

УДК 681.52

ББК Ж 30

АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ НА ОСНОВЕ КВАТЕРНИОННОЙ МОДЕЛИ ВРАЩЕНИЙ¹

Никитин Д.А.²

*(Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург)*

В работе предложен синтез системы стабилизации квадрокоптера, основанный на кватернионной модели вращений. Рассматривается адаптивная система идентификации коэффициентов тяги квадрокоптера на основе метода скоростного градиента. Приводятся доказательства устойчивости, а также примеры моделирования системы.

Ключевые слова: БПЛА, квадрокоптер, адаптивное управление, метод скоростного градиента, кватернионы.

Введение

В последнее время в обществе всё большую роль начинают играть беспилотные летательные аппараты, в особенности самые доступные из них — квадрокоптеры. Их популярность в последние годы обеспечена простотой конструкции и появлением большого количества различных систем управления, многие из которых являются open-source программами.

Существует множество задач, которые можно решать с помощью квадрокоптеров, в том числе задач научных. К примеру, работы [8], [7], [19] демонстрируют обучение роботов эффективным траекториям полета, работы [5] и [18] — кооперативному поведению, а [23], [20] и [21] — навигации при помощи камер

¹ Работа была выполнена в ИПМаш РАН при поддержке гранта РНФ 14-29-00142.

² Денис Александрович Никитин, магистрант (dniken@gmail.com).

и RGBD-сенсоров. Оценка ориентации подобных машин обычно осуществляется модификациями комплементарного фильтра ([14] и [13]) или же расширенным фильтром Калмана ([10]).

Для управления квадрокоптером обзор основных существующих решений можно найти в статье [12]. Однако, можно выделить два общих свойства, присущие этим системам: они все работают на PID-регуляторах, и они все используют углы Эйлера в качестве ошибки, которую стремится минимизировать регулятор.

Проблема использования углов Эйлера заключается в том, что этот способ имеет сингулярность, а значит, в некоторых областях пространства ориентаций не будет работать. К примеру, ни одна из общедоступных систем не способна сделать полностью контролируемый flip (сальто, переворот), не отключая при этом основной регулятор. В отличие от углов Эйлера, кватернионы не имеют подобных проблем, хотя их редко используют для создания систем управления квадрокоптерами. Примером системы, полностью основанной на кватернионах, может являться [6].

Проблема же PID-регулятора в том, что для каждого конкретного робота нужно заново подбирать коэффициенты. К open-source продуктам прилагаются специальные инструкции о том, как это делать, однако всё равно, такой подход снижает эффективность системы, так как не позволяет достичь оптимальных параметров. Примеры синтеза PID-регулятора для квадрокоптера можно найти в работах [17], [15], [9].

В связи с этими проблемами была создана своя система стабилизации, использующая кватернионы в качестве ошибки регулятора, и идею, похожую на линеаризацию обратной связью, для синтеза самого регулятора. В результате получился регулятор, большинство параметров которого являются в точности физическими параметрами конкретного квадрокоптера, а оставшиеся коэффициенты не зависят от робота и могут быть подобраны единожды для всего класса машин.

Также, некоторые из физических параметров конкретного робота часто бывает сложно измерить, или же они могут ме-

няться со временем прямо в полете. Поэтому особенно большую ценность приобретает система, позволяющая идентифицировать неизвестные параметры и использовать их в системе стабилизации. Существующие же адаптивные системы, к примеру [1], [16] и [24], полагаются на углы Эйлера и, в основном, стандартные PID-регуляторы.

Данная работа состоит из четырёх частей. В первой определяется используемая математическая модель. Вторая часть посвящена системе стабилизации и доказательству её устойчивости. В третьей части приводится система адаптации и идентификации коэффициентов тяги квадрокоптера, ключевых для устойчивого полета. Последняя часть описывает проведенное моделирование общей системы.

Надо также сказать, что система стабилизации была проверена на настоящих, самодельных коптерах, один из которых работал на контроллере FlyMaple, второй — на контроллере ТРИК (подробнее об этой российской разработке см. www.trikset.com, [22]).

1. Математическая модель квадрокоптера

1.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть q — кватернион вращения. Обозначим через q_w скалярную часть q , а через q_v — векторную. Тогда $q = (q_w, q_v) = (q_w, q_x, q_y, q_z)$. Так как $\|q\| \equiv 1$, $|q_w| \leq 1$ и $\|q_v\| \leq 1$.

Вектор p приравнивается к кватерниону $(0, p)$. Скалярное произведение векторов r и s обозначается как $\langle r, s \rangle$. Произведение кватернионов $a = (a_w, a_v)$ и $b = (b_w, b_v)$ определяется как

$$ab = (a_w b_w - \langle a_v, b_v \rangle, \quad a_w b_v + b_w a_v + a_v \times b_v).$$

1.2. МОДЕЛЬ

В качестве математической модели, описывающей квадрокоптер, выберем систему

$$(1) \quad \dot{q} = \frac{1}{2} q * \omega,$$

$$(2) \quad I\dot{\omega} = \begin{pmatrix} L(F_2 - F_4) \\ L(F_3 - F_1) \\ \xi(F_1 + F_3 - F_4 - F_2) \end{pmatrix} - \omega \times I\omega,$$

$$(3) \quad \ddot{H} = \frac{1}{m} (1 - 2q_x^2 - 2q_y^2) (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - g.$$

Здесь q — кватернион ориентации квадрокоптера, ω — вектор угловой скорости (рад/с), H — высота робота (м), F_i — сила тяги (Н), создаваемая i -м винтом, I — матрица моментов инерции (кг·м²), предполагаемая диагональной, m — масса робота (кг), L — расстояние от центра масс до винта (м), ξ — коэффициент связи силы тяги винта с реактивным моментом (м), g — ускорение свободного падения (м/с²).

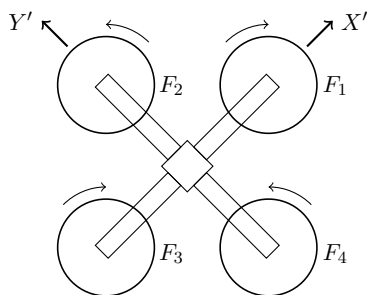


Рис. 1. Схематическое изображение квадрокоптера

Уравнение (1) — стандартное уравнение связи кватерниона и угловой скорости. Уравнение (2) — уравнение Ньютона-Эйлера для вращающегося тела. Уравнение (3) — второй закон Ньютона для высоты H . Заметим, что в уравнении (3) есть множитель $(1 - 2q_x^2 - 2q_y^2)$, который в дальнейшем для удобства будет обозначаться через k_{mod} .

Определим управление в системе как $F_i = K_i U_i$. В реальных роботах чаще всего управлению подлежит напряжение, которое можно считать линейно связанным со скоростью вращения винта, а её обычно квадратично связывают с силой тяги (см. [11]). Квадратичный закон можно тогда убрать внутрь U_i , а коэффициенты K_i будут общими множителями. Более того, если считать U_i изменяющимися от 0 до 1 (и имеющими смысл процентной мощности работы винта), то K_i будет иметь смысл максимальной силы тяги i -го винта. Именно их оценке и посвящена секция 4. В секции 3 подразумевается, что значения K_i известны, и, более того, для простоты изложения равны единому коэффициенту K .

2. Система стабилизации

2.1. СТАБИЛИЗАЦИЯ ОРИЕНТАЦИИ

Основная идея закона управления лежит в инверсии уравнений модели. Если задача, которая стоит перед роботом — висение на месте, то выполнение цели означает равенство кватерниона q значению $(1, 0, 0, 0)$. Определим тогда целевой кватернион q_d , который будет целью управления. Для висения его значение будет $(1, 0, 0, 0)$, однако можно использовать и любые другие значения для реализации более сложных движений, вплоть до переворотов.

Алгоритм 1.

- 1) Определим желаемую производную кватерниона: $\tau_d = k_p(q_d - \langle q_d, q \rangle q)$
- 2) Инверсией уравнения (1) получаем целевую угловую скорость: $\omega_d = 2 q^* * \tau_d$
- 3) Определим желаемое угловое ускорение: $\rho_d = k_d(\omega_d - \omega)$
- 4) Инверсией уравнения (2) получаем целевой момент: $M_d = I\rho_d + \omega \times I\omega$. В итоге $\dot{\omega} \equiv \rho_d$.

По сути, единственным нетривиальным действием здесь является шаг 1. Скалярное произведение необходимо в нем для того, чтобы выполнялось условие ортогональности τ_d и q в $\mathbb{R}^4$, которое в свою очередь есть следствие условия $\|q\| \equiv 1$. Оказывается, этого достаточно, чтобы при кватернионном умножении в шаге 2 скалярная часть результирующего кватерниона обращалась в 0, и ω_d была бы вектором.

Заметим, что единственными параметрами регулятора являются коэффициенты k_p и k_d , которые не зависят от физических параметров системы. То есть однажды найденные коэффициенты смогут стабилизировать любой квадрокоптер.

2.2. СТАБИЛИЗАЦИЯ ВЫСОТЫ

Момент сил M_d определяет 3 уравнения на U_i . Чтобы доопределить управления, достаточно добавить регулятор высоты. Пусть задана целевая высота H_d , которую необходимо выдержать квадрокоптеру. Применим PD-регулятор, задав целевое ускорение:

$$(4) \quad \Upsilon_d = A_p(H_d - H) - A_d\dot{H},$$

где A_p и A_d положительные. Из уравнения (3) получаем четвертое уравнение на управляющие воздействия:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^4 U_i = \frac{m}{K} \frac{(\Upsilon_d + g)}{k_{mod}}.$$

2.3. ОБЩИЙ ЗАКОН УПРАВЛЕНИЯ

Введем матрицу G , связывающую целевые моменты и ускорения с управляющими воздействиями U_i :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & KL & 0 & -KL \\ -KL & 0 & KL & 0 \\ K\xi & -K\xi & K\xi & -K\xi \\ \frac{K}{m} & \frac{K}{m} & \frac{K}{m} & \frac{K}{m} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2KL} & \frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \\ \frac{1}{2KL} & 0 & -\frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \\ 0 & \frac{1}{2KL} & \frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \\ -\frac{1}{2KL} & 0 & -\frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \end{pmatrix}$$

И тогда управления рассчитываются просто из матричного умножения:

$$(6) \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2KL} & \frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \\ \frac{1}{2KL} & 0 & -\frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \\ 0 & \frac{1}{2KL} & \frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \\ -\frac{1}{2KL} & 0 & -\frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{dx} \\ M_{dy} \\ M_{dz} \\ \Upsilon_d + g \\ k_{mod} \end{pmatrix}.$$

2.4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ

Устойчивость высоты при использовании регулятора (4) очевидна. Докажем теперь, что алгоритм 1 обеспечивает цель управления ориентацией для почти всех начальных состояний. Пусть $q_d = (1, 0, 0, 0)$. Это предположение неограничивающее, так как в противном случае мы можем ввести модифицированный кватернион ориентации, $q' = q_d^* * q$, в качестве нового состояния. При таком выборе q_d уравнения замкнутой системы для ориентации сводятся к

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{2} q * \omega \\ \dot{\omega} &= -2k_p k_d q_v - k_d \omega. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $k_p, k_d > 0$. Тогда точка $L_1 = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0)]$ является устойчивой точкой равновесия системы (7), $L_2 = [(-1, 0, 0, 0), (0, 0, 0)]$ — неустойчивой точкой равновесия, и область притяжения точки L_1 является область $\mathbb{S}^4 \setminus \{L_2\} \times \mathbb{R}^3$.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$(8) \quad V(q, \omega) = h_{11} \|q_v\|^2 + 2h_{12} \langle q_v, \omega \rangle + h_{22} \|\omega\|^2 + 2\nu(1 - q_w).$$

Очевидно, что $V(L_1) = 0$ и $V(L_2) = 4\nu$. Необходимо найти такие коэффициенты h_{ij} и ν , чтобы производная V в силу системы была отрицательна всюду, кроме точек L_1 и L_2 , а сама V была ограничена снизу. Для удобства обозначим $k_q = 2k_p k_d$.

Производную функции V в силу системы можно записать как

$$(9) \quad \dot{V} = g_{11} \|q_v\|^2 + 2g_{12} \langle q_v, \omega \rangle + g_{22} \|\omega\|^2,$$

где коэффициенты g_{ij} удовлетворяют равенству

$$(10) \quad G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{q_w}{2} \\ -k_q & -k_d \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & -k_q \\ \frac{q_w}{2} & -k_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{2} \\ \frac{\nu}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Иной способ записи уравнения (9),

$$\dot{V} = (q_v^T \quad \omega^T) \begin{pmatrix} \text{diag}_3(g_{11}) & \text{diag}_3(g_{12}) \\ \text{diag}_3(g_{12}) & \text{diag}_3(g_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_v \\ \omega \end{pmatrix},$$

показывает, что отрицательная определенность $\dot{V}$ равносильна отрицательной определенности матрицы G . Также очевидно, что $(q_v, \omega) \equiv (0, 0)$ только в точках L_1 и L_2 .

Теперь покажем, что существуют такие коэффициенты h_{ij} и ν , что матрица G будет отрицательно определена. Задача осложняется тем, что по уравнению (10) коэффициенты матрицы, в общем случае, зависят от q_w . Для решения этой проблемы воспользуемся частотной теоремой.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k_q & -k_d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}, \\ N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{2} \\ \frac{\nu}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Введем линейную динамическую систему

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Условие отрицательной определенности матрицы G тогда запишется как

$$(11) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \frac{q_w}{2} x_2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} HA + A^T H & HB \\ B^T H & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{q_w}{2} x_2 \end{pmatrix} < 0, \\ |x_1| + |x_2| \neq 0.$$

Пусть

$$u = \frac{q_w}{2} x_2, |q_w| \leq 1 \Rightarrow (x_2 + 2u)(x_2 - 2u) \geq 0 \Rightarrow$$

$$(x_1 \quad x_2 \quad u) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix} \geq 0.$$

Определим

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S = M + \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{2} & 0 \\ \frac{\nu}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тогда выполнение условия (11) будет следовать из матричного неравенства

$$(12) \quad S + \begin{pmatrix} HA + A^T H & HB \\ B^T H & 0 \end{pmatrix} < 0.$$

Частотная теорема утверждает, что существование матрицы $H = H^T$ такой, что неравенство (12) выполнено, равносильно выполнению неравенства

$$(13) \quad (x^* \quad u^*) S \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} < 0$$

при всех $(x, u) \in \mathcal{M}_{i\omega}$ для каждого $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, где множества $\mathcal{M}_\lambda$ определены как

$$\mathcal{M}_\lambda = \begin{cases} (x, u) \mid x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, u \in \mathbb{C}, \lambda x = Ax + Bu, \text{ при } |\lambda| < \infty, \\ (0, u) \mid u \in \mathbb{C}^1 \setminus \{0\}, \text{ при } |\lambda| = \infty. \end{cases}$$

В случае, когда $i\omega$ не является собственным числом A , условие (13) может быть записано в терминах частотной характеристики:

$$(14) \quad \begin{pmatrix} (i\omega I - A)^{-1} B \\ 1 \end{pmatrix}^* S \begin{pmatrix} (i\omega I - A)^{-1} B \\ 1 \end{pmatrix} < 0.$$

Выражая частотную характеристику

$$(i\omega I - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ k_q & i\omega + k_d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-\omega^2 + i\omega k_d} \begin{pmatrix} i\omega + k_d \\ -k_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\omega} \\ \frac{k_q(\omega + ik_d)}{\omega(\omega^2 + k_d^2)} \end{pmatrix},$$

и подставляя её в (14), получаем условие

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{\omega} & \frac{k_q(\omega - ik_d)}{\omega(\omega^2 + k_d^2)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{2} & 0 \\ \frac{\nu}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{\omega} \\ \frac{k_q(\omega + ik_d)}{\omega(\omega^2 + k_d^2)} \\ 1 \end{pmatrix} = \\ = \frac{k_q^2 - \nu k_q k_d}{\omega^2(\omega^2 + k_d^2)} - 4 < 0,$$

для выполнения которого достаточно положить

$$(15) \quad \nu > \frac{k_q}{k_d} > 0.$$

Если же $i\omega$ — собственное число A , то условие (13) надо проверить для всех векторов вида $(x_\omega + x_s, u)$ таких, что $x_\omega \in \ker(i\omega I - A)$, $x_s \perp \ker(i\omega I - A)$, $Ax_s - i\omega x_s + Bu = 0$. В нашем случае $\omega = 0$, и для него $x_\omega = (k_d \ -k_q)^T$. Более того, $x_s = (0 \ 1)^T \perp B$, а значит $(x_s, u) = (0, 0)$. Тогда частотное условие сводится к неравенству

$$(k_d \ -k_q) \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{2} \\ \frac{\nu}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_d \\ -k_q \end{pmatrix} < 0,$$

которое в свою очередь равносильно (15). Таким образом, доказано существование матрицы H и числа ν таких, что производная V в силу системы отрицательно определена.

Осталось показать, что функция V ограничена снизу. Из отрицательной определенности матрицы G и равенства (10), выбирая $q_w = 1$, получаем:

$$\begin{aligned} -2k_q h_{12} &= g_{11} < 0 \\ -2k_d h_{22} + h_{12} &= g_{22} < 0, \end{aligned}$$

откуда сразу следует положительность коэффициента h_{22} . Заметим, что требовать положительности от h_{11} необязательно, так как $\|q_v\| \leq 1$. Таким образом, для любых достаточно больших $\|\omega\|$ функция V будет положительна. Более того, очевидно, что V радиально неограниченна, то есть $V \rightarrow +\infty$ при $\|\omega\| \rightarrow +\infty$

Итак, мы нашли ограниченную снизу функцию V , производная которой в силу системы отрицательно определена всюду, кроме двух точек равновесия, L_1 и L_2 , при этом $V(L_1) < V(L_2)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

3. Система адаптации

В реальной машине, к сожалению, из-за небольших погрешностей в изготовлении винтов или двигателей, а также из-за возможных повреждений, коэффициенты K для каждого винта будут немного отличаться. И эта разница оказывает существенное влияние, в первую очередь, на угловую стабилизацию, так как робота начинает кренить в одну из сторон, и не выполняется условие на кватернионы $q \rightarrow q_d$. Далее рассматривается случай, когда у каждого двигателя есть свой коэффициент тяги K_i , а также своя оценка этого коэффициента, $\hat{K}_i$. Рассмотрим замкнутую систему, которая получится в таком случае.

Уравнения модели можно записать так:

$$(16) \quad \begin{pmatrix} I\dot{\omega} + \omega \times I\omega \\ \frac{\ddot{H} + g}{k_{mod}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & LK_2 & 0 & -LK_4 \\ -LK_1 & 0 & LK_3 & 0 \\ \xi K_1 & -\xi K_2 & \xi K_3 & -\xi K_4 \\ \frac{K_1}{m} & \frac{K_2}{m} & \frac{K_3}{m} & \frac{K_4}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix},$$

а уравнения регулятора (6) — так:

$$(17) \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2\hat{K}_1 L} & \frac{1}{4\hat{K}_1 \xi} & \frac{m}{4\hat{K}_1} \\ \frac{1}{2\hat{K}_2 L} & 0 & -\frac{1}{4\hat{K}_2 \xi} & \frac{m}{4\hat{K}_2} \\ 0 & \frac{1}{2\hat{K}_3 L} & \frac{1}{4\hat{K}_3 \xi} & \frac{m}{4\hat{K}_3} \\ -\frac{1}{2\hat{K}_4 L} & 0 & -\frac{1}{4\hat{K}_4 \xi} & \frac{m}{4\hat{K}_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{dx} \\ M_{dy} \\ M_{dz} \\ \frac{\Upsilon_d + g}{k_{mod}} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\frac{1}{\hat{K}_i}$ через Ψ_i . Подставив (17) в (16) и выразив M_d

по алгоритму 1, получим

$$(18) \quad \begin{pmatrix} I\dot{\omega} + \omega \times I\omega \\ \frac{\ddot{H} + g}{k_{mod}} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -Ik_d\omega - Ik_q q_v + \omega \times I\omega \\ \frac{\Upsilon_d + g}{k_{mod}} \end{pmatrix},$$

где коэффициенты матрицы B имеют такие выражения:

$$B[1:2, \bullet] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(K_2\Psi_2 + K_4\Psi_4) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(K_1\Psi_1 + K_3\Psi_3) \\ -\frac{\xi}{2L}(K_2\Psi_2 - K_4\Psi_4) & -\frac{\xi}{2L}(K_1\Psi_1 - K_3\Psi_3) \\ \frac{1}{2Lm}(K_2\Psi_2 - K_4\Psi_4) & -\frac{1}{2Lm}(K_1\Psi_1 - K_3\Psi_3) \end{pmatrix},$$

$$B[3, \bullet] = \begin{pmatrix} -\frac{L}{4\xi}(K_2\Psi_2 - K_4\Psi_4) \\ -\frac{L}{4\xi}(K_1\Psi_1 - K_3\Psi_3) \\ \frac{1}{4}(K_1\Psi_1 + K_2\Psi_2 + K_3\Psi_3 + K_4\Psi_4) \\ \frac{1}{4\xi m}(K_1\Psi_1 - K_2\Psi_2 + K_3\Psi_3 - K_4\Psi_4) \end{pmatrix},$$

$$B[4, \bullet] = \begin{pmatrix} \frac{Lm}{4}(K_2\Psi_2 - K_4\Psi_4) \\ -\frac{Lm}{4}(K_1\Psi_1 - K_3\Psi_3) \\ \frac{\xi m}{4}(K_1\Psi_1 - K_2\Psi_2 + K_3\Psi_3 - K_4\Psi_4) \\ \frac{1}{4}(K_1\Psi_1 + K_2\Psi_2 + K_3\Psi_3 + K_4\Psi_4) \end{pmatrix}.$$

Как можно было ожидать, в случае точного совпадения оценок коэффициентов с их реальными значениями, то есть в случае $K_i\Psi_i \equiv 1$, матрица B совпадает с единичной.

В (18) перейдем к линейной системе:

$$(19) \quad \begin{pmatrix} I_x\dot{\omega}_x \\ I_y\dot{\omega}_y \\ I_z\dot{\omega}_z \\ \ddot{H} + g \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -I_x k_d \omega_x - I_x k_q q_x \\ -I_y k_d \omega_y - I_y k_q q_y \\ -I_z k_d \omega_z - I_z k_q q_z \\ A_p(H_d - H) - A_d \dot{H} + g \end{pmatrix}.$$

Теперь введем новые обозначения, чтобы перейти к полностью матричной записи задачи. Определим новый вектор состояния $X = (X_1^T, X_2^T)^T$, где

$$X_1 = (2I_x q_x, 2I_y q_y, 2I_z q_z, H - H_d)^T, \quad X_2 = (I_x \omega_x, I_y \omega_y, I_z \omega_z, \dot{H})^T,$$

и обозначим через вектор $\tilde{g}$ общее воздействие гравитации на систему:

$$\tilde{g} = (0, 0, 0, g)^T.$$

Тогда система (19) может быть переписана как

$$(20) \quad \begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= B(-T_1 X_1 - T_2 X_2 + \tilde{g}) - \tilde{g}, \end{aligned}$$

где матрицы T_1 и T_2 — матрицы коэффициентов регуляторов:

$$T_1 = \text{diag}\left(\frac{k_q}{2}, \frac{k_q}{2}, \frac{k_q}{2}, A_p\right), \quad T_2 = \text{diag}(k_d, k_d, k_d, A_d).$$

Фактически, они диагональны, но ниже предполагается лишь их симметричность, положительная определенность и, ради удобства вычислений, перестановочность между собой.

Теперь для оценки Ψ_i мы можем применить метод скоростного градиента в дифференциальной форме (см. [4]). Данный метод позволяет синтезировать управление, обеспечивающее стремление заданной целевой функции к нулю. Для этого функция лишь должна удовлетворять четырем условиям — условию роста, регулярности, выпуклости производной в силу системы и достижимости цели.

В качестве целевой функции для метода скоростного градиента рассмотрим функцию

$$(21) \quad \begin{aligned} Q(X) &= \|T_1 X_1 + T_2 X_2\|^2 + X_1^T T_1^2 X_1 = \\ &= \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2T_1^2 & T_1 T_2 \\ T_1 T_2 & T_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Благодаря положительной определенности матриц T_1 и T_2 , $Q(X)$ также является положительно определенной квадратичной формой, а значит, её стремление к нулю гарантирует стремление к нулю X , кроме того, очевидно выполнены условия роста и регулярности.

Возьмем производную в силу системы от функции $Q(X)$:

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{Q}(X, B) &= \\ &= 2 \left(X_2^T - X_1^T T_1 B^T - X_2^T T_2 B^T + g^T (B^T - I) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 2T_1^2 & T_1 T_2 \\ T_1 T_2 & T_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Условие выпуклости функции $\dot{Q}$ выполнено, так как она линейна по матрице B , которая в свою очередь линейна по оценкам Ψ_i .

Введем вспомогательную функцию $Z(X, J)$, которая будет описывать производную функции $\dot{Q}$ при $J = \frac{\partial B}{\partial \Psi_i}$, взятую с обратным знаком:

$$Z(X, J) = \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T & \tilde{g}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2T_1T_2JT_1 & T_1T_2JT_2 + T_1J^TT_2^2 & -J^TT_1T_2 \\ T_2J^TT_1T_2 + T_2^2JT_1 & 2T_2^2JT_2 & -J^TT_2^2 \\ -T_1T_2J & -T_2^2J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \tilde{g} \end{pmatrix}$$

Теорема 2. Пусть $T_2^2 > T_1$. Тогда алгоритм

$$(23) \quad \dot{\hat{K}}_i = -\gamma \hat{K}_i^2 Z \left(X, \frac{\partial B}{\partial \Psi_i} \right).$$

обеспечивает устойчивость линеаризованной системы и стремление $\hat{K}_i \rightarrow K_i$.

Доказательство. Мы уже показали, что для функции $Q(X)$ выполнены условия регулярности, роста и выпуклости метода скоростного градиента. Осталось проверить последнее условие — условие достижимости цели. Для этого подставим в функцию (22) $B \equiv I$, соответствующее идеально найденным оценкам Ψ_i . Получим

$$\begin{aligned} \dot{Q}_I(X) &= - \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2T_1^2T_2 & 2T_1T_2^2 - 2T_1^2 \\ 2T_1T_2^2 - 2T_1^2 & 2T_2^3 - 2T_1T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \\ &= -X^TRX \end{aligned}$$

Достаточно показать, что матрица этой квадратичной формы R положительно определена. Попробуем найти неособое преобразование координат, превращающее эту матрицу в блочно-диагональную. Одним из таких преобразований может быть

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} 2T_1^2T_2 & 2T_1T_2^2 - 2T_1^2 \\ 2T_1T_2^2 - 2T_1^2 & 2T_2^3 - 2T_1T_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} T_1 & T_1T_2^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2T_1T_2^{-1} & 0 \\ 0 & 2T_2^3 - 2T_1T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_1T_2^{-1} & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

откуда следует критерий положительной определенности матрицы R :

$$\begin{aligned} T_1 T_2^{-1} &> 0, \\ T_2^3 - T_1 T_2 &> 0, \end{aligned}$$

который, учитывая положительность матриц T_1 и T_2 , преобразуется в условие

$$(24) \quad T_2^2 > T_1.$$

Итак, если для матриц коэффициентов выполнено условие (24), то адаптация коэффициентов Ψ_i по методу скоростного градиента приведет к пределу $Q(X, B) \rightarrow 0$ и, следовательно, $X \rightarrow 0$, что доказывает утверждение об устойчивости линеаризованной системы. Означает ли это, что оценки Ψ_i сойдутся к своим истинным значениям $\frac{1}{K_i}$? Для доказательства этого факта рассмотрим систему (20). Так как точка $X = 0$ является устойчивой точкой равновесия для этой системы, должно быть выполнено равенство

$$\tilde{g} = B\tilde{g},$$

которое означает, что матрица B имеет собственный вектор $(0, 0, 0, 1)^T$ с собственным числом 1. Раскрыв это равенство как систему уравнений, получим

$$\begin{aligned} K_2 \Psi_2 - K_4 \Psi_4 &= 0, \\ K_1 \Psi_1 - K_3 \Psi_3 &= 0, \\ K_1 \Psi_1 - K_2 \Psi_2 + K_3 \Psi_3 - K_4 \Psi_4 &= 0, \\ K_1 \Psi_1 + K_2 \Psi_2 + K_3 \Psi_3 + K_4 \Psi_4 &= 4, \end{aligned}$$

откуда немедленно следует набор равенств $K_i \Psi_i = 1$ и, соответственно, $\Psi_i = \frac{1}{K_i}$ для всех $i \in \{1..4\}$.

Адаптация по методу скоростного градиента может быть записана так:

$$\dot{\Psi}_i = -\frac{\dot{\hat{K}}_i}{\hat{K}_i^2} = \gamma Z \left(X, \frac{\partial B}{\partial \Psi_i} \right),$$

Неизвестные, но постоянные значения настоящих коэффициентов тяги K_i входят в соответствующую частную производную

$\frac{\partial B}{\partial \Psi_i}$ линейно, и потому могут быть вынесены из функции Z в множитель γ . Выразив отсюда $\dot{K}_i$, получаем (23).

Для полноты алгоритма приведем конкретные значения используемых производных $\frac{\partial B}{\partial \Psi_i}$, считая при этом коэффициенты K_i убранными в множитель γ .

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \Psi_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L}{4\xi} & -\frac{Lm}{4} \\ 0 & -\frac{\xi}{2L} & \frac{1}{4} & \frac{\xi m}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2Lm} & \frac{1}{4\xi m} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial B}{\partial \Psi_2} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{4\xi} & \frac{Lm}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\xi}{2L} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\xi m}{4} \\ \frac{1}{2Lm} & 0 & -\frac{1}{4\xi m} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial B}{\partial \Psi_3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{4\xi} & \frac{Lm}{4} \\ 0 & \frac{\xi}{2L} & \frac{1}{4} & \frac{\xi m}{4} \\ 0 & \frac{1}{2Lm} & \frac{1}{4\xi m} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial B}{\partial \Psi_4} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{4\xi} & -\frac{Lm}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\xi}{2L} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\xi m}{4} \\ -\frac{1}{2Lm} & 0 & -\frac{1}{4\xi m} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Моделирование

Моделирование алгоритма, представленного в прошлом параграфе, было проведено в системе MATLAB R2016a. Для этого была реализована модель квадрокоптера, система управления и система адаптации. Физические параметры были взяты от одного из реальных изготовленных роботов, и они перечислены в таблице 1.

Здесь же указаны примененные коэффициенты регуляторов, которые удовлетворяют условию (24), и истинные коэффициенты тяги, являющиеся физическими, но неизвестными нам пара-

Таблица 1. Значения параметров при моделировании

Физические параметры	Параметры регуляторов	Коэффициенты тяги
$m = 1.3 \text{ kg}$	$k_p = 2.6$	$K_1 = 12.6 \text{ Н}$
$L = 0.22 \text{ m}$	$k_d = 10.0$	$K_2 = 18.6 \text{ Н}$
$\xi = 0.017 \text{ m}$	$A_p = 2.0$	$K_3 = 4.6 \text{ Н}$
$I_x = 0.12 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$A_d = 5.0$	$K_4 = 7.0 \text{ Н}$
$I_y = 0.12 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$H_d = 3 \text{ m}$	
$I_z = 0.22 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$		
$g = 9.8 \text{ m/sec}^2$		

метрами квадрокоптера. В начальном положении робот считается покоящимся на горизонтальной поверхности, его координата по высоте принята за 0.

Для проверки алгоритма было проведено 3 эксперимента, в первом из них адаптации не было ($\gamma = 0$), во втором $\gamma = 0.0005$, в третьем $\gamma = 0.005$. Начальные оценки коэффициентов $\hat{K}_i$ равны 8.6 Н, время симуляции — 10 секунд.

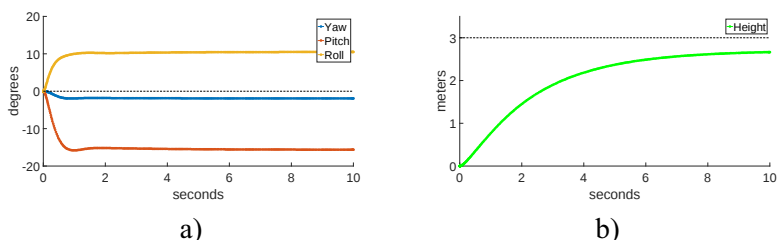


Рис. 2. Отсутствие адаптации, $\gamma = 0$. а) Ориентация, углы Эйлера. б) Высота H .

В первом случае (Рис. 2), в отсутствие адаптации, робот входит в устойчивое движение, но не достигает цели управления, в частности, у него есть наклон по крену и тангажу, что в реальной системе привело бы к появлению ускорения в плоскости XU .

В случае медленной адаптации (Рис. 3) состояние робота асимптотически достигает своих целевых значений, как и коэф-

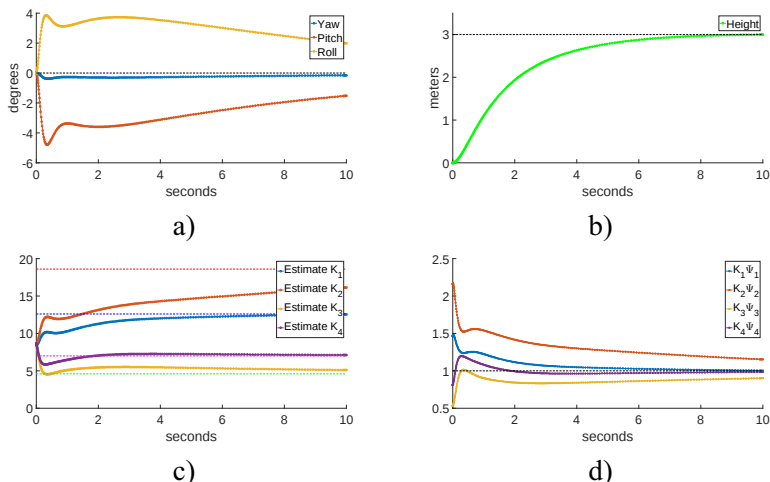


Рис. 3. Медленная адаптация, $\gamma = 0.0005$. а) Ориентация, углы Эйлера. б) Высота H . в) Оценки коэффициентов $\hat{K}_i$. д) Величины $K_i\Psi_i$.

фициенты тяги. Также можно заметить, что при отсутствии адаптации, ошибка по крену и тангажу составила 10-15 градусов, тогда как при её наличии она не превысила 5, а через 10 секунд составляла уже 2 градуса. Ошибки такого порядка уже могут быть приемлемы в реальной системе.

При быстрой адаптации (Рис. 4) коэффициенты сходятся к своим истинным значениям гораздо быстрее, а ошибка по крену и тангажу не превышает 1 градус. Однако можно заметить, что в начальный период коэффициенты, а вместе с ними и ориентация испытывают сильные колебания. Дальнейшее увеличение коэффициента γ приводит к тому, что вычисления становятся неустойчивыми.

5. Заключение

В данной работе был описан основанный на кватернионах параметрический регулятор для стабилизации квадрокоптера, а

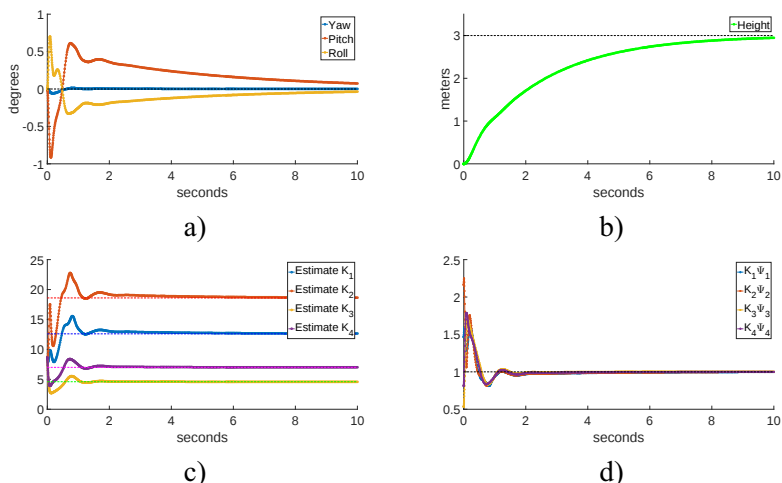


Рис. 4. Быстрая адаптация, $\gamma = 0.005$. а) Ориентация, углы Эйлера. б) Высота H . в) Оценки коэффициентов $\hat{K}_i$. д) Величины $K_i\Psi_i$.

также система идентификации коэффициентов тяги на каждом винте. Также было проведено численное моделирование, подтверждающее работоспособность предложенных алгоритмов.

Литература

1. БЕЛЯВСКИЙ А.О., ТОМАШЕВИЧ С.И. Синтез адаптивной системы управления квадрокоптером методом пассивации // Управление большими системами. – 2016. – Вып. 63. – С. 155-181.
2. ЛАНДАУ Л.Д., ЛИФШИЦ Е.М. Теоретическая физика, том 1. Механика. 5-е издание. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 224 с.
3. МАТВЕЕВ В.В., РАСПОПОВ В.Я. Основы построения беспилотных инерциальных навигационных систем. – ЦНИИ "Электронприбор", 2009. – 278 с.
4. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динами-

- ческими системами. – СПб.: Наука, 2000. – 549 с.
5. AUGUGLIARO F., SCHOELLIG A.P., D'ANDREA R. *Generation of collision-free trajectories for a quadrocopter fleet: A sequential convex programming approach* // Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012 IEEE/RSJ International Conference on. IEEE – 2012.
 6. FRESK E., NIKOLAKOPOULOS G. *Full Quaternion Based Attitude Control for a Quadrotor* // 2013 European Control Conference (ECC) – July 17-19, 2013, Zurich, Switzerland.
 7. HEHN M., D'ANDREA R. *A frequency domain iterative learning algorithm for high-performance, periodic quadrocopter maneuvers* // Mechatronics – 2014. – Vol. 24, Issue 8. – P. 954-965.
 8. HEHN M., D'ANDREA R. *Quadrocopter trajectory generation and control* // IFAC world congress – 2011. – Vol. 18, Issue 1.
 9. KHATOON S., SHAHID M., CHAUDHARY H. *Dynamic modeling and stabilization of quadrotor using PID controller* // Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI), 2014 International Conference on. IEEE – 2014.
 10. LEFFERTS E.J., MARKLEY F.L., SHUSTER M.D. *Kalman filtering for spacecraft attitude estimation* // Journal of Guidance, Control, and Dynamics – 1982. – Vol. 5, Issue 5. – P. 417-429.
 11. LEISHMAN J.G. *Principles of Helicopter Aerodynamics, Second Edition.* – Cambridge Aerospace Series. 2006.
 12. LIM H., PARK J., LEE D., KIM H.J. *Build your own quadrotor. Open-Source Projects on Unmanned Aerial Vehicles* // IEEE Robotics and Automation Magazine – September 2012.
 13. MADGWICK S.O.H. *An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays* // Internal Report – 2010.
 14. MAHONY R., HAMEL T., PFLIMLIN J.M. *Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group* // IEEE Transactions on Automatic Control – Vol. 53, Issue 5. – 2008.

- P. 1203-1218.
15. MAHONY R., KUMAR V., CORKE P. *Multirotor aerial vehicles. Modelling, Estimation, and Control of Quadrotor* – IEEE Robotics and Automation Magazine – September 2012.
 16. PEREZ I.C., FLORES-ARAIZA D., FORTOUL-DIAZ J.A., MAXIMO R., GONZALEZ-HERNANDEZ H.G. *Identification and PID control for a quadcopter* // Electronics, Communications and Computers (CONIELECOMP), 2014 International Conference on. IEEE – 2014.
 17. POUNDS P., MAHONY R., CORKE P. *Modelling and Control of a Quad-Rotor Robot* // Proceedings Australasian Conference on Robotics and Automation 2006. Australian Robotics and Automation Association Inc. – 2006.
 18. RITZ R., MULLER M.W., HEHN M., D'ANDREA R. *Cooperative quadcopter ball throwing and catching* // Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012 IEEE/RSJ International Conference on. IEEE – 2012.
 19. SCHOELLIG A.P., WILTSCHKE C., D'ANDREA R. *Feed-forward parameter identification for precise periodic quadcopter motions* // IEEE American Control Conference – 2012.
 20. SHEN S., MULGAONKAR Y., MICHAEL N., KUMAR V. *Vision-Based State Estimation and Trajectory Control Towards High-Speed Flight with a Quadrotor* // Robotics: Science and Systems – 2013. – Vol. 1.
 21. STEGAGNO P., BASILE M., BULTHOFF H.H., FRANCHI A. *Vision-based Autonomous Control of a Quadrotor UAV using an Onboard RGB-D Camera and its Application to Haptic Teleoperation* // 2nd IFAC Work. on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems, Compiegne, France. – 2013.
 22. TEREKHOV A.N., LUCHIN R.M., FILIPPOV S.A. *Educational Cybernetical Construction Set for schools and universities* // Proceedings of the 9th IFAC Symposium

- Advances in Control Education. The International Federation of Automatic Control – June 19-21, 2012, Nizhny Novgorod, Russia.
23. TOURNIER G.P., VALENTI M., HOW J.P. *Estimation and control of a quadrotor vehicle using monocular vision and moire patterns* // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit – 2006.
 24. ZHU J., LIU E., GUO S., XU C. *A gradient optimization based PID tuning approach on quadrotor* // Control and Decision Conference (CCDC), 2015 27th Chinese. IEEE – 2015.

ADAPTIVE QUATERNION-BASED QUADROTOR CONTROL SYSTEM

Denis Nikitin, Saint-Petersbutrg State University, master (dniken@gmail.com).

Abstract: In the paper we propose the quaternion-based control system for quadrotor. Adaptive scheme for thrust coefficients identification, based on speed-gradient method, is designed. Stability of the whole system is studied and simulation results are presented.

Keywords: UAV, quadrotor, adaptive control, speed-gradient method, quaternions.