УДК 336.6
ББК 65.05
Р 69

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНЦЕПЦИИ «ЗАТРАТЫ-ВЫПУСК» ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ГРУППОЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ

**Б.А. Романов**

**Аннотация**

В статье на основе концепции «затраты-выпуск» В. Леонтьева разработана интегрированная модель взаимодействия группы предприятий, совместно производящих промышленную продукцию в которую синтезирована модель отдельного предприятия (любого) из этой группы. Интегрированная модель позволяет наряду с анализом структуры и взаимодействия предприятий группы, выполнять анализ внутренней структуры и взаимодействия цехов и подразделений отдельного предприятия, а также взаимосвязь этих цехов и подразделений с остальными предприятиями группы взаимодействующих предприятий.

**Ключевые слова**: Промышленное производство, модель «затраты-выпуск», взаимосвязь предприятий, цехов, подразделений, структура промышленного производства.

## Введение

Модель «затраты-выпуск» В. Леонтьева [1] представляет собой развитие системы уравнений баланса затрат и распределения продукции экономики государства, разделенной на ряд отраслей [2]. Одним из первых балансов экономики государства был разработанный в СССР баланс народного хозяйства за 1923/1924 г.

Как указано в [3], В. Леонтьев соединил баланс межотраслевых пропорций народного хозяйства с математической моделью, характеризующей взаимосвязи между затратами на производство и выпуском продукции различных отраслей.

Модель «затраты-выпуск» может использоваться не только для описания экономики государства в целом, но и в качестве модели производственного плана на отдельном предприятии, что и было выполнено уже в 1961 г. в [4] на примере составления производственного плана (техпромфинплана) завода по производству синтетического каучука.

Из современных исследований, посвященных использованию модели межотраслевого баланса применительно к отдельному предприятию можно указать работу [5]. Однако по содержанию эта работа мало чем отличается от работы [4], опубликованной еще в 1961 г. В других современных исследованиях по использованию модели «затраты-выпуск» анализируются различные аспекты оценки функционирования отдельных предприятий и промышленных комплексов.

Так работе [6] для формирования показателя общественной стоимости промышленного производства вводится понятие матрицы влияния (воздействия) предприятия $i$ на функционирование предприятия $j$. Эта матрица определяется как произведение матрицы коэффициентов прямых затрат на величину $H_i$, которая в свою очередь определяется как индекс монополизации рынка производителями товара $i$. В качестве индекса монополизации рынка используется индекс Херфиндаля-Хиршмана, определяемый как сумма квадратов долей рынка, занимаемых производителями товара $i$. Вводимая матрица очевидно имеет весьма малое отношение к модели межотраслевого баланса (модели «затраты-выпуск» в западной терминологии), в полном понимании этой модели, если не считать таким отношением использование матрицы коэффициентов прямых затрат для формирования достаточно субъективного показателя общественной стоимости промышленного производства.

В работе [7] в простейшую двухпродуктовую модель «затраты-выпуск» включены параметры, характеризующие субъективную ценность производимой продукции. Предлагаемая модифицированная модель «затраты-выпуск», по мнению ее автора, является дискуссионной, с чем нельзя не согласиться, поскольку вводимые параметры достаточно сложно определять практически. В статье [8] исследуется задача оптимизации функционирования многоотраслевого промышленного комплекса в условиях неплатежей предприятий на основе динамической модели межотраслевого баланса. Отдельная отрасль интерпретируется как отдельное предприятие, выпускающее один вид продукции. Последнее обстоятельство существенно ограничивает возможности использования этой модели в практическом применении для управления промышленным комплексом.

В книге [9] формулируется модель фирмы на основе концепции «затраты-выпуск» В. Леонтьева. В этой работе модель сформулирована в однопродуктовом представлении, что не позволяет раскрыть всю мощь концепции «затраты-выпуск». В отличие от [4-9] в данной статье разработана интегрированная модель «затраты-выпуск», содержащая синтез модели «затраты-выпуск» отдельного предприятия (любого) из группы взаимодействующих предприятий с моделью «затраты-выпуск» всей группы взаимосвязанных приятий. Предлагаемая интегрированная модель позволяет анализировать внутреннюю структуру отдельного предприятия и ее взаимосвязь со структурой взаимосвязи группы взаимодействующих предприятий.

## 1. Модель группы взаимодействующих предприятий

Модель «затраты-выпуск» для описания взаимодействия группы предприятий в многопродуктовом представлении можно записать в виде системы уравнений:

$$x_i = \sum_{j=1}^{M_N} a_{ij} x_j + y_i , \; i = 1,..., M_N , \qquad (1)$$

где $x_i$ – валовой выпуск продукции предприятия $i$;

$a_{ij}$ – коэффициент прямых внешних затрат на предприятии $j$ продукции, работ или услуг предприятия $i$;

$y_i$ – выпуск конечной продукции на предприятии $i$;

$M_N$ - количество предприятий.

Модель «затраты-выпуск» (1) записана в стоимостном выражении, как и ниже сформулированная модель «затраты-выпуск» отдельного предприятия. Недостаток модели (1), которая является полной аналогией модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева для экономики государства, для целей моделирования взаимодействия производственных предприятий, заключается в том, что в этой модели предполагается, что каждая отрасль выпускает только один продукт. Отрасль соответствует в модели (1) одному предприятию. Обобщение модели В. Леонтьева на случай многопродуктового представления можно выполнить, если предприятие, выпускающее несколько видов продукции, разделить на нескольких «условных» предприятий, каждое из которых выпускает только один вид продукции. Будем предполагать, что такое обобщение для группы взаимодействующих предприятий выполнено.

Управление группой предприятий включает составление производственных планов по выпуску продукции. Допустим, что в составе группы взаимодействующих предприятий имеются две группы. Первая группа в основном выпускает продукцию для конечного потребления, а вторая группа в основном выпускает промежуточную продукцию, которая поступает на предприятия первой группы, обеспечивая таким образом выпуск конечной продукции этой группы. Такой состав взаимодействующих предприятий можно наблюдать, например, в авиастроении. В первую группу входят сборочные предприятия, а во вторую группу предприятия, поставляющие на предприятия первой группы материалы, детали, комплектующие изделия и пр.

Для рассматриваемой группы взаимодействующих предприятий производственные планы сначала устанавливаются для предприятий, выпускающих конечную продукцию. Исходя из планов предприятий, выпускающих конечную продукцию, составляются производственные планы предприятий, выпускающих промежуточную продукцию для обеспечения выпуска этой конечной продукции.

## 2. Модель отдельного предприятия

Рассмотрим одно из предприятий с индексом $i$, $i=1,...,M_N$. Допустим, что производство на предприятии с индексом $i$ осуществляется как взаимодействие $k$ цехов (площадок, производственных линий и т.д.), $k=1,...,M_K^j$, количество которых обозначим $M_K^i$. В цеха этого предприятия кроме продукции других цехов этого же предприятия, также поступает промежуточная продукция от других предприятий множества $M_N$. Вектор-столбец $a_{ij}x_j$, $i,j=1,...,M_N$, представляет собой промежуточную продукцию, передаваемую предприятием $i$ предприятию $j$.

Допустим, что эта промежуточная продукция распределяется по цехам $k$ предприятия $j$ пропорционально валовому выпуску в долях, определяемых матрицей элементов $\gamma_{jk}$, $\sum_{k=1}^{M_K^i}\gamma_{jk}=1$, $j=1,...,M_N$. Тогда в цехе $k$ производится промежуточная продукция для предприятия $j$ в объеме $\sum_{i=1}^{M_K^i}\gamma_{jk}a_{ij}x_j$.

Тогда систему уравнений затрат и выпуска продукции отдельного предприятия $j$ из множества $M_N$ можно записать в виде:

$$z_k=\sum_{l=1}^{M_K^j}\beta_{kl}z_l+\sum_{i=1}^{M_N}\gamma_{jk}a_{ij}x_j+w_{jk},\ k=1,...,M_K^j, \qquad (2)$$

где $z_k$ – валовой выпуск продукции цеха $k$;

$\beta_{kl}$ – коэффициент внутренних затрат в цехе $k$ продукции, работ или услуг цеха $l$;

$\gamma_{jk}$ – доля передаваемой промежуточной продукции от предприятия $i$ из цеха $k$ предприятию $j$;

$w_{jk}$ – выпуск конечной продукции (выполнение работ, оказание услуг) в цехе $k$ предприятия $j$ как цели его производственной программы;

$M_K^j$ – количество цехов на предприятии $j$.

Уравнение (2) «затраты-выпуск» для отдельного предприятия в отличие от уравнения (1) описывает выпуск предприятием нескольких продуктов, на что указывает вектор выпуска конечной продукции $w_{jk}$, $k = 1,\ldots,M_K^j$, в правой части этого уравнения, индекс $k$ которого определяет выпуск конечной продукции цехом $k$. Таким образом предприятие может выпускать несколько видов продукции, каждый из которых выпускается отдельным цехом.

Правая часть уравнения (2) включает в отличие от уравнения (1) «затраты-выпуск» группы предприятий три слагаемых. Первые два слагаемых это предаваемая промежуточная продукция, а третье слагаемое – конечная продукция.

Первое слагаемое $\sum_{l=1}^{M_K^j} \beta_{kl} z_l$ это промежуточная продукция, передаваемая в другие цеха данного предприятия.

Второе слагаемое $\sum_{i=1}^{M_N} \gamma_{jk} a_{ij} x_j$ это промежуточная продукция, передаваемая другим предприятиям. В уравнении (1) в правой части первое слагаемое определяет промежуточную продукцию, передаваемую другим предприятиям, а второе слагаемое выпускаемую конечную продукцию.

Модель (2) отдельного предприятия из множества предприятий, описываемого моделью (1) связана посредством второго слагаемого $\sum_{i=1}^{M_N} \gamma_{jk} a_{ij} x_j$ потребления промежуточной продукции в системе уравнений (2).

Кроме того, эти модели связаны по выпускаемой конечной продукции: величины конечного выпуска продукции предприятий $y_i$ и конечного выпуска цехов отдельного предприятия $w_{ik}$ соотношением:

$$y_i = \sum_{k=1}^{M_K^i} w_{ik} .$$

Совместная система уравнений (1) и (2) является обобщением основной системы уравнений (1) для группы взаимодействующих предприятий с учетом детализации производственной деятельности одного из предприятий (любого).

## 3. Расчет производственной программы. Решение прямой задачи

Расчет производственной программы группы рассматриваемых взаимодействующих предприятий начинается с задания вектора производства конечной продукции, который обозначим $\hat{y}_i$. Далее рассчитываются требуемые объемы валового выпуска предприятий.

Эти объемы, обозначаемые $\hat{x}_i$, определяются решением системы уравнений (1) относительно заданного вектора $\hat{y}_i$:

$$\hat{x}_i = \sum_{j=1}^{M_N} b_{ij}\hat{y}_j, \qquad (3)$$

где $b_{ij}$ – элементы матрицы, обратной к матрице $(\delta_{ij} - \alpha_{ij})$, $i$, $j$ =1,…, $M_N$;

$\delta_{ij}$ – символ Кронекера ($\delta_{ij}$=1 при $i = j$, $\delta_{ij}$=0 при $i \neq j$).

Для системы уравнений (1) принято допущение, что матрица $(\delta_{ij} - \alpha_{ij})$ продуктивная, т.е. обратная матица существует и доставляет решение системы уравнений (1) такое, что $\hat{x}_i \geq 0$.

Для расчета производственной программы по цехам предприятия – величины $z_k$ $k = 1,..., M_K^i$, полагаем, что в системе уравнений (2) вектор $w_{ik}$ задан и обозначим его $\hat{w}_{ik}$. Подставив в систему уравнений (2) вектор $\hat{w}_{ik}$, а также выражение (3) для вектора $\hat{x}_i$, получим:

$$z_k = \sum_{l=1}^{M_K^i} \beta_{kl} z_l + \sum_{i=1}^{M_N} \gamma_{ik} a_{ij} \sum_{j=1}^{M_N} b_{ij}\hat{y}_j + \hat{w}_{ik},\ k = 1,..., M_K^i. \qquad (4)$$

Обозначим $v_{ik}$ сумму второго и третьего слагаемых правой части системы уравнений (4):

$$v_{ik} = \sum_{i=1}^{M_N} \gamma_{ik} a_{ij} \sum_{j=1}^{M_N} b_{ij}\hat{y}_j + \hat{w}_{ik}$$

Решая систему уравнений (4) относительно $v_{ik}$, получаем искомое значение $z_k$, которое обозначим $\hat{z}_k$:

$$\hat{z}_k = \sum_{l=1}^{M_K} \lambda_{kl} v_l,$$

где $\lambda_{kl}$ – элементы матрицы, обратной к матрице $(\delta_{kl} - \beta_{kl})$, $k$, $l$ =1,…, $M_K^i$;

$\delta_{kl}$ – символ Кронекера ($\delta_{kl}$=1 при $k = l$, $\delta_{kl}$=0 при $k \neq l$).

Для системы уравнений (2) также принято допущение, что матрица $(\delta_{kl} - \beta_{kl})$ продуктивная, т.е. обратная матица существует и доставляет решение системы уравнений (2) такое, что $\hat{z}_i \geq 0$.

Решение прямой задачи можно использовать для решения задачи управления по развитию производственных мощностей предприятия и цехов.

## 4. Расчет производственной программы. Решение обратной задачи

Полученное выше решение представляет собой прямую задачу, когда для заданных векторов выпуска конечной продукции рассчитываются требуемые объемы валового производства продукции предприятий и цехов. В обратной задаче для исходных данных валовых выпусков продукции предприятий и цехов (заданных мощностей) требуется определить выпуск конечной продукции. Решение обратной задачи можно получить, решая системы уравнений (1) и (2) относительно заданных величин валовых выпусков продукции (заданных мощностей) предприятий и цехов $x_i$. $i = 1,\ldots,M_N$ и $z_k$, $k = 1,\ldots,M_K$. Вообще говоря это оптимизационная задача, поскольку заданные величины мощностей обычно будут не быть сбалансированы, т.е. не все производственные мощности будут загружены.

Если задать условие, что конечная продукция выпускается в заданных пропорциях, то решение можно получить в аналитическом виде. Допустим, что общий объем выпуска конечной продукции предприятий, обозначаемый $Y$, распределяется по предприятиям в пропорциях, определяемых вектором $\varepsilon_i$:

$$\varepsilon_i = \frac{y_i}{Y},\ i = 1,\ldots,M_N,\quad \text{где } Y = \sum_{i=1}^{M_N} y_i. \tag{5}$$

Введем коэффициенты $\varphi_{ik}$, которые представляют долю конечной продукции цеха $k$ в общем объеме выпуска конечной продукции $y_i$ предприятия $i$:

$$\varphi_{ik} = \frac{w_{ik}}{y_i},\ k = 1,\ldots,M_K^i,\ \text{где } y_i = \sum_{k=1}^{M_K^i} w_{ik}. \tag{6}$$

Из соотношений (5) и (6) получаем выражения для векторов $y_i$ и $w_k$: $y_i = \varepsilon_i Y$ и $w_{ik} = \varphi_{ik} y_i$, $i = 1,\ldots,M_N$, $k = 1,\ldots,M_K^i$.

Рассмотрим систему равенств (3). Они выполняются только как решение системы уравнений (1). Если в этих равенствах зафиксировать величину $\hat{x}_i$, а величину $\hat{y}_i$ сделать свободной, то равенства выполняться не будут. Они превратятся в неравенства вида $\hat{x}_i \geq \sum_{j=1}^{M_N} b_{ij} y_j$. Докажем, что неравенства вида $\hat{x}_i \leq \sum_{j=1}^{M_N} b_{ij} y_j$ не могут выполняться.

Выполним это доказательство от противного. Допустим, что эти неравенства выполняются. Обозначим вектор $y_j$, удовлетворяющий этим неравенствам $\hat{y}_j$. Поскольку вектор $\hat{y}_j$ может принимать любые значения, а вектор $\hat{x}_i > 0$, то можно подобрать столь малые его значения вектора $\hat{y}_j$, что неравенства $\hat{x}_i \le \sum_{j=1}^{M_N} b_{ij} y_j$ не будут выполняться. Поскольку получено противоречие, то остается принять, что выполняются неравенства $\hat{x}_i \ge \sum_{j=1}^{M_N} b_{ij} y_j$.

Подставив в эти неравенства величину $y_j = \varepsilon_j Y$, получаем систему неравенств:

$$\hat{x}_i \ge \sum_{j=1}^{M_N} b_{ij} \varepsilon_j Y \ge Y \sum_{j=1}^{M_N} b_{ij} \varepsilon_j .$$

Из этих неравенств получаем систему неравенств для неизвестной величины $Y$:

$$Y \le \frac{\hat{x}_i}{\sum_{j=1}^{M_N} b_{ij} \varepsilon_j}, \quad i = 1,\dots, M_N .$$

Величины в правой части этих равенств представляют собой компоненты вектора, которые обозначим $g_i$, $i = 1,\dots, M_N$.

Поскольку величина $Y$ должна быть меньше или равна любой компоненте вектора $g_i$, то получаем, что величина $Y$ равна:

$$Y = \min_i g_i .$$

Рассмотрим теперь систему уравнений (2). Решение этой системы уравнений относительно вектора $w_{ik}$ можно записать в виде:

$$z_k = \sum_{l=1}^{M_K^i} \lambda_{kl} \left( \sum_{i=1}^{M_N} \gamma_{il} a_{ij} x_j + w_{il} \right), \qquad k = 1,\dots, M_K^i \tag{7}$$

Подставив в (7) вместо $z_k$ и $x_j$ заданные значения $\hat{z}_k$ и $\hat{x}_j$, а вместо $w_{il}$ выражение $w_{il} = \varphi_{il} W_i$, рассуждая аналогично предыдущему выводу относительно величины $Y$, получаем систему неравенств:

$$\hat{z}_k \ge \sum_{l=1}^{M_K^i} \lambda_{kl} \left( \sum_{i=1}^{M_N} \gamma_{il} a_{ij} \hat{x}_j + \varphi_{il} y_i \right).$$

После преобразований этих неравенств, получаем систему неравенств для величины $y_i$:

$$y_i \le \frac{\hat{z}_k - \sum_{l=1}^{M_K^i} \lambda_{kl} \left( \sum_{i=1}^{M_N} \gamma_{il} a_{ij} \hat{x}_j \right)}{\sum_{l=1}^{M_K^i} \varphi_{il} \lambda_{kl}} .$$

Обозначив вектор в правой стороне этих неравенств $c_{ik}$ аналогично предыдущему выводу величины $Y$, получаем:

$$y_i = \min_k c_{ik} .$$

Решение обратной задачи, как и прямой, можно использовать для составления программ развития производственных мощностей отдельных предприятий и всего комплекса промышленного производства.

## 5. Числовые примеры

Приведем числовые примеры формирования производственных планов группы взаимодействующих предприятий и отдельного предприятия из этой группы. В качестве прообраза группы взаимодействующих предприятий будем рассматривать предприятия авиастроения. В общую группу входят 9 предприятий, первые три из которых представляют собой предприятия конечной сборки самолетов, а остальные предприятия обеспечивают предприятия конечной сборки материалами, деталями, комплектующими изделиями и пр. Все исходные данные условные, в то же время качественно параметры затрат приближенно могут соответствовать затратам на реальных предприятиях.

Матрица коэффициентов прямых затрат группы предприятий в виде $(\delta_{ij} - \alpha_{ij})$ представлена в табл. 1. В табл. 2 представлена обратная матрица к матрице $(\delta_{ij} - \alpha_{ij})$. Матрица коэффициентов прямых затрат отдельного предприятия, в качестве которого выбрано первое предприятие конечной сборки самолетов, представлена в табл. 3 На этом предприятии имеется 6 цехов, которые, начиная с первого цеха, поставляют в последующие цеха свою продукцию. Кроме того, цеха получают промежуточную продукцию от других предприятий. В табл. 4 представлена обратная матрица к матрице $(\delta_{kl} - \beta_{kl})$.

При решении прямой задачи:

а) Для группы предприятий задается выпуск конечной продукции предприятиями и вычисляются требуемый валовой выпуск продукции обеспечивающих предприятий (табл. 5).

б) Для первого предприятия задается выпуск конечной продукции цехов и вычисляется требуемый валовой выпуск продукции цехов (табл. 6).

При решении обратной задачи:

а) Для группы предприятий задаются:

- пропорции выпуска конечной продукции предприятий;
- мощности предприятий.

Вычисляются значения величин $g_i$, $i = 1,...,M_N$, минимальное значение которых определяет максимальный общий объем выпуска конечной продукции предприятий (табл. 7).

б) Для первого предприятия задаются:

- конечная продукция выпускается только цехом №6;
- мощности цехов.

Вычисляются значения величин $c_{ik}$, $k = 1,...,M_K^i$, минимальное значение которых определяет максимальный общий объем выпуска конечной продукции предприятий (табл. 7).

Для решения обратной задачи задаются объемы валового выпуска продукции предприятий (табл. 7) и валового выпуска продукции цехов отдельного (первого) предприятия (табл.8). Результаты решения прямой задачи приведены в табл. 9, а результаты решения обратной задачи в табл. 10.

Матрица коэффициентов $(\delta_{ij} - \alpha_{ij})$, $i, j = 1,...,M_N$. Таблица 1

| № Предпр. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | -0,02 | -0,03 | -0,01 | 1 | -0,05 | -0,07 | -0,08 | -0,06 | -0,04 |
| 5 | -0,05 | -0,06 | -0,04 | -0,05 | 1 | -0,02 | -0,07 | -0,04 | -0,02 |
| 6 | -0,02 | -0,02 | -0,01 | -0,03 | -0,04 | 1 | -0,08 | -0,08 | -0,05 |
| 7 | -0,03 | -0,06 | -0,02 | -0,05 | -0,03 | -0,04 | 1 | -0,03 | -0,07 |
| 8 | -0,01 | -0,05 | -0,04 | -0,08 | -0,07 | -0,02 | -0,06 | 1 | -0,03 |
| 9 | -0,01 | -0,05 | -0,07 | -0,02 | -0,09 | -0,06 | -0,02 | -0,01 | 1 |

Матрица $b_{ij}$, обратная матрице коэффициентов $(\delta_{ij} - \alpha_{ij})$, $i, j = 1,...,M_N$. Таблица 2

| № Предпр. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0,03 | 0,049 | 0,022 | 1,018 | 0,067 | 0,081 | 0,098 | 0,074 | 0,055 |
| 5 | 0,056 | 0,072 | 0,047 | 0,06 | 1,013 | 0,031 | 0,082 | 0,049 | 0,031 |
| 6 | 0,028 | 0,039 | 0,023 | 0,047 | 0,058 | 1,014 | 0,096 | 0,09 | 0,063 |
| 7 | 0,036 | 0,072 | 0,03 | 0,059 | 0,045 | 0,051 | 1,016 | 0,041 | 0,078 |
| 8 | 0,02 | 0,066 | 0,05 | 0,091 | 0,083 | 0,034 | 0,078 | 1,014 | 0,043 |
| 9 | 0,018 | 0,062 | 0,077 | 0,031 | 0,098 | 0,067 | 0,036 | 0,022 | 1,01 |

Матрица коэффициентов $(\delta_{kl} - \beta_{kl})$, $k$, $l$ =1,…, $M_K^1$. Таблица 3

| № Предпр. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -0,03 | -0,02 | -0,04 | -0,05 | -0,03 |
| 2 | -0,05 | 1 | -0,04 | -0,03 | -0,02 | -0,01 |
| 3 | -0,04 | -0,03 | 1 | -0,02 | -0,03 | -0,04 |
| 4 | -0,03 | -0,02 | -0,01 | 1 | -0,05 | -0,08 |
| 5 | -0,06 | -0,07 | -0,06 | -0,05 | 1 | -0,02 |
| 6 | -0,03 | -0,02 | -0,01 | -0,03 | -0,05 | 1 |

Матрица $\lambda_{kl}$, обратная матрице коэффициентов $(\delta_{kl} - \beta_{kl})$, $k$, $l$ =1,…, $M_K^1$.Таблица 4

| № Предпр. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,009 | 0,037 | 0,026 | 0,046 | 0,056 | 0,036 |
| 2 | 0,055 | 1,006 | 0,043 | 0,035 | 0,027 | 0,017 |
| 3 | 0,046 | 0,036 | 1,005 | 0,026 | 0,037 | 0,045 |
| 4 | 0,038 | 0,028 | 0,016 | 1,008 | 0,058 | 0,084 |

| № Предпр. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,07 | 0,077 | 0,066 | 0,058 | 1,011 | 0,03 |
| 6 | 0,036 | 0,026 | 0,015 | 0,035 | 0,055 | 1,006 |

Решение прямой задачи. Группа предприятий, млрд. руб. Таблица 5

| № Предпр. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Конеч. прод. | 5 000 | 3 000 | 2 000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Валов. Выпуск | 5 000 | 3 000 | 2 000 | 341 | 590 | 303 | 456 | 398 | 430 |

Решение прямой задачи. Первое предприятие, млрд. руб. Таблица 6

| № цеха | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конеч. прод. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 000 |
| Валов. Выпуск | 214 | 101 | 268 | 500 | 179 | 5988 |

Решение обратной задачи. Группа предприятий, млрд. руб. Таблица 7

| № Предприятия | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Мощность | 5000 | 3000 | 2000 | 300 | 600 | 400 | 500 | 400 | 500 |
| Доля выпуска конеч.продукции | 0,5 | 0,3 | 0,2 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| Величины $g_i$ | 10000 | 10000 | 10000 | 8700 | 10120 | 13101 | 10765 | 10090 | 11640 |

Решение обратной задачи. Первое предприятие, млрд. руб. Таблица 8

| № цеха | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Мощность | 300 | 200 | 100 | 600 | 200 | 5000 |
| Доля выпуска конеч. продукции | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 |
| Величины $c_{1k}$ | 8345 | 11824 | 2314 | 7235 | 6734 | 4121 |

Результаты решения прямой задачи представлены в табл. 5 и 6, а обратной задачи в табл. 7 и 8. Для группы предприятий минимальное значение $g_i$ равно 8700 млрд руб. Эта величина представляет собой общий объем выпуска конечной продукции группы предприятий. Конечную продукцию выпускают первые три предприятия в долях 0,5 ,0,3 и 0,2, что в абсолютном выражении составляет соответственно 4350 млрд руб., 2610 млрд руб. и 1740 млрд руб. При этом лимитирующей мощностью является мощностью четвертого предприятия.

Минимальное значение величины $c_{1k}$ для первого предприятия составляет 2314 млрд руб. Конечную продукцию выпускает только цех 6 и ее максимальный объем составляет 2314 млрд руб. Лимитирующей мощностью является мощность цеха 3.

## Заключение

В статье разработана интегрированная математическая модель взаимодействия группы предприятий, совместно выпускающих производственную продукцию на основе концепции В. Леонтьева «затраты-выпуск». В этой модели осуществлен синтез модели «затраты-выпуск» группы взаимодействующих предприятий и модели «затраты-выпуск» отдельного предприятия (любого) из этой группы. Интегрированная модель позволяет более детально анализировать как работу отдельного предприятия, так и его взаимодействие с остальными предприятиями группы.

Разработаны алгоритмы решения задач управления промышленным производством группы взаимодействующих предприятий, включая задачу определения необходимых производственных мощностей предприятий и цехов и подразделений внутри них (прямая задача) и задачу определения максимально возможного объема конечной продукции на имеющихся мощностях (обратная задача).

Приведены числовые примеры решения задач управления промышленным производством на примере авиастроения. В этих примерах в состав группы взаимодействующих предприятий входят предприятия конечной сборки самолетов и предприятия, поставляющие на сборочные предприятия отсеки самолетов, материалы, детали, узлы и комплектующие изделия.

## Литература

1.*Леонтьев В.В.* Избранные произведения в 3-х томах. – М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2006 г.

2. *Моделирование* народно-хозяйственных процессов / Под ред. Дадаяна В.С. - М.: Экономика, 1973.- 479 с.

3. *Немчинов В.С.* Избранные произведения: в 6 т. М.: «Наука», 1967-1969, т. 5, с. 192-194.

4. *Федорович М.М., Черейская Н.Н., Соколова Л.В., Тобелко И.Л.*. Математический метод

составления техпромфинплана завода. В кн. Применение математики в экономических исследованиях. Под редакцией академика В.С. Немчинова, т. 2, М.:Соцэкгиз, 1961, с.248-295.

5. *Кузнецова Т.И., Белоусова О.Н.* Использование матричных моделей на машиностроительном предприятии в условиях кризиса. Гуманитарный вестник, 2013, вып. 8. URL:http://hmbul.bmstu.ru/catalog/econom/hidden/100.html

6. *Волощук С.Д.* Оценка эффективности управления объектами оборонно-промышленного комплекса на основе показателя общественной стоимости. М.: Наука, 2009.

7. *Курышев Н.И.* Модель «затраты-выпуск»: количественный и ценностный анализ производства // Вестник кибернетики. 2013. № 12.

8. *Федоров В.В., Катулев А.Н., Колесник Г.В.* Оптимальный режим функционирования промышленного комплекса в условиях финансового кризиса // Мат. моделирование. 2001. № 10.

9. *Ширяев, Е.В. Ширяев.* Принятие решений. Динамические задачи управления фирмой..М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2016. -192 с.

Романов Борис Александрович

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

Москва Волоколамское шоссе дом 4

Доцент, кандидат технических наук

E-mail boris094@mail.ru Моб. тел. 910-453-7756

Докторант ИПУ РАН, научный руководитель Цвиркун А.Д.