

О субоптимальных решениях антагонистических игр разбиений¹

Бочаров П.С.²

(ООО УИЛИ, Москва)

Горяшко А.П.³

(Московский Технологический институт, Москва)

Для игр разбиений предложен метод приближенной оценки цены игры с квадратичной трудоемкостью по параметрам разбиения. Экспериментальным путем – сравнением с результатами ε -оптимального алгоритма, предложенного в [5] – получены оценки качества решения игры в смешанных стратегиях для игр разбиений (120,6) и (100,10). Установлены параметры чистых стратегий из множества разбиений, которые обеспечивают получение субоптимальных решений малой мощности.

Ключевые слова: разбиения, композиции, игры Блотто, игры Лотто, матричные игры, оптимальное решение игры, цена игры, платежная матрица, собственный ресурс, уравновешенность.

1. Введение.

Изучение антагонистических игр размещения ресурсов начало которому было положено классической работой Э. Бореля [3], в последние пару десятилетий велось достаточно интенсивно. Связано это, в частности, с тем обстоятельством, что простое описание этого класса антагонистических игр (называемых обычно играми Блотто и Лотто, с добавлением различных воинских чинов) доставляет исследователям много серьезных проблем. Эти проблемы возникают, прежде всего, в связи с астрономически большим числом возможных стратегий игры даже при относительно небольших значениях исходных параметров: целого числа возможных полей (m) и целого числа размещаемых по этим полям ресурсов (n). В [1] было отмечено, что игры такого класса могут быть рассмотрены на языке комбинаторных алгоритмов [10], как игры разбиений и игры композиций.

¹ Авторы крайне признательны А.С. Немировскому за многочисленные консультации и неоценимую помощь в проведении экспериментов.

² Павел Сергеевич Бочаров, технический директор (pavel@wheely.com)

³ Александр Петрович Горяшко, доктор технических наук, профессор (petrovich4you@gmail.com)

Ранее было установлено, что оптимальное решение игр Блотто возможно только в смешанных стратегиях, а в [14] для Нэш-равновесия найдена функция распределения ресурсов (для случая равных, так и для случая неравных ресурсов игроков)⁴. В частности, установлено, что при равных ресурсах игроков n и числе полей m , support ⁵ множество оптимального решения состоит из взятых с одинаковыми вероятностями всех чистых стратегий, для которых ни в одном из полей ресурс не превосходит $2n/m$. Очевидно, указанный способ задания support множества мало обозрим.

1.1. Игры размещения ресурсов.

Из теоремы Каратеодори [6] следует, что существует оптимальное решение в смешанных стратегиях для задач того класса, к которым принадлежит игра полковника Блотто, с числом чистых стратегий не больше $(n+1) \cdot m + 1$. Таким образом, например, для задачи полковника Блотто $(120, 6)$ ⁶ существует оптимальное решение, которое содержит не более 727 чистых стратегий. Можно ли привести пример такого решения? Хотя результат К. Каратеодори известен уже 105 лет, до недавних пор, насколько нам известно, не предпринималось попыток представить оптимальное решение матричной антагонистической игры с постоянной суммой, в котором число стратегий было близким к оценке, установленной теоремой Каратеодори.

В работе [5] предложен метод декомпозиций для линейных минимизационных орakuлов, который позволяет находить ε -оптимальные решения широкого класса матричных задач, с так называемыми «хорошо организованными» матрицами⁷. В частности, требуемой структурой обладает платежная матрица игры, названной в [5] *attacker vs defender*, которая по существу является расширением матричной игры полковника Блотто (полям, в которых распределяются целые значения ресурсов, могут быть приписаны различные веса). Хотя платежная матрица таких игр даже при небольших значениях n , m содержит сотни миллионов столбцов и строк, предложенный метод гарантирует нахождение ε -оптимального решения за полиномиальное время по n и m . Например, программная реализация метода [5], позволяет находить ε -оптимальное ре-

⁴ В [14] использована теория копул для нахождения смешанного равновесия игры при общих условиях на ресурсы игроков

⁵ В теории игр support множеством называют множество чистых стратегий, которые играют с ненулевой вероятностью в игре со смешанными стратегиями

⁶ Здесь и далее в тексте используется обозначение (n, m) , где n — суммарное количество ресурсов, которое игрокам необходимо разместить по m участкам.

⁷ В [5] хорошо организованной называется такая $K \times L$ матрица B , что при любом $x \in \mathbb{R}^K$ можно легко найти максимальное и минимальное значение скалярного произведения столбцов матрицы $B[x]$

шение (при $\varepsilon \leq 0,02$) для игры Блотто (120,6), примерно за 20 мин. машинного времени на среднем по производительности ноутбуке, причем количество стратегий в support множествах в разы меньше верхней границы, установленной теоремой Каратеодори⁸. При увеличении числа полей предлагаемый метод остается вполне доступным, хотя требуемое время решения может увеличиваться в разы.

Возможность численного анализа ε -оптимальных решений, состоящих не более чем из нескольких сотен чистых стратегий, позволяет понять некоторые особенности структуры стратегий, входящих в support множества класса дискретных игр полковника Блотто и полковника Лотто. Более того, использование в виде эталона тех смешанных стратегий, которые предоставляет метод [5], позволяет оценить качество *субоптимальных* решений, полученных случайным выбором из подмножества разбиений с заранее выбранными параметрами уравниваемости и собственного ресурса. Таким образом, центр тяжести решения задачи точного нахождения цены матричной игры с постоянной суммой в смешанных стратегиях для класса игр полковника Блотто и полковника Лотто, переносится на поиск комбинаторных свойств разбиений, позволяющих отобрать относительно малое число стратегий «достойных» включения в support множества.

1.2. Игра Лотто и игра разбиений

Большинство теоретических и экспериментальных исследования игр размещения ресурсов, относятся к играм композиций (играм полковника Блотто). И хотя при фиксированных значениях n и m число композиций (а значит и размерность платежной матрицы) примерно в $m!$ раз больше, чем число разбиений, анализ структуры оптимальных решений в смешанных стратегиях достаточно прост, хотя и не претендует на конструктивность.

В работах [7], [8] было введено понятие игры Лотто, в частности, в игре полковника Лотто m полей, на которых игроки распределяют ресурсы, для них неразличимы, как и в модели игр разбиений из [1]. Если в игре полковника Блотто V платежная функция $H_V(\alpha, \beta)$ вводится, как

$$H_V(\alpha, \beta) = 1/m \sum_i \text{sign}(\alpha_i - \beta_i), \quad (1)$$

то платежная функция $H_L(\alpha, \beta)$ для игры Лотто L вводится в [7], как

$$H_L(\alpha, \beta) = (1/m^2) \sum_j \sum_i \text{sign}(\alpha_i - \beta_j) \quad (2)$$

В тоже время платежная функция игры разбиений в [1] вводится как

$$H_P(\alpha, \beta) = (1/|\Theta(\alpha)|) \sum_i \sum_{\Theta(\alpha)} \text{sign}(\alpha_{k_i} - \beta_j) \quad (3)$$

⁸ А.С. Немировский, личное сообщение

где $\Theta(\alpha)$ - множество перестановок для α , которые берутся с равными вероятностями

В [7] отмечалось, что игра полковника Блотто (n, m) и полковника Лотто (n, m) имеют одну и ту же цену, когда все перестановки берутся с равными вероятностями. Это замечание остается справедливым и при определении цены игры (3).

Для игры разбиений, точный ответ на вопрос «какая из пары заданных стратегий выигрывает» требует вычислительных ресурсов, экспоненциально растущих с ростом числа полей. Потому можно было ожидать, что общее решение игры разбиений окажется более сложным, нежели игры композиций. Оказалось, однако, что для пары разбиений существует алгоритм сложностью не более $\text{const} \cdot m^2$, который позволяет определить победителя с погрешностью не превосходящей 0,02 (по крайней мере, в диапазоне разбиений от $(4, 2)$ до $(64, 8)$ (см. [1]).

Практический интерес к изучению игры Лотто, связан с тем, что антагонистическая игра при *отсутствии информации* о размещении сил (ресурсов) противником – случай, по крайней мере столь же распространенный, как и ситуации, в которых задана фиксированная нумерация полей (игра полковника Блотто) или информация о важности для противника различных «полей» размещения ресурсов – игра *attacker vs defender* из [5]. В качестве примеров можно указать работы, в которых изучается проведение турниров [11], проблемы политической конкуренции [12], аукционы (особенно в случаях приобретения набора предметов).

Целью настоящей работы является формулировка субоптимального метода решения антагонистических матричных игр разбиений и оценка качества такого метода с помощью ε -оптимальных решений. Дальнейшее изложение построено следующим образом. В разделе 2 «Анализ комбинаторных свойств чистых стратегий» анализируются численные результаты, полученные при синтезе ε -оптимальных решений игр полковника Блотто $(120, 6)$ и $(100, 10)$ методом [5]. В разделе 3 «Синтез субоптимальных решений для игр разбиений» предложено выбирать стратегии для решения игр разбиений из подмножества чистых стратегий класса SE [1], используя при этом метод получения ε -оптимальных решений [4] для оценки качества субоптимального решения. В заключении обсуждаются возможности применения предлагаемых субоптимальных методов.

2. Анализ комбинаторных свойств чистых стратегий.

Существовавшие до сих пор теоретические методы нахождения оптимальных решений игр типа игры полковника Блотто и полковника Лотто фактически не уделяли внимания конкретной структуре стратегий, входящих в support множества. Так, единственное требование к распределению ресурсов по полям в support множествах

(при равных ресурсах у противников), состояло в том, что ресурс каждого поля должен быть ограничен величиной $2n/m$ [7].

Экспериментальные исследования (например, [2]) вообще не претендовали на исследование оптимальных решений, а лишь анализировали эвристические приемы последовательных «стратегических рассуждений», которые, по предположению, позволяли выбирать «конкурентоспособные» стратегии. Вопрос о том, насколько объективно хороши результаты подобных «стратегических рассуждений» оставался открытым. В работе [1], основанной на анализе комбинаторных свойств чистых стратегий в игре разбиений, экспериментальные доказательства в пользу выбора классов стратегий с высокой «выигрывающей способностью», опирались на результаты, показанные такими стратегиями в турнирах.

Здесь выбраны, как наиболее изученные объекты, два множества композиций $(120,6)$ и $(100,10)$, для которых вычислены ε -оптимальные решения в смешанных стратегиях. Эти решения содержат около двухсот смешанных стратегий, а гарантированная погрешность цены игры составляет около 2%.

(В приложении А приведены первые десять смешанных стратегий для обоих игроков для игр $(36,6)$, $(120,6)$ и $(100,10)$ в порядке убывания их вероятностей в support множестве.)

Анализ чистых стратегий в найденных ε -оптимальных решениях показывает, что ограничение максимального размера ресурса в одном поле величиной $2n/m$ в этих решениях не выполняется. Например, для игры Блотто $(120,6)$ максимальные значения, встречавшиеся на полях игрока А выглядят как $(59\ 62\ 53\ 40\ 53\ 64)$, а у игрока D как $(53\ 46\ 51\ 51\ 50\ 48)$.

Однако, представив все композиции ε -оптимальных решений в виде разбиений, упорядоченных по убыванию, можно заметить, что ресурс размещенный в первой половине разбиения, часто *втрое!* больше ресурса второй половины (см. точные данные в Приложении А). В [1] уже было отмечено, что величина уравновешенности разбиения α (аналог центра масс разбиения) является существенной характеристикой «выигрывающей способности» этого разбиения. Потому естественно выяснить связана ли неравномерность размещения ресурсов в ε -оптимальных support множествах с величиной уравновешенности разбиения, т.е. может ли выбор параметра уравновешенности способствовать отбору разбиений при поиске субоптимального решения.

Для ответа на этот вопрос превратим множество $\mathfrak{Z}$, содержащее $T(n,m)$ композиций найденных ε -оптимальных решений в множество $\mathfrak{Z}^*$, содержащее T разбиений вида $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_m$, где $\alpha_i \geq \alpha_{i-1}, i = 1, \dots, m$.

Вначале рассмотрим как устроено множество *почти всех* (n,m) разбиений (везде далее m – четное). Оказывается, что при больших значениях параметров n и m для всех i величины $S_i(T) = (1/T) \sum_j \alpha_{ij}$, демонстрируют определенную тенденцию к статистической предсказуемости. Эта тенденция заметна при вычислении разности между величинами полусуммы первых $m/2$ слагаемых $S^1(\mathfrak{Z}^*) = \sum_{i=1}^{m/2} S_i(T)$ и полусуммы вторых $m/2$ слагаемых $S^2(\mathfrak{Z}^*) = \sum_{i=m/2+1}^m S_i(T)$.

Для любого разбиения $\alpha \in \mathfrak{Z}^*$ вычислим значение функционала $Q(\mathfrak{Z}^*)$, где

$$Q(\mathfrak{Z}^*) = \{S^1(\mathfrak{Z}^*) - S^2(\mathfrak{Z}^*)\}/n = 2 S^1(\mathfrak{Z}^*)/n - 1 \quad (4)$$

Функционал $Q(\mathfrak{Z}^*)$ принимает значения из отрезка $[0,1]$. Если $\mathfrak{Z}^*$ совпадает со всем множеством $\mathfrak{Z}^*(n,m)$ разбиений, то $Q(\mathfrak{Z}^*) = 0$ для разбиения $(n/m, n/m, \dots, n/m)$ и $Q(\mathfrak{Z}^*) = 1$ для разбиения $(n, 0, \dots, 0)$.

Получим оценку $Q(\mathfrak{Z}^*)$ для множества всех (n,m) разбиений. Из метода краевого представления разбиений [19] следует, что при достаточно больших значениях параметров n и m , значения α_i ($i = 1, \dots, m$) для почти всех разбиений $\alpha \in \mathfrak{Z}^*(n,m)$ могут быть представлены как

$$\alpha_i \sim n/m \ln(m/i) \quad i = 1, \dots, m$$

Воспользуемся этим приближением, чтобы оценить $S^1(\mathfrak{Z}^*(n,m))$

$$\begin{aligned} S^1(\mathfrak{Z}^*(n,m)) &= \sum_{i=1}^{m/2} (n/m) \cdot \ln m/i = (n/m) \ln \{ \prod_{i=1}^{m/2} (m/i) \} = \\ &= (n/m) \ln (m^{m/2} / (m/2)!) \end{aligned} \quad (5)$$

Используя приближение Стирлинга, из (5) получаем

$$S^1(\mathfrak{Z}^*(n,m)) \sim (n/m) \{ (m/2) \ln 2e - (1/2) \ln \pi m \} = (n/2) \cdot (\ln 2 + 1 - (\ln \pi m)/m) \quad (6)$$

Из (4) и (6) следует

$$Q(\mathfrak{Z}^*(n,m)) \sim \ln 2 - (\ln \pi m)/m \sim 0,693 - (\ln \pi m)/m \quad (7)$$

Таким образом, при достаточно больших значениях m , доля ресурсов, приходящихся на первую половину почти всех (n,m) разбиений близка к $\ln 2$.

Очевидно, из (7) не следует, что величина $Q(\mathfrak{Z}^*(n,m))$ будет в точности описывать поведение полусуммы значений разбиений при любых значениях m или поведение отдельных подмножеств разбиений (в частном случае, чистых стратегий в оптимальных support множествах). Поэтому вначале были построены распределения значений

$Q(\mathfrak{Z}^*(n,m))$ для различных (n,m) -разбиений (см. приложение С), анализ которых позволяет сделать следующие выводы:

- для множеств разбиений $(100,10)$, $(144,12)$, где $n = m^2$ среднее значение близко к $\ln 2$ (с точностью до третьего знака после запятой);
- для множеств разбиений $(120,6)$, где $n > m^2$ среднее значение отличается от $\ln 2$ во втором знаке после запятой;
- для множеств разбиений $(120,20)$ $(90,6)$, для которых $n < m^2$, средние значения распределения заметно сдвигаются вправо и отличаются от $\ln 2$ уже в первом знаке после запятой.

Итак, замеченная особенность вида разбиений скорее является следствием соотношения параметров множества разбиений, нежели характерна для особых свойств оптимального решения.

Особенность, заметная в смешанных стратегиях ε -оптимальных решений, состоит в том, что среднее значение собственного ресурса [1] этих стратегий близко к максимальному, т.е. чаще всего в этих стратегиях мало повторяющихся значений (см. приложение А).

Рассмотрим, как максимальная величина собственного ресурса (когда значения всех полей различны) влияет на неравномерность распределения ресурсов по полям. Легко заметить, что для таких разбиений минимальное значение второй половины полей – от $(m/2) - 1$ до m – равно $((m/2)+1)(m/4)$ и максимальное значение этой половины полей равно $(n + 2m)/2$. Соответственно, минимальное значение первой половины полей равно $(n + 2m)/2$ и максимальное значение этой половины полей равно $n - ((m/2)+1)(m/4)$

Пример. Для множества разбиений $(120,6)$, единственными разбиениями будут: с минимальным значением второй половины $(39, 38, 37, 3, 2, 1)$ и с максимальным $(23,22,21,19,18,17)$

Таким образом, для разбиений с максимальным собственным ресурсом R величину функционала (4) можно оценить, как

$$(1/2) - m/n \leq Q(\mathfrak{Z}_{\max R}(n,m)) \leq 1 - (m^2/4n) + m/2n \quad (8)$$

Например, для разбиений с максимальным собственным ресурсом $(120,6)$ получаем

$$0,45 \leq Q(\mathfrak{Z}_{\max R}(n,m)) \leq 0,95 \quad (9)$$

В приложении В приведены экспериментальные данные для величин первых трех моментов распределений величины $Q(\mathfrak{Z}_\varepsilon)$ для стратегий в support множествах ε -оптимальных решений для двух игроков в играх полковника Блотто $(120,6)$ и $(100,10)$. Оказалось, что величина первого момента для игры Блотто $(120,6)$ равна 0,52, а для игры $(100,10)$ –

0,5, т.е. ближе к нижней границе оценки (9), и совпадает с асимптотической оценки (7) при $m = 20$. В любом случае не возникает сомнений, что заметное превышение размещаемого ресурса в первой половине разбиения есть объективная закономерность ε -оптимальных решений.

3. Синтез субоптимальных решений для игр разбиений

Небольшие по мощности support множества для игр полковника Блотто (120,6) и (100,10), были использованы в качестве «эталона».

Вычислим цену игры между игроком АС, который играет ε -оптимальное равновесное решение и игроком С, который играет набор чистых стратегий, выбранных из множества p, m – разбиений по определенным правилам. Будем полагать, что чем ближе к 0 значения цены игры АС и С, тем «ближе» игрок С к оптимальному решению и, соответственно, тем выше качество нашего «синтетического» метода выбора стратегий.

Эксперимент игры между АС и С устроен следующим образом.

0. Пусть заданы одни и те же параметры p, m для АС и С и параметры N, M для числа чистых стратегий игроков АС и С, соответственно.

1. Из ε -оптимального support множества, упорядоченного по вероятностям, выбираем первые N стратегий.

2. Из множества разбиений с максимальным значением собственного ресурса S^* (см.[1]) случайно и равномерно выбираем подмножество мощности M с определенным значением уравновешенности.

3. Находим значение цены игры разбиений и соответствующие support множества. (Для решения этой задачи создана программа, которая использует выпуклую оптимизацию, а именно конкретную ее реализацию — библиотеку CVXPY).

4. Повторяем эксперимент I раз .

5. Вычисляем среднее значение цены.

Прежде чем реализовать подобный эксперимент, необходимо установить эффективное значение параметров уравновешенности PB и собственного ресурса R , т.е. такие значения при которых результаты игры между игроками А и С наиболее близки. Этот выбор осуществлялся с помощью компьютерного моделирования. Например, зная вид функции распределения параметра уравновешенности и распределения собственного ресурса для множества разбиений (120,6) удалось установить эффективные значения этих параметров: значение R выбирается максимальным, а значение PB – из диапазона (-0,8 -0,9). На рис.1 приведены результаты части экспериментов по нахождению оптимального зна-

чения уравниваемости в случае разбиения (120,6). Видно, что при $PB = -0,85$ и максимальном значении собственного ресурса и при 200 стратегиях, выбранных случайно из этого множества, результат игры С и АС с тем же числом чистых стратегий равен $-0,02$.

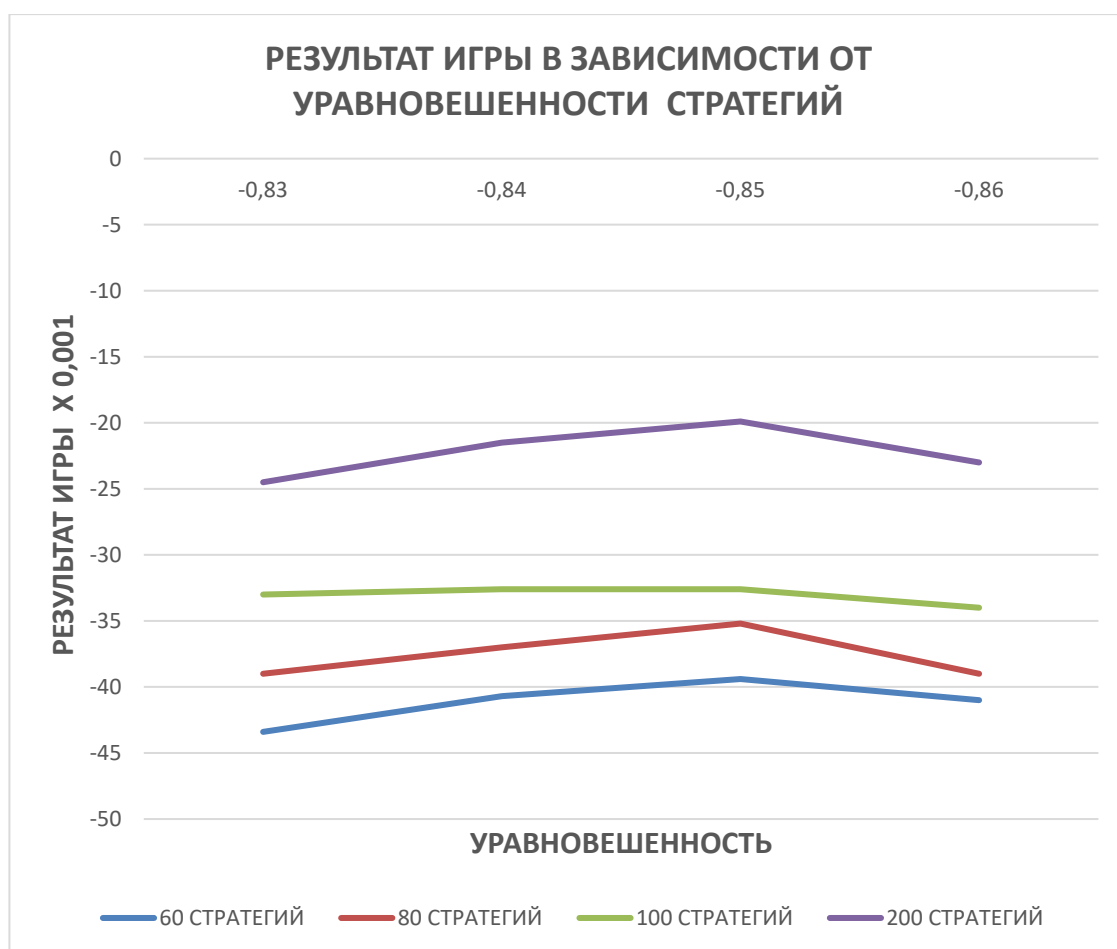


Рис.1. Зависимость результатов игры AS и AC (случай (120,6)-разбиений) от выбора параметра уравниваемости игрока AC.

Так были получены наиболее эффективные значения PB равные $-0,85$ для множества разбиений (120,6) и $-1,55$ для множества разбиений (100,10).

Следует отметить, что относительное положение этих точек на распределении числа разбиений в зависимости от параметра уравниваемости совпадают $(-0,85/5) \sim (-1,55/9)$.

После выбора этих значений были проведены эксперименты по описанной выше последовательности шагов. На рис.2 показаны результаты этих экспериментов (все результаты получены при значениях $I = 200$).

Число стратегий M в support множестве для (120,6) было равно 100 (суммарная вероятность 0,8 для одного игрока и 0,76 для другого) и 200 (суммарная вероятность 0,

99976 для одного и 0,99971) и в support множестве для (100,10) – 100 (суммарная вероятность 0,849) и 194 (суммарная вероятность 1).

Число чистых стратегий N , случайно выбираемых из подмножества $S^*(-0,85)$ для (120,6) и $S^*(-1,55)$ для (100,10), менялось в разных экспериментах от 100 до 600.

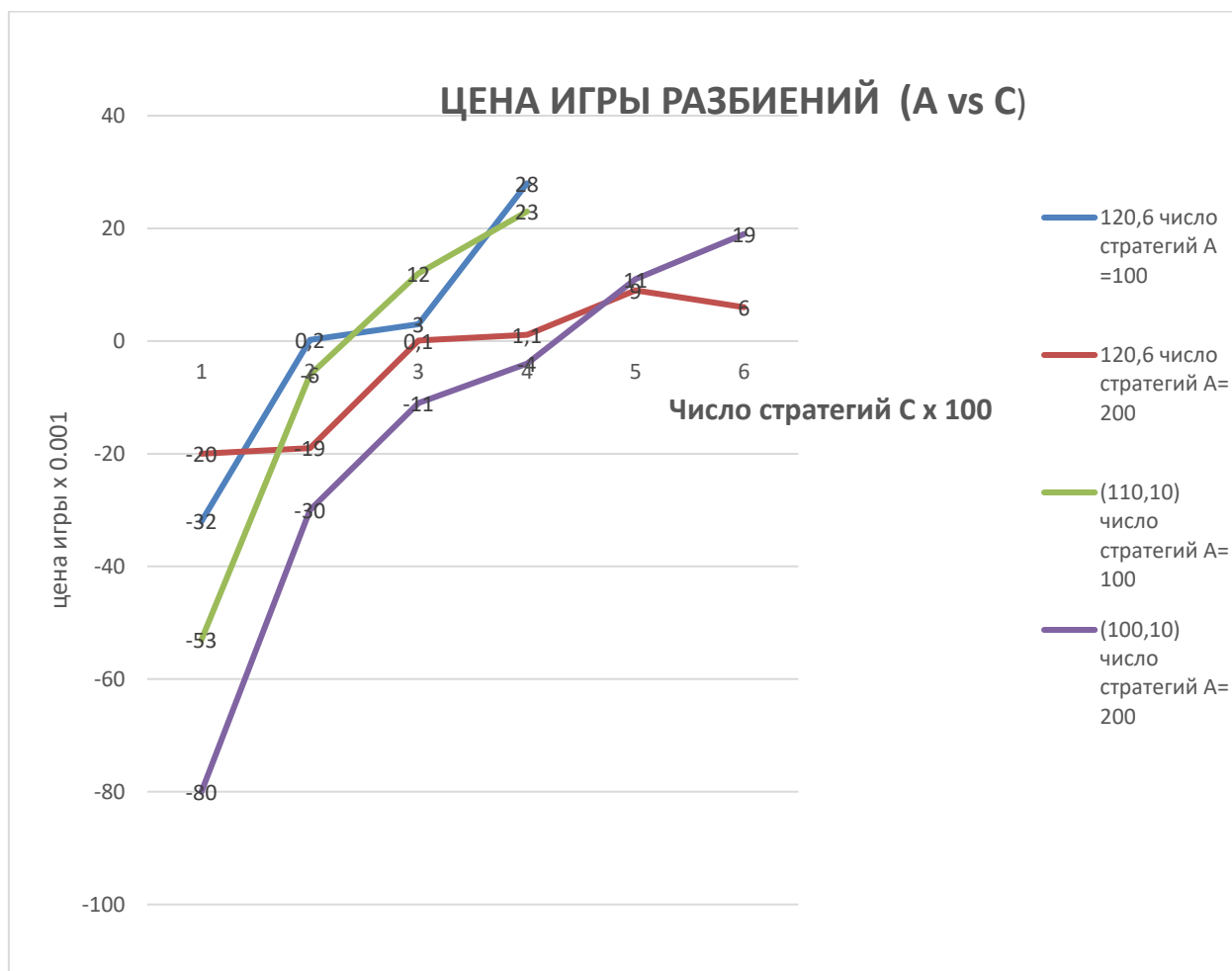


Рис. 2. Зависимость результатов игры при различных значениях числа стратегий из ε -оптимального решения (AC) и синтетического решения (C)

Результаты проделанных экспериментов позволяют сделать следующий вывод.

При $(N/M) \geq 2$ цена игры находится в диапазоне $[-0,02, 0,02]$, т.е. качество решения, которое обеспечивает «синтетический» игрок C в этих экспериментах, практически совпадает с качеством ε -оптимального решения.

Стоит также отметить, что при всех значениях $(N/M) \geq 2$, множество стратегий, которое программа оптимизации включает в support множество, в среднем не превосходит 100.

Вообще говоря, утверждать, что «синтетический» игрок С «равносилен» игроку, который реализует ϵ -оптимальное решение только на основании того, что они играют между собой вничью, было бы преждевременно. Поэтому был проведен цикл экспериментов, в которых два игрока – АС (ϵ -оптимальный) и С (синтетический, с фиксированными параметрами уравновешенности и собственной силы) – играют по очереди с игроком Т (тестовым).

В приложении Д приведены результаты, полученные в экспериментах только с (120,6) разбиениями.

В таблице Д1 стратегии С выбирались при значении параметра неуравновешенности равного -0,85 и максимальном значении собственного ресурса, а стратегии Т случайно выбирались из множества разбиений с произвольным значением собственной силы и параметром уравновешенности с произвольным значением из интервала $[0, -0,85]$. При таких параметрах цены игры не превышают значения 0,05.

В таблице Д2 стратегии С выбирались при тех же значениях параметров, но стратегии Т случайно выбирались из множества разбиений для которых значение собственной силы не превосходило величины 0.6 от максимального значения. При таких параметрах цены игры уже находятся в интервале $[0,2, 0,4]$.

Во всем исследованном диапазоне имеет место следующая закономерность.

Наилучшие результаты субоптимальный метод (игрок С) показывает при числе стратегий, вдвое превышающих число стратегий ϵ -оптимального решения, и в этом случае разница в ценах решения не превосходит 0,018, а средняя разница составляет 0,00518.

Заключение.

Предложенный в работе субоптимальный метод поиска решения антагонистической матричной игры разбиений, дает основание надеяться на возможность решения подобных задач с практически допустимой погрешностью и сложностью не выше квадратичной, не прибегая к изоэдренным алгоритмическим решениям, предложенным в [5]. Рассмотренный метод, который мы назвали субоптимальным, требует лишь экспериментального выбора значений двух параметров разбиений, причем из достаточно небольшого диапазона, и генерации небольшого числа разбиений с выбранными параметрами. Для создания из выбранного множества чистых стратегий соответствующего support множества достаточно использовать многочисленные программы оптимизации.

Нашей первоочередной задачей для последующего является поиск возможностей доказать эффективность предлагаемого субоптимального метода.

Кроме того, безусловный интерес вызывает получение оценок цены игры в случаях несимметричных ресурсов противников и сравнение этих результатов с теоретическими.

Одна из интересных на наш взгляд возможностей применения рассмотренного метода – экспериментальное изучение игр размещения ресурсов в рамках поведенческой теории игр [2], [9], [11], [12], [13]. Объяснение принципов принятия «стратегических решений» на основе психологических теорий типа «глубины рассуждений» [17], позволяет, в основном, отделить совсем тривиальные рассуждения от чуть более сложных. Но когда дело доходит до поиска достаточно редких особенностей изучаемого объекта, количественные меры типа числа шагов в рассуждениях уже мало полезны. Необходима возможность оценивать качественные различия в содержании рассуждений.

Стоит заметить, что турнир по игре полковника Блотто в [2], участникам было бы логично рассматривать именно, как турнир *разбиений*, поскольку при большом числе участников о возможных стратегиях которых нет никакой информации, естественно пытаться найти «сильное» решение для случая *ненумерованных* полей. И участник, который пришедший к подобному выводу, сделал бы главный шаг к победе в турнире. Для этого ему было достаточно в любом варианте, предложенном десятью победителями, исключить повторяющиеся значения полей с *большими значениями ресурсов*⁹ – например, вместо 32,32,31 разместить 33,32,30 и уверенно выиграть у всех разбиений первой десятки.

К сожалению, такого рода наблюдения – если испытуемые не обладают некоторыми (врожденными или благоприобретенными) способностями – требуют специального обучения (желательно с поощрением), что исключено в условиях one-shot игры [2]. Представляется важным и интересным понять, можно ли обучить людей принятию нетривиальных решений и, если «да», то как.

Методы, рассмотренные в работе, могут быть, в частности, использованы в таких исследованиях, как [13], где необходимо вычисление равновесных решений в игре полковника Блотто, поскольку их использование могло бы помочь изучить случаи гораздо большей размерности.

Литература

1. Бочаров П.С., Горяшко А.П. О способах анализа игр разбиений, Управление большими системами, вып.61, 2016

⁹ Это замечание следует из того простого обстоятельства, что в игре разбиений любое подмножество полей, например, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ выигрывает у подмножества полей $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ с таким же суммарным ресурсом, если $\alpha_1 = \beta_1 + 1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3 - 1$.

2. Arad A., Rubinstein A. *Multi-dimensional iterative reasoning in action: The case of the Colonel Blotto game* // Journal of Economic Behavior & Organization. – 2012. – No. 84. – P. 571–585.
3. Borel E. *La theorie du jeu et les equations integrales a noyau symetrique* // Comptes Rendus de l'Academie. – 1921. – No. 173. – P. 1304–1308. English: Translated by Savage L.J. *The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels* // Econometrica. – 1953. – No. 21. – P. 97–100.
4. S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004. Available at <http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook.html>.
5. B. Cox, A. Juditsky, A. Nemirovski, *Decomposition Techniques for Bilinear Saddle Point Problems and Variational Inequalities with Affine Monotone Operators on Domains Given by Linear Minimization Oracles*, June 2015 · Journal of Optimization Theory and Applications
7. Gross, O., Wagner, R. (1950) A continuous Colonel Blotto game. RAND Corporation RM-408
8. Eckhoff, J. (1993), "Helly, Radon, and Carathéodory type theorems", *Handbook of Convex Geometry*, A, B, Amsterdam: North-Holland, pp. 389–443
9. Hart S. *Discrete Colonel Blotto and General Lotto Games* // International Journal of Game Theory. – 2008 – No. 36. – P. 441–460.
10. Hortalla-Vallve R., Lorente-Sequer A. *An experiment on Non-Zero Sum Colonel Blotto Games*, School of Economic and Finance, working paper 779, Dec. 2015
11. Кнут Д. Э. *Искусство программирования*, т. 4а. — М. : Вильямс, 2013
12. Moldovanu, B., Sela, A. (2006) *Contest Architecture*. Journal of Economic Theory 126(1), 70-97
13. Moldovanu, B., Sela, A., Shi, X. (2007) *Contests for Status*. Journal of Political Economy 115, 338-363.
14. Montero M., Possajennikov A., Sefton M., Turvocy T. *Majoritarian Contests with Asymmetric Battlefields: An Experiment*, Centre for decision Research & Experimental Economics Discussion Paper No.2013-12
15. Roberson B. *The Colonel Blotto Game* // Econ. Theory. – 2006 – No. 29. – P. 1–24.
16. Rosen, S. (2001) *Prizes and Incentives in Elimination Tournaments*. American Economic Review 76(4), 701-715.
17. Sahuguet N, Persico N (2006) *Campaign spending regulation in a model of redistributive politics*. Econ. Theory 28:95–124
18. Stahl D.O., Wilson P.W. *On players models of other players: theory and experimental evidence* // Games and Economic Behavior. – 1995. – No. 10. – P. 218–254.

19. A. M. Vershik, Yu. V. Yakubovich, “The limit shape and fluctuations of random partitions of naturals with fixed number of summands”, *Mosc. Math. J.*, 1:3 (2001), 457–468.

Приложение А. ϵ -оптимальные решения игры Блотто

Игра Блотто (36,6)

Смешанные стратегии:

Игрок А, 77 чистых стратегий, гарантированный результат: -0.00016

Игрок D, 77 чистых стратегий гарантированный результат: 0.00016

Игрок А	Игрок D
# 1 prob=0.04548042, [11, 1, 5, 6, 2, 11]	# 1 prob=0.04544682, [1, 11, 6, 5, 2, 11]
# 2 prob=0.04167369, [7, 12, 8, 4, 4, 1]	# 2 prob=0.04160816, [12, 7, 4, 8, 4, 1]
# 3 prob=0.03819337, [3, 11, 4, 1, 9, 8]	# 3 prob=0.03819510, [11, 3, 1, 4, 9, 8]
# 4 prob=0.03575705, [9, 0, 6, 9, 7, 5]	# 4 prob=0.03565172, [0, 9, 9, 6, 7, 5]
# 5 prob=0.03072001, [2, 7, 9, 0, 9, 9]	# 5 prob=0.03070931, [7, 2, 0, 9, 9, 9]
# 6 prob=0.03032104, [10, 9, 6, 5, 6, 0]	# 6 prob=0.03029755, [9, 10, 5, 6, 6, 0]
# 7 prob=0.02974018, [4, 5, 7, 10, 5, 5]	# 7 prob=0.02975046, [5, 4, 10, 7, 5, 5]
# 8 prob=0.02867062, [5, 10, 2, 2, 11, 6]	# 8 prob=0.02859053, [10, 5, 2, 2, 11, 6]
# 9 prob=0.02710876, [11, 4, 3, 10, 6, 2]	# 9 prob=0.02708519, [4, 11, 10, 3, 6, 2]
# 10 prob=0.02667087, [9, 6, 2, 11, 0, 8]	# 10 prob=0.02676095, [6, 9, 11, 2, 0, 8]
...	...

Игра Блотто (120,6)

Смешанные стратегии:

Игрок А, 227 чистых стратегий, гарантированный результат: -0.02587182

Игрок D, 229 чистых стратегий гарантированный результат: 0.02040023

Игрок А	Игрок D
# 1 prob=0.01815909, [22, 0, 39, 21, 29, 9]	# 1 prob=0.01668546, [2, 27, 20, 3, 39, 29]
# 2 prob=0.01705770, [9, 37, 20, 34, 7, 13]	# 2 prob=0.01645389, [30, 28, 34, 7, 11, 10]
# 3 prob=0.01698687, [5, 40, 25, 40, 5, 5]	# 3 prob=0.01652795, [13, 8, 23, 28, 15, 33]
# 4 prob=0.01489527, [36, 30, 7, 4, 18, 25]	# 4 prob=0.01531647, [23, 15, 17, 15, 24, 26]
# 5 prob=0.01347292, [37, 17, 32, 28, 3, 3]	# 5 prob=0.01375352, [14, 10, 39, 39, 13, 5]
# 6 prob=0.01307979, [14, 16, 6, 16, 37, 31]	# 6 prob=0.01308785, [5, 3, 24, 35, 21, 32]
# 7 prob=0.01294160, [25, 29, 5, 20, 19, 22]	# 7 prob=0.01278663, [6, 21, 40, 37, 3, 13]
# 8 prob=0.01261964, [13, 19, 39, 14, 15, 20]	# 8 prob=0.01266184, [8, 5, 14, 40, 34, 19]
# 9 prob=0.01257902, [40, 10, 8, 5, 39, 18]	# 9 prob=0.01235132, [34, 32, 5, 6, 40, 3]
# 10 prob=0.01171438, [17, 5, 16, 36, 40, 6]	# 10 prob=0.01192810, [35, 10, 25, 17, 12, 21]
...	...

Игра Блотто (100,10)

Смешанные стратегии:

Игрок А, 185 чистых стратегий, гарантированный результат: -0.05591

Игрок D, 182 чистых стратегий гарантированный результат: 0.06349

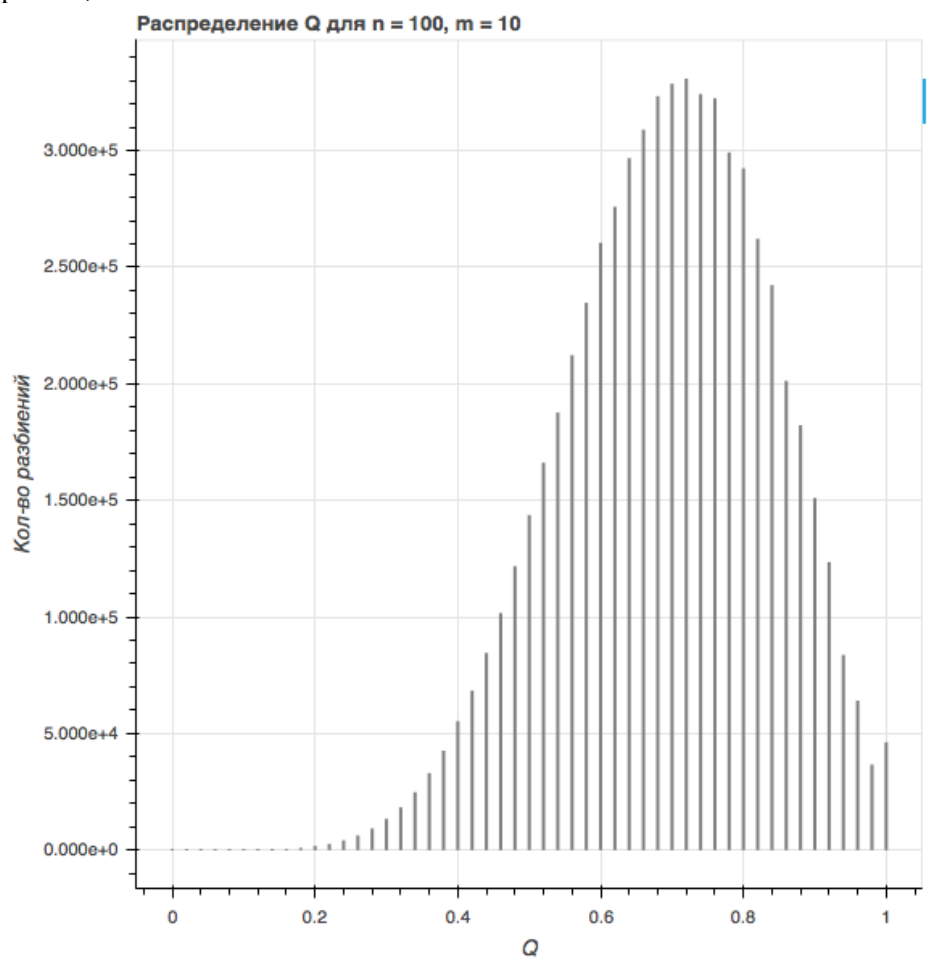
Игрок А	Игрок D
---------	---------

# 1 prob=0.02217866, [5, 4, 12, 2, 15, 8, 15, 13, 11, 15]	# 1 prob=0.02323685, [8, 18, 20, 15, 7, 4, 9, 15, 1, 3]
# 2 prob=0.01730673, [3, 8, 8, 20, 10, 9, 9, 17, 4, 12]	# 2 prob=0.02110652, [9, 2, 15, 18, 20, 8, 2, 9, 13, 4]
# 3 prob=0.01676447, [16, 19, 14, 0, 14, 13, 3, 2, 0, 19]	# 3 prob=0.01842579, [7, 14, 18, 14, 3, 1, 12, 14, 10, 7]
# 4 prob=0.01596637, [0, 10, 19, 1, 1, 20, 10, 18, 1, 20]	# 4 prob=0.01799603, [17, 4, 4, 17, 10, 15, 6, 10, 15, 2]
# 5 prob=0.01593825, [20, 13, 7, 3, 2, 2, 13, 4, 18, 18]	# 5 prob=0.01730226, [15, 11, 3, 20, 10, 9, 4, 8, 7, 13]
# 6 prob=0.01556801, [15, 19, 11, 15, 13, 3, 7, 0, 15, 2]	# 6 prob=0.01666875, [1, 13, 7, 4, 17, 20, 8, 13, 12, 5]
# 7 prob=0.01502170, [1, 20, 2, 8, 12, 18, 8, 8, 8, 15]	# 7 prob=0.01477735, [3, 8, 16, 0, 20, 0, 18, 12, 8, 15]
# 8 prob=0.01486085, [9, 8, 3, 6, 13, 17, 19, 14, 5, 6]	# 8 prob=0.01451475, [10, 11, 17, 19, 0, 13, 18, 4, 0, 8]
# 9 prob=0.01481963, [7, 20, 7, 11, 5, 7, 0, 15, 11, 17]	# 9 prob=0.01415257, [13, 9, 6, 9, 11, 14, 17, 0, 2, 19]
# 10 prob=0.01478143, [9, 15, 5, 5, 20, 19, 11, 10, 3, 3]	# 10 prob=0.01354922, [19, 7, 17, 9, 18, 7, 0, 9, 3, 11]
...	...

Приложение В. Моменты распределения значений функции $Q(\alpha) = (2 \cdot S_1(\alpha) / n) - 1$, где $S_1(\alpha)$ — это сумма первых $m/2$ значений разбиения p в ε -оптимальных решениях.

...				
	(100, 10), A	(100, 10), D	(120, 6), A	(120, 6), D
Первые 40	Mean: 0.512 Std: 0.0963 Skew: -0.0936	Mean: 0.5085 Std: 0.0916 Skew: -0.2668	Mean: 0.4916 Std: 0.1092 Skew: 0.0090	Mean: 0.5154 Std: 0.1286 Skew: -0.3780
Последние 40	Mean: 0.5585 Std: 0.0992 Skew: 0.5850	Mean: 0.5509 Std: 0.1255 Skew: -0.7023	Mean: 0.5650 Std: 0.1530 Skew: 0.4806	Mean: 0.5125 Std: 0.1285 Skew: -0.2409
Все	Mean: 0.5201 Std: 0.0968 Skew: 0.2423	Mean: 0.5193 Std: 0.1074 Skew: -0.1876	Mean: 0.5084 Std: 0.1329 Skew: 0.4909	Mean: 0.4917 Std: 0.1305 Skew: 0.0125

Приложение С. Распределения значений Q для множества всех разбиений с различными параметрами n,m



n	m	m²/n	M(Q)	M(Q)-ln2
90	16	2,8	0.764	0,071
100	10	1	0.691	-0,002
120	6	0,3	0.632	-0,061
120	20	3,3	0.780	0,087
144	12	1	0.698	0,005

Приложение Д. Результаты игры стратегий из ε -оптимального и субоптимального решений с тестовым множеством.

Число тестовых стратегий	Число оптимальных стратегий	Число субоптимальных стратегий	Цена игры для оптимальных	Цена игры для субоптимальных	Разница значений цены
200	100	100	0,02	0,052	0,03
		200	0,059	0,054	0,005
		400	0,084	0,047	0,027
	200	100	0,015	0,07	-0,058
		200	0,059	0,054	0,005
		400	0,057	0,076	-0,018
400	100	100	-0,034	0,009	-0,04
		200	0,009	0,003	0,006
		400	0,033	0,002	0,03
	200	100	-0,028	0,026	-0,055
		200	0,0088;	0,0288	-0,02
		400	0,034	0,031	0,0027

Табл. Д1. Результаты экспериментов при небольших (не более 0,03) значениях цены игры

Число тестовых стратегий	Число оптимальных стратегий	Число субоптимального стратегий	Цена игры для оптимальных	Цена игры для субоптимальных	Разница значений цены
100	100	100	0,342	0,262	-0,08
		200	0,336	0,318	-0,018
	200	200	0,41	0,325	-0,08
		400	0,362	0,364	0,002
200	100	100	0,188	0,139	-0,048
		200	0,177	0,176	-0,0008
	200	200	0,228	0,182	-0,046
		400	0,212	0,215	0,002

Табл. Д2. Результаты экспериментов при значениях цены игры [0,2,0,4]

About Suboptimal Decisions of the Partition Games

Pavel Bocharov, Wheely, Moscow, Head of Mobile Development
(pavel@wheely.com).

Alexander Goryashko, Moscow Technological Institute, Doctor of Science, professor
(petrovich4you@gmail.com).

Abstract: The paper examines (n,m) -partition games (see [1]) in order to develop tractable method of suboptimal decision of the games such as colonel Blotto game or colonel Lotto game. The proposed methods are based on both the analytical and numerical results [5], analytical partitions properties and numerical simulation results. The numerical simulation for the partition games $(120,6)$ and $(100,10)$ demonstrated that one could design of the ε -optimal decision where $\varepsilon \leq 0.02$. The support set of these decisions contain no more two hundred pure strategies. The decisions complexity equals $\text{const} \cdot m^2$ for considered partitions.

Key words: game theory, colonel Blotto game, colonel Lotto game, partition, compositions, ε -optimal decision, balance, relative strength,