УДК 517.9
ББК 22.1

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Бычков Е.В.[1], Котлованов К.Ю.[2]
(Южно-Уральский государственный университет, Челябинск)

В данной статье рассматривается математическая модель колебаний термоупругой пластины при некоторых допущениях. В ее основе лежит неклассическое уравнение математической физики, кроме того уравнение является уравнением соболевского типа. Как известно задача Коши для уравнения соболевского типа не является разрешимой при произвольных начальных значениях. В статье рассматривается задача Шоуолтера – Сидорова, которая разрешима при произвольных начальных значениях и более «подходящая» для уравнений соболевского типа. Исследуемая математическая модель в подходящим образом выбранных функциональных пространствах может быть редуцирована к абстрактному уравнению соболевского типа третьего порядка с относительно (n, p)-секториальным оператором в правой части. Основным подходом к исследованию является метод построения разрешающих полугрупп.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа; относительно спектрально ограниченный оператор; модель колебания термоупругой пластины.

[1]Евгений Викторович Бычков, кандидат физико-математических наук, (bychkovev@susu.ru).
[2]Константин Юрьевич Котлованов, магистр, (kotlovanovki@susu.ru).

Введение

В наше время методы математического моделирования широко применяются в исследованиях динамического поведения пластин. Актуальной задачей в современном строительстве различных зданий, автомобильных дорог, мостов. Вместе с тем, элементы некоторых конструкций, таких как двигатели машин, самолётов, ракет, элементы различных ядерных и атомных станций в процессе эксплуатации подвергаются различным воздействиям температуры. При проектировании такого рода конструкций их динамическое поведение описывается теорией термоупругости. Результаты о доказательстве существования единственного решения являются основой для дальнейшего исследования задач управления.

В дальнейшем для рассмотрения модели колебаний термоупругой пластины, будем рассматривать уравнение вида:

(1) $u'''_{ttt}+2\triangle^2 u'_t-\gamma\triangle u'''_{ttt}-k\triangle^3 u+k\gamma\triangle^2 u''_{tt}-k\triangle u''_{tt}=f(x,y,t)$

Функция u характеризует отклонение пластины от положения покоя. Коэффициенты k и γ – положительные, характеризующие свойства материала термоупругой пластины, $f(x,y,t)$ – это внешнее воздействие. Под термоупругость понимается тепловое расширение полностью обратимо или термически упруго, т.е. эффекты деформации при нагревании и при охлаждении по абсолютной величине равны.

1. Постановка задачи

будем рассматривать уравнение моделирующее колебание термоупргугой пластины:

(2) $u'''_{ttt}+2\triangle^2 u'_t-\gamma\triangle u'''_{ttt}-k\triangle^3 u+k\gamma\triangle^2 u''_{tt}-k\triangle u''_{tt}=f(x,y,t)$

Если предположить, что в процессе нагревания пластина не подвержена диффузии или диффузия не значительно влияет на физические свойства и процесс колебания, то параметр k можно положить равным нулю. Таким образом, уравнение (2) упрощается до уравнения вида

(3) $$(\Delta-\lambda)u_{ttt}=\gamma^2\Delta^2 u_t.$$

Дополним уравнение (3) краевыми условиями Бенара

(4) $$u(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) = 0, \quad (x,y,t) \in \partial D \times R,$$

и начальными условиями

(5) $$u^{(m)}(x,y,0) = u_m(x,y), \quad m = 0,1,2.$$

Проинтегрировав уравнение (3) с учетом начальных условий (5), получим

(6) $$(\Delta - \lambda)u_{tt} = \gamma^2\Delta^2 u + f.$$

(7) $$u(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) = 0, \quad (x,y,t) \in \partial D \times R,$$

(8) $$u^{(m)}(x,y,0) = u_m(x,y), \quad m = 0,1.$$

Здесь $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей ∂D, $f = (\Delta - \lambda)u_2 - \gamma^2\Delta^2 u_0$.

2. Задача Шоуолтера – Сидорова для уравнения математической модели колебаний термоупругой пластины

Рассмотрим задачу Коши

(9) $$\lim_{t\to 0+} u^{(m)}(t) = u_m, \quad m = 0,1,\ldots,n-1$$

для уравнения

(10) $$Lu^{(n)} = Mu + f.$$

Уравнение (10) редуцируется к системе

(11) $$Hu^{0(n)} = u^0 + M_0^{-1}f^0,$$

для уравнения

(12) $$u^{1(n)} = Su^1 + L_1^{-1}f^0,$$

Рассмотрим задачу Шоуолтера – Сидорова

(13) $$\lim_{t\to 0+} P(\dot{u}(t) - u_1) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} P(u(t) - u_0) = 0$$

для уравнения соболевского типа

(14) $$L\ddot{u} = Mu + f,$$

Теорема 1. Для любой вектор-функции f, такой, что $f^0 \in C^2((0,T);\mathfrak{F}^0)$ и $f^1 \in C((0,T);\mathfrak{F}^1)$, и произвольных начальных значениях $u_0, u_1 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u \in C^2((0,T);\mathfrak{U})$ задачи (13) для уравнения (14), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} f^1(s)ds - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} f^{0(nq)}(t)$$

Доказательство. Доказательство основано на подстановке решения в уравнение и начальные условия.

Математическую модель (6)–(8) редуцируем к задаче (9), (10). Для этого введем пространства

$$t$$

и зададим операторы

$$t$$

Лемма 1.

В силу предыдущей теоремы и леммы справедлива

Теорема 2. Пусть $f^0 \in C^2((0,T);\mathfrak{F}^0)$ и $f^1 \in C((0,T);\mathfrak{F}^1)$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ $(\gamma \neq 0)$. Тогда существует единственное решение задачи (6) – (8).

Литература

1. ЗАГРЕБИНА С.А. Устойчивые и неусточивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа // Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ. – 2016.
2. ЗАМЫШЛЯЕВА А.А. Об аналитическом исследовании математической модели Бенни – Люка // Математические заметки СВФУ. 2013. №2 – С. 57–65.
3. ЗАМЫШЛЯЕВА А.А. Фазовое пространство уравнения соболевского типа высокого порядка // Известия Иркутского государственного университета. 2011. №4 – С. 45–57.
4. СВИРИДЮК Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, №. 4. – С. 47–74.
5. СВИРИДЮК Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, №. 5. – С. 252–272.

6. SVIRIDYUK G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator // Utrecht, Boston, Koln: VSP. – 2003.

ON AN EQUATION OF SOBOLEV TYPE OF THIRD ORDER

Evgeny Bychkov, South Ural State University, Chelyabinsk, Candidate of Physics and Mathematics Sciences, (bychkovev@susu.ru).
Konstantin Kotlovanov, South Ural State University, Chelyabinsk, Master of Science, (kotlovanovki@susu.ru).

Abstract: We consider a mathematical model of thermoelastic plate vibrations under certain assumptions. The model is based on the nonclassical high-order equation of the mathematical physics, in addition, the equation is an equation of the Sobolev type. As is known, a Cauchy problem for the equation of Sobolev type is not solvable for arbitrary initial values. In this paper we consider the Showalter-Sidorov problem, which is solvable for arbitrary initial values and is more suitable for a Sobolev type equation. In appropriately chosen functional spaces, the considered mathematical model can be reduced to an abstract Sobolev type equation of the third order with relatively (n, p)-sectorial operator on the right-hand side. The main research approach is the method to construct resolving semigroups.

Keywords: Sobolev type equation; relatively spectral-bounded operator; mathematical model of thermoelastic plate vibrations.