

О СОГЛАСОВАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Светушков Н. Н.¹

(Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), Москва)

В статье анализируются свойства согласованности конечномерных представлений операторов дифференцирования и интегрирования, и делается вывод, что наиболее приемлемым, с точки зрения адекватности и устойчивости численного решения, являются схемы аппроксимации первого порядка точности. Показано, что применение схем высокого порядка точности для численного решения как в интегральных, так и в дифференциальных уравнениях, может приводить к осциллирующему характеру поведения приближенного решения. На основе проведенного анализа дифференциальных и интегральных уравнений предлагается устойчивая схема параметрической аппроксимации, обобщающая явно-неявной схему Кранка-Николсона, при которой конечномерные операторы обладают свойством согласованности.

Ключевые слова: численное решение, дифференциальные и интегральные операторы, конечномерная аппроксимация.

1. Введение

Существование большого количества различных численных схем для решения дифференциальных и интегральных уравнений (включая уравнения в частных производных в математической физике и теории управления) приводит к

¹ Николай Николаевич Светушков, кандидат технических наук, доцент (svetushkov@mai.ru).

необходимости выбора наиболее подходящей аппроксимации (или конечномерного представления) операторов дифференцирования и интегрирования с точки зрения повышения точности и адекватности получаемых численных результатов. Это особенно актуально в связи с получением надежных данных как при моделировании, так и при прогнозировании результатов при управлении сложными физическими процессами в различных отраслях промышленности.

В настоящее время, несмотря на то, что для повышения точности расчетов используются суперкомпьютеры, позволяя решать сложные задачи на мелкомасштабных сеточных разбиениях, остаются открытыми вопросы, связанные с устойчивостью и точностью получаемых численных результатов. В связи с тем, что время расчета сложных задач может занимать несколько дней, то большое значение имеют исследования предварительного качественного анализа численного решения, для обоснования правильности математически поставленной задачи. Нередки ситуации, когда выбранная численная схема демонстрирует «хорошее» поведение на крупных сетках, но при небольшом изменении начальных или граничных условий, а также при варьировании размеров сеточного разбиения, происходят значительные изменения в характере поведения численного решения, приводя к возникновению осцилляций [1]. В литературе можно найти работы, посвященные анализу причин такого поведения численных схем [напр. 1-6], однако достаточно полного и точного ответа на данный вопрос не приводится.

2. Аппроксимация операторов дифференцирования и интегрирования

2.1. СОГЛАСОВАННЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

Часто, когда мы говорим об уравнениях, то под нахождением их решения неявно подразумевается, что существует определенным образом построенный обратный

оператор, который можно применить к правой части и вычислить его действие.

При решении интегральных и дифференциальных уравнений ситуация полностью аналогична – необходимо найти обратный оператор, который для простейших уравнений Вольтера является оператором дифференцирования, а для простейших дифференциальных уравнений - оператор интегрирования, и его решение означает определение его действия на соответствующую правую часть.

Поэтому, анализ аппроксимирующих возможностей матричных операторов интегрирования и дифференцирования, а также их свойств, которые, вообще говоря, должны совпадать со свойствами исходных непрерывных операторов, позволит сделать выводы об их применимости и адекватности используемых численных схем при решении конкретных дифференциальных и интегральных уравнений.

Рассмотрим два оператора интегрирования на отрезке, которые отличаются точками, от которых выполняется интегрирование (различные концы отрезка):

$$(1) \quad \begin{aligned} \underline{I}y &\equiv \int_a^x y(\xi) d\xi; x \in [a, b] \\ \bar{I}y &\equiv \int_x^b y(\xi) d\xi; x \in [a, b] \end{aligned}$$

Первое свойство, которое хотелось бы, чтобы было справедливо и в конечномерном случае, заключается в том, что для суммы операторов интегрирования, независимо от вида функции, было бы справедливым равенство:

$$(2) \quad \bar{I}y + \underline{I}y = \int_a^b y(\xi) d\xi = const$$

Второе свойство заключается в том, что при последовательном действии на функцию оператора дифференцирования и интегрирования, очевидно, получаем ту же самую функцию, но с противоположными знаками:

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x} Iy = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x y(\xi) d\xi = y(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{I}y = \frac{\partial}{\partial x} \int_x^b y(\xi) d\xi = -y(x)$$

Другими словами конечномерные операторы дифференцирования и интегрирования должны обладать свойством взаимной обратимости.

Несмотря на то, что свойства (2)-(3), очевидные для непрерывных операторов, всегда справедливы при аналитических вычислениях, практика показывает, что при переходе к конечномерным аналогам, их справедливость требует отдельной проверки.

2.2. КОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Простейшая численная аппроксимация оператора дифференцирования, очевидно, имеет вид конечной разности:

$$(4) \quad y' \approx \Delta y / \Delta t = (y_{i+1} - y_i) / (t_{i+1} - t_i)$$

В силу того, что число конечно-разностных уравнений на единицу меньше числа неизвестных, конечномерный оператор дифференцирования имеет вид неквадратной матрицы размерности $N(N-1)$:

$$(5) \quad D_n = \frac{1}{\Delta t} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ & & & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Заметим, что из представления (4) видно, что конечномерный оператор дифференцирования является антисимметричным: $D^T = -D$.

Если учесть начальные условия (которые, вообще говоря, можно задавать на обоих концах отрезка решения задачи) то

матрица D_n превращается в квадратную, причем свойство антисимметричности относительно главной диагонали нарушается, и мы получаем два различных конечномерных оператора дифференцирования размерности $(N-1)(N-1)$:

$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{D}_n &= \frac{1}{\Delta t} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \underline{D}_n &= \frac{1}{\Delta t} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

для каждого из которых существует своя обратные матрицы (очевидно, что эти матрицы не совпадают), и, при этом выполняется равенство: $\bar{D}_n^T = -\underline{D}_n^T$.

Другими словами, в конечномерном случае существуют два невырожденных оператора дифференцирования, аналогично тому, что в непрерывном случае имеются два оператора интегрирования (1).

2.3. КОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Как было показано выше, мы имеем два оператора интегрирования, которые отличаются пределами интегрирования. Конечномерные аналоги могут быть найдены, например, просто из условий обратимости (3). Для этого необходимо вычислить обратные матрицы к матрицам (6). Прямые вычисления приводят к следующим двум квадратным матрицам размерности

$(N-1)(N-1)$, которые аппроксимируют операторы интегрирования от нижней и верхней границ отрезка:

$$(7) \quad \begin{aligned} \underline{I}_n &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 0 \\ & & \dots & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix} \Delta t \\ \bar{I}_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 1 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix} \Delta t \end{aligned}$$

Однако, если мы попробуем проверить выполнение условия (2), то получим, что сумма этих двух матриц не является матрицей, для которой это выражение справедливо:

$$(8) \quad \underline{I}_n + \bar{I}_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & & 1 \\ & & \dots & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 2 \end{vmatrix} \Delta t$$

Очевидно, что для выполнения равенства (2) необходимо, чтобы на диагонали матрицы, являющейся суммой конечномерных операторов интегрирования, стояли единицы. Для этого представим операторы интегрирования в виде неквадратных матриц размерности $N(N-1)$ добавив к матрицам (7) нулевую строку:

$$(9) \quad \underline{I}_n = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \Delta t \\ \\ \bar{I}_n = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \Delta t \end{array}$$

В этом случае, просуммировав матрицы, получаем матрицу, полностью состоящую из единиц, что обеспечивает выполнение равенства (2) в конечномерном случае. Такая ситуация объясняется тем, что конечномерные операторы интегрирования, фактически основанные на вычисление интегралов методом прямоугольников, используют в качестве входного вектора значения функции в промежуточных точках отрезков, а результат их действия относится к значениям в конечных точках отрезков. Для конечномерных операторов дифференцирования ситуация противоположна – входные значения берутся из конечных точек отрезка, а результат действия оператора определяет значения функции в определенных промежуточных точках сеточного разбиения.

2.4. СХЕМЫ АППРОКСИМАЦИИ БОЛЕЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Рассмотрим возможность аппроксимации операторов интегрирования схемами более высокого порядка, чем метод прямоугольников, например, их вычисление методом трапеций. В этом случае имеем:

$$(10) \int_a^x y(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^i 0.5(y_j + y_{j-1})\Delta t$$

$$(11) \underline{I}_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0.5 & 1 & 1 & 1 & & 0.5 \end{vmatrix} \Delta t$$

Аналогично, при интегрировании от другого конца отрезка:

$$(12) \int_x^b y(\xi) d\xi = \sum_{j=i}^{n-1} 0.5(y_j + y_{j+1})\Delta t$$

$$(13) \bar{I}_n = \begin{vmatrix} 0.5 & 1 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & \dots & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & & 0.5 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix} \Delta t$$

В силу того, что нулевые строки не информативны с точки зрения решения интегральных уравнений, их можно исключить, и, соответственно, исключать первый и последний столбцы, для того, чтобы матрицы остались квадратными. После этого можно найти прямым вычислением обратные матрицы:

$$(14) \left[\begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0,5 & 0 \\ & & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & 0,5 \end{vmatrix} \Delta t \right]^{-1} = \frac{1}{\Delta t} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \\ & & \dots & \\ 4 & -4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(15) \left[\begin{array}{cccc|c} 0,5 & 1 & 1 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0,5 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 & \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & \end{array} \right]^{-1} = \frac{1}{\Delta t} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 4 & 4 & \\ 0 & 2 & -4 & -4 & \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \end{array} \right]$$

Мы видим, что полученные матрицы (14) и (15) не имеют ничего общего с конечномерными операторами дифференцирования, и, кроме того, содержат повторяющиеся знакопеременные диагонали, что, по всей видимости, и приводит к осцилляциям в случае решения интегральных уравнений с помощью метода трапеций. Таким образом, попытка даже немного улучшить аппроксимацию интегральных операторов приводят к совершенно неприемлемым результатам.

Перейдем теперь к численным схемам более высокого порядка, которые используются при решении дифференциальных уравнений. Обратимся к многошаговым методам. Простейший многошаговый метод записывается в виде:

$$(16) \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} = f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, y_k + f_k \frac{\Delta t}{2}\right)$$

В этом случае, если ввести дополнительную расширенную сетку, на которой задаются промежуточные значения функции правой части, конечномерная задача будет выглядеть следующим образом:

$$(17) \frac{1}{\Delta t} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} y_0 \\ y_{1/2} \\ y_1 \\ y_{3/2} \\ \dots \\ y_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} b_0 \\ b_{1/2} \\ b_1 \\ b_{3/2} \\ \dots \\ b_n \end{array} \right| \end{array}$$

Вид матрицы (17) показывает, что квадратная матрица дифференцирования стала полностью антисимметричной относительно главной диагонали. Однако вычисления

показывают, что при $n > 2$ эта матрица является вырожденной, и обратная матрица для нее не существует (для $n=3$ это легко проверить путем вычисления ее определителя).

Отметим, что и другие многошаговые методы (например, Рунге-Кутта) также приводят к представлению конечномерных дифференциальных операторов в виде матриц, для которых отсутствует обратная. Эта вырожденность матриц и является, по всей видимости, наиболее вероятной причиной появления «нефизичных» осцилляций в численных решениях в случае использования многошаговых методов.

Таким образом, можно сделать вывод, что задача наиболее точного конечномерного описания дифференциальных и интегральных уравнений в большей степени связана с соответствующим преобразованием правых частей исходных уравнений, т.е. в случае конечномерных аналогов необходимо использовать подходы, основанные на схемах первого порядка точности.

3. Параметрическая аппроксимация интегральных и дифференциальных уравнений

3.1. ПОСТАНОВКА КОНЕЧНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для простоты рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка следующего вида:

$$(18) \quad \begin{aligned} y' &= f(y(t), t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Численная аппроксимация оператора дифференцирования, в силу вышесказанного, имеет вид конечной разности (4), и остается неопределенность в том, как эту конечную разность связать со значениями правой части уравнения (18). Приравнивание этих значений к предыдущему или текущему временному слою приводит, как известно [2-6], к явным и полностью неявным численным схемам:

$$(19) \begin{aligned} (y_{i+1} - y_i)/(t_{i+1} - t_i) &= f(y_i, t_i) \\ (y_{i+1} - y_i)/(t_{i+1} - t_i) &= f(y_{i+1}, t_{i+1}) \end{aligned}$$

Широко известна также промежуточная явно- неявная схема Кранка-Николсона [2-6], когда в правой части используется комбинация функций с предыдущего и текущего слоев:

$$(20) (y_{i+1} - y_i)/(t_{i+1} - t_i) = 0,5f(y_i, t_i) + 0,5f(y_{i+1}, t_{i+1})$$

Необходимо отметить, что расчеты, выполненные по явной или неявной схемам отличаются друг от друга и дают или завышенные или заниженные значения функции по сравнению с точным решением (18).

Для того, чтобы разобраться в том, каким образом получить схему, позволяющую на данном сеточном разбиении получать более точное (в пределе точное) численное решение, рассмотрим рисунок:

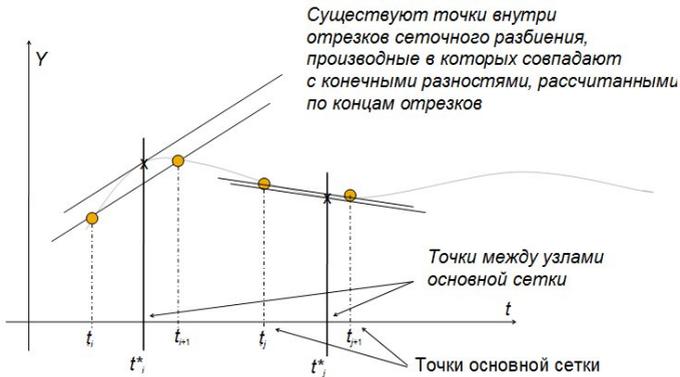


Рис.1 Графическая иллюстрация условия точного равенства конечной разности и значения производной функции в некоторой внутренней точке отрезка

Можно доказать, по аналогии с теоремой о среднем, что на произвольном отрезке, на котором задана непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция, существует такая точка, производная в которой от данной функции точно совпадает с конечной разностью, рассчитанной по конечным

точкам отрезка (в случае монотонного поведения функции). Поэтому можно записать точное равенство:

$$(21) (y_{i+1} - y_i)/(t_{i+1} - t_i) = y(t_i^*)$$

Поэтому, учитывая (18), можно получить точное равенство:

$$(22) (y_{i+1} - y_i)/(t_{i+1} - t_i) = f(y(t_i^*), t_i^*), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Если ввести параметр θ_i , который определяет положение промежуточной точки t_i^* на отрезке:

$$(23) t_i^* = (1 - \theta_i)t_i + \theta_i t_{i+1}$$

то в случае, когда искомую функцию можно интерполировать линейно, значение функции в промежуточной точке также будет удовлетворять соотношению:

$$(24) y_i^* = (1 - \theta_i)y_i + \theta_i y_{i+1}$$

Отсюда следует, что равенство (22) можно переписать в виде:

$$(25) (y_{i+1} - y_i)/(t_{i+1} - t_i) = f((1 - \theta_i)y_i + \theta_i y_{i+1}, (1 - \theta_i)t_i + \theta_i t_{i+1})$$

Из (25) следует, что в крайних случаях как раз и получаются явная ($\theta_i=0$) и неявная схемы ($\theta_i=1$). Для того, чтобы получить явно-неявную схему Кранка-Николсона, необходимо сделать дополнительное предположение, что функция правой части (18) также может быть аппроксимирована линейной функцией. Тогда:

$$(26) \begin{aligned} & f((1 - \theta_i)y_i + \theta_i y_{i+1}, (1 - \theta_i)t_i + \theta_i t_{i+1}) \approx \\ & \approx (1 - \theta_i)f(y_i, t_i) + \theta_i f(y_{i+1}, t_{i+1}) \end{aligned}$$

откуда следует при $\theta_i=0,5$ абсолютно устойчивая схема Кранка-Николсона (20). В отличие от схемы Кранка-Николсона, для которой требуется выполнение условий линейности правой части, предлагаемая схема (25) позволяет решать задачи даже в случае существенной нелинейности правой части (18), которая часто встречается в задачах управления.

Заметим, что несмотря на то, что схема параметрической аппроксимации (25) является схемой первого порядка, обеспечение соответствующего значения параметра аппроксимации θ_i на каждом элементарном отрезке и возможность интерполяции искомой функции с помощью квадратичного или кубического полинома вместо линейной

интерполяции (24) позволяет, вообще говоря, значительно повысить точность получаемых результатов.

3.2. ПОСТАНОВКА КОНЕЧНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как известно, интегральные уравнения являются более общей формой описания физических процессов и в общем случае не могут быть сведены к дифференциальным уравнениям. Для вывода конечномерных соотношений для интегрального уравнения запишем его в виде, аналогичном (18):

$$(27) \int_0^t y(t) dt = f(y(t), t)$$

При такой записи подразумевается, что правая часть (27) согласована с левой частью, т.е. при $t=0$ функция $f(y(t), t)$ обращается в ноль.

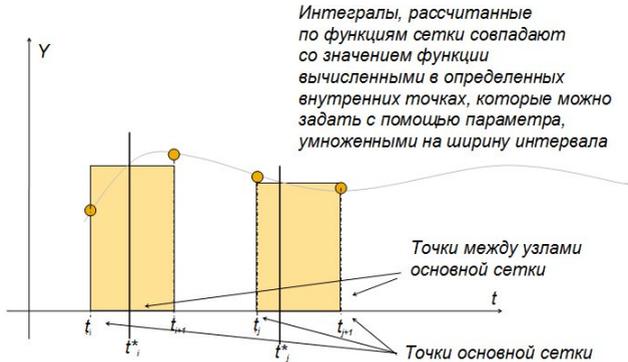


Рис.2 Графическая иллюстрация теоремы о среднем

На рисунке 2 видно, что значение интеграла на выбранном элементарном отрезке может быть заменено произведением значения функции в некоторой внутренней точке отрезка и длины отрезка (теорема с средним). Таким образом, интеграл в (27) может быть записан в виде суммы:

$$(28) \int_0^t y(t)dt = \sum_i y(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

Дополнительно отметим, что это равенство является точным, и погрешность численной схемы будет определяться только ошибками в выборе промежуточных точек t_i^* внутри элементарных отрезков.

Из (28) следует, что искомыми значениями при численном решении интегрального уравнения вида (27) являются значения функции не на концах отрезков сеточного разбиения, а некоторых промежуточных точках.

$$(29) \sum_{i=1}^j y(t_{i-1}^*)(t_i - t_{i-1}) = f(y_j, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Поэтому правая часть (29) должна содержать значения функции именно в этих точках. Для этого необходимо выразить значения в функции в промежуточных точках через параметр аппроксимации:

$$(30) y(t_i^*) = y_i^* = (1 - \theta_i)y_i + \theta_i y_{i+1}; \quad 0 < \theta_i < 1;$$

Учитывая, что y_0 может быть найдена из условия согласования:

$$(31) f(y_0, 0) = 0$$

можно построить рекуррентную формулу для определения значения функции на концах отрезков по значениям функции в промежуточных точках:

$$(32) y_{i+1} = \frac{y_i^* - (1 - \theta_i)y_i}{\theta_i}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

В результате получим численную схему следующего вида:

$$(33) \sum_{i=1}^j y(t_{i-1}^*)(t_i - t_{i-1}) = g(y_0^*, y_1^*, \dots, y_{j-1}^*, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

где функция правой части g получается из (29) подстановкой в нее рекуррентных соотношений (32).

Таким образом, и при решении интегральных уравнений удалось свести в системе (27) интегральный оператор к оператору первого порядка точности с соответствующим изменением правой части.

4. Заключение

Как показывает проведенный анализ, согласованное численное представление операторов дифференцирования и интегрирования возможно только в случае использования схем первого порядка точности, как в случае дифференциальных, так и интегральных уравнений. Применение схем более высокого порядка точности приводит к некорректной постановке исходной задачи, когда обратные операторы имеют не вполне адекватное представление, что на практике выражается в неустойчивом поведении численных решений.

В работе предлагается использовать для численного решения дифференциальных и интегральных уравнений схемы конечномерные операторы, которые согласованы на основе параметрической аппроксимации первого порядка точности. Повышения точности вычислений при таком подходе обеспечивается правильным выбором (возможно итерационным) свободного параметра для каждого элементарного отрезка сеточной области. Предложенные схемы обобщают явно-неявную схему Кранка-Николсона как на случай дифференциальных, так и интегральных уравнений, что позволяет предположить, что они также будут абсолютно устойчивыми.

Литература

1. БАБУШКА И., ВИТАСЕК Е., ПРАГЕР М. *Численные процессы решения дифференциальных уравнений* / Пер. с англ. – М.: Мир, 1969. – 368 с.
2. ВАСИЛЕВСКИЙ Ю.В., ОЛЬШАНСКИЙ М.А. *Краткий курс по многосеточным методам декомпозиции* / М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. – 104 с.
3. ГОДУНОВ С.К., РЯБЕНЬКИЙ В.С. *Разностные схемы. Введение в теорию* / Изд.2, перераб. и доп. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
4. САМАРСКИЙ А.А., ГУЛИН А.В. *Устойчивость разностных схем* / – М.: Либроком, 2009. – 386 с.

5. ХАЙРЕР Э., НЕРСТ С. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Нежесткие задачи* / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
6. ХЕММИНГ Р.В. *Численные методы для научных работников и инженеров* / – М.: Наука, 1972. – 399 с.

ON THE CONSISTENT PARAMETRIC APPROXIMATION OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL OPERATORS

Nikolay Svetushkov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Cand.Sc., assistant professor (svetushkov@mai.ru).

В статье анализируются свойства согласованности конечномерных представлений операторов дифференцирования и интегрирования, и делается вывод, что наиболее приемлемым, с точки зрения адекватности и устойчивости получаемого численного решения, являются схемы аппроксимации первого порядка точности. С помощью прямых вычислений показано, что применение схем более высокого порядка точности для нахождения численного решения, как в интегральных, так и в дифференциальных уравнениях, может приводить к осциллирующему характеру поведения приближенного решения и неустойчивости схемы. Часто для решения подобных проблем применяются многосеточные методы, когда решение, полученное на мелкомасштабном сеточном разбиении сравнивается с решением на крупной сетке, и соответствующим образом корректируется. Однако такой подход сложен в алгоритмической реализации, требует специальных навыков при написании программного обеспечения и не используется в коммерческих программных продуктах. На основе проведенного анализа дифференциальных и интегральных уравнений предлагается устойчивая схема параметрической аппроксимации, обобщающая явно-неявную схему Кранка-Николсона, при которой конечномерные операторы обладают свойством согласованности. Повышение точности расчетов на основе развитого подхода

обеспечивается за счет выбора свободных параметров аппроксимации на каждом отдельном отрезке сеточного разбиения.

Abstract: the properties of the consistency of the finite-dimensional representations of the differentiation and integration operators are analyzed in the paper, and it is concluded that the most acceptable, from the point of view of adequacy and stability of the numerical solution obtained, are first-order approximation schemes of accuracy. With the help of direct calculations it is shown that the use of schemes of a higher order of accuracy for finding a numerical solution, both in integral and in differential equations, can lead to an oscillating character of the behavior of the approximate solution and the instability of the circuit. Often, multigrid methods are used to solve such problems, when the solution obtained on a fine-meshed grid partition is compared with a solution on a large grid and adjusted accordingly. However, this approach is complicated in algorithmic implementation, requires special skills when writing software and is not used in commercial software products. On the basis of the analysis of differential and integral equations, we propose a stable scheme of parametric approximation that generalizes the explicitly implicit Krank-Nicholson scheme, in which finite-dimensional operators have the consistency property. Increasing the accuracy of calculations based on the developed approach is provided by selecting free approximation parameters on each individual segment of the grid partition.

Keywords: numerical solution, differential and integral operators, finite-dimensional approximation.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...
Опубликована ...заполняется редактором...