуперпозицией* // Экономика нового времени: теоретические аспекты и практическая реализация: сборник статей и тезисов докладов XIX Всероссийской научно-практической конференции. – Челябинск, 2015. С. 238-242.
6. ПОСТОВАЛОВА И. П. *Идеи диакоптики в сетевых проектах* // Экономика и общество: проблемы и перспективы развития в условиях неопределенности: сборник статей и тезисов докладов XX Международной научно-практической конференции. – Челябинск, 2016. С. 345-349.
7. AHUJA R. K., MAGNANTI T. K., ORLIN J. B. *Networks Flows: theory, algorithms and applications* // Prentice- Hall. – Englewood Cliffs, N. J. – 1993.

DEKOMPOZITION AND DE-SUPERPOZITION METHODS DURING THE OPTIMIZATION OF BIPOLAR NETWORKS

Irina Postovalova, Chelyabinsk branch of the Financial University under the Government of the Russian Federation, Chelyabinsk, Cand.Sc., assistant professor (ira.postovalova@yandex.ru)

Abstract: *Bipolar networks are used, for example, during the optimization of network schedules «activity-on-arrow» with convex broken dependence between the cost and the operation duration.*

For the complex network schedules it is necessary to use the mathematical methods of optimization (in particular the algorithm Kelly) and the use of computers. The procedure described in the fundamental articles of Kelley, Walker and Fulkerson, based on linear programming and implemented with the help of flow algorithm in the network, allows us to find the exact optimum. Even for the best flow algorithms of the order $O(n^3)$ and $O(nm\log(n^2/m))$ with the increasing the n, the problem of simplify the network structure and the need of the decomposition and de-superposition methods is appeared.

Keywords: bipolar networks; schedule «activity-on-arrow»; optimization «cost-time»; the project decomposition; serial-to-parallel de-superposition.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии ...заполняется редактором…

Поступила в редакцию ...заполняется редактором…
Опубликована ...заполняется редактором…