

УДК 51-74 + 656.09
ББК 22.19 + 38.74

ПРИМЕНЕНИЕ РОБАСТНОГО ПОДХОДА К ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ УЗЛОВ С ПОДЪЕЗДНЫМИ ПУТЯМИ В ГЕОГРАФИЧЕСКОМ РЕГИОНЕ С СУЩЕСТВУЮЩЕЙ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМОЙ¹

Федин Г.Г.²,

*(Национальный исследовательский университет Высшая школа
экономики, Москва)*

В статье рассматривается задача размещения транспортных узлов с подъездными путями в некоторой региональной транспортной системе. В русскоязычной научной литературе число работ, в которых такая задача формулируется и решается математически, крайне мало, в то время как в иностранной литературе эта задача интенсивно исследуется. Цели настоящей работы включают: 1) классификацию вариантов постановок задач размещения транспортных узлов, 2) обзор последних зарубежных работ, посвященных этой тематике, 3) математическую постановку задачи размещения транспортных узлов с подъездными путями в виде задачи смешанного математического программирования и задачи робастной оптимизации, 4) тестирование представленных моделей на примере транспортной системы части территории России.

Ключевые слова: модернизация транспортной инфраструктуры, транспортные узлы, робастная оптимизация, смешанное матема-

¹ Часть результатов, содержащихся в этой статье, были представлены на международных конференциях EURO 2016 в Познани ([19]), ITEA 2017 в Барселоне ([6]) и IFORS 2017 в Квебеке ([7]).

² Федин Геннадий Геннадьевич, аспирант (Аспирантская школа компьютерных наук, НИУ ВШЭ), стажер-исследователь (Международная научно-учебная лаборатория анализа и выбора решений, НИУ ВШЭ) (gfedin@hse.ru).

тическое программирование.

Введение

Развитие инфраструктуры региональной транспортной системы является одной из приоритетных задач руководства региона. С развитием экономики региона растут грузопотоки, проходящие через его транспортную систему, вследствие чего, может наступить момент, когда транспортная система не сможет обслуживать возросшие грузовые потоки. В такой ситуации она превратится в препятствие для развития экономики региона. Задача оптимального размещения новых транспортных узлов и определения какими подъездными путями они должны обладать является одной из важнейших при рассмотрении вариантов модернизации транспортной системы региона.

Как правило, актуальны следующие предпосылки: 1) в регионе уже существует транспортная система, 2) существует возможность определить множество мест, подходящих для размещения новых транспортных узлов, 3) для каждого элемента транспортной системы можно спрогнозировать спрос на транспортные услуги. При таких предпосылках необходимо оптимальным образом разместить новые транспортные узлы и определить какие виды транспорта они должны обслуживать, то есть какими подъездными путями они должны обладать. Даже при небольшом количестве подходящих для размещения новых транспортных узлов географических точек региона рассматриваемая задача является достаточно сложной для лица принимающего решения (ЛПР), ввиду того, что в рамках размещения новых транспортных узлов необходимо также определить: 1) количество размещаемых транспортных узлов, 2) оптимальные пропускные способности новых транспортных узлов, 3) какими подъездными путями должны обладать новые транспортные узлы, 4) какой должна быть новая оптимальная схема грузоперевозок в регионе, так как добавление новых транспортных узлов меняет структуру грузопотоков в транспортной системе региона.

Для ответа на вышеуказанные вопросы предлагается матема-

тическая модель задачи размещения транспортных узлов с подъездными путями, базирующаяся на модели Hub Median Location. В настоящей статье представлены оптимизационная и робастная постановки задачи. Предложенная робастная постановка позволяет находить оптимальное решение с учетом ряда параметров о которых известны лишь области их возможных значений.

Материал статьи организован следующим образом. В первом разделе приводится классификация вариантов математических формулировок задачи размещения новых транспортных узлов и обзор современных работ, посвященных ей. Во втором разделе формулируется математическая постановка задачи в оптимизационной и робастной формах. Следующий раздел описывает применение предложенной модели для анализа вариантов модернизации транспортной системы части России. В заключении отражены основные результаты работы и описаны направления дальнейшего исследования.

1. Обзор литературы

1.1. ИСТОРИЯ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Класс математических моделей, который сейчас используется в задачах размещения транспортных узлов, первоначально был предложен для задач размещения различных центров обслуживания. Одной из первых работ, в которой была рассмотрена подобная модель, является [34], где авторы рассматривали задачу размещения больниц, складов, почтовых отделений, фабрик, магазинов и других объектов. Они сформулировали эту задачу в виде задачи целочисленного программирования. Целевая функция в этой задаче отражает сумму расстояний от каждой точки до размещаемых центров обслуживания, с учетом важности этих точек в регионе. Позднее в [21] было доказано, что эта задача является NP-трудной.

Задача размещения центров обслуживания получила название задачи о p -медиане (*p-Median Location Problem*) из-за своего сходства с задачей нахождения медианы графа. В этой задаче под медианой понимается вершина графа, в которой минимальна

взвешенная сумма расстояний между этой вершиной и остальными вершинами графа [22].

В классической постановке *p-Median Location Problem* необходимо разместить p центров (больниц, полицейских участков, пожарных команд) для обслуживания n пунктов. Предполагается, что центр может быть размещен в любом из пунктов. Также известно расстояние между пунктами d_{ij} и «важность» каждого пункта a_i («важность» может отражать количество людей проживающих в данном пункте). Переменные x_{ij} принимают значение 1, если пункт i обслуживается в центре, расположенном в пункте j , и 0 в противном случае. Центр обслуживания считается расположенным в пункте j , если переменная x_{jj} принимает значение 1.

Сформулированная задача имеет вид

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i d_{ij} x_{ij} \rightarrow \min .$$

При ограничениях

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, n,$$

$$(3) \quad x_{jj} \geq x_{ij}, \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n,$$

$$(4) \quad \sum_{j=1}^n x_{jj} = p,$$

$$(5) \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n.$$

Целевая функция (1) представляет собой суммарное расстояние от пунктов до размещенных центров с учетом важности пунктов. Ограничения имеют следующие значения: (2) – каждый пункт прикреплен ровно к одному центру обслуживания, (3) – пункты могут быть прикреплены только к центрам обслуживания, но не к другим пунктам, (4) – должно быть размещено ровно p центров обслуживания, (5) – переменные x_{ij} булевы. Позднее сформулированная выше задача стала использоваться применительно к проблеме размещения новых транспортных узлов. В этой ситуа-

ции центры обслуживания это транспортные узлы, а пункты это клиенты (грузоотправители и грузополучатели).

1.2. КЛАССИФИКАЦИИ ВАРИАНТОВ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Существует большое количество различных постановок задачи о размещении транспортных узлов, которые могут быть классифицированы по следующим признакам:

1) *Тип формализации транспортной системы.* Существует два основных типа: дискретная и планарная. В дискретной постановке места для размещения транспортных узлов выбираются из конечного множества точек (например: [31], [8] и [39]). В непрерывной или планарной постановке транспортные узлы могут быть размещены в любой точке региона (например: [32], [5] и [23]);

2) *Тип целевой функции задачи.* Существует два основных типа целевых функций: минимизация максимального расстояния между клиентом и транспортным узлом и минимизация суммы всех расстояний (например: [11], [31], [43]). Модели, рассматривающие целевые функции первого типа, обычно имеют в своём названии слово *Center*, например *Hub Center Location Problem* (например: [8], [26], [41], [20]);

3) *Информация о количестве транспортных узлов для размещения.* Этот параметр может быть либо экзогенным, либо определяться в процессе решения задачи (например: [43], [30]). В случае экзогенного параметра в названии модели присутствует приставка '*p*', например, *p-Hub Location Problem* (например: [4], [10], [20]);

4) *Тип соединения клиента с транспортным узлом.* Существует три типа соединения: единичное (каждый клиент может быть присоединен только к одному транспортному узлу, в названии модели присутствует *Single Allocation*, например: [9], [15]), ограниченное (каждый клиент может быть присоединен к *r* транспортным узлам, в названии модели присутствует *r-Allocation*, например: [25], [33]), множественное (каждый клиент может быть присоединен к нескольким транспортным узлам одновременно, в

названии модели присутствует *Multiple Allocation*, например: [37], [14]);

5) *Существование дополнительных условий на тип сети из транспортных узлов*. Основные типы следующие: полный граф, звезда (например: [40], [41]), дерево (например: [10]) и линия (например: [28]);

6) *Существование ограничений на пропускные способности транспортных узлов или связей клиентов с ними*. Типы задач, в которых присутствуют такие ограничения, имеют в своем названии прилагательное *Capacitated* (например: [8], [30], [15], [14]), если же такие ограничения отсутствуют, то *Uncapacitated* (например: [36], [25], [43], [9]);

7) *Наличие пар отправитель-получатель среди клиентов*. Задачи, в которых есть такие пары, называют *Hub Location Problem* (например: [31], [2], [43]); задачи в которых их нет – *Hub Median Location Problem* (например: [37], [40]);

8) *Наличие неизвестных параметров задачи и методы работы с ними*. В моделях, в которых присутствуют неизвестные параметры, используют два основных подхода: стохастическая оптимизация (*Stochastic*, например: [11], [2], [42], [20]) и робастная оптимизация (*Robust*, например: [1], [29], [30], [37], [43]);

9) *Рассмотрение различных видов транспорта*. Обычно рассматривается один тип соединения клиентов с транспортными узлами, однако существуют работы, в которых рассматривается несколько типов. Такие модели обычно имеют в своём названии прилагательное *Multi-modal* или *Inter-modal* (например: [4], [35]);

10) *Наличие условий на обслуживание*. Примером ограничений могут быть ограничения на максимально допустимую стоимость (время, дистанцию) перевозки груза для конкретного клиента. Модели с такими ограничениями называют *Hub Covering Location Problem* (например: [27], [39], [36], [25]).

Дополнительную информацию можно найти в обзорных работах [3], [12], [16], [18].

Сейчас в научной литературе активно исследуются как различные варианты постановки задачи размещения транспортных

узлов (например: [14], [30], [37], [43]), так и методы их решения (например: [25], [36], [24], [38]).

1.3. ОСОБЕННОСТИ ПРЕДЛАГАЕМОЙ МОДЕЛИ

Основными отличительными чертами модели, представленной в этой статье, являются: а) учет в ней наличия разных видов транспорта посредством подъездных путей к транспортным узлам, б) возможность выбора пропускной способности для каждого нового транспортного узла, в) возможность отыскания наилучшего гарантированного решения в случае наличия неизвестных параметров. Ниже подробно рассмотрены работы наиболее близкие к данной.

В [35] авторы рассматривали *Multi-modal Capacitated Single Allocation Hub Location Problem*. Предложенная ими модель позволяет а) выбирать для перевозки определенный вид транспорта и тип транспортного средства, б) выбирать пропускную способность транспортных узлов, увеличивая её на определенные величины в случае необходимости. Для решения сформулированной задачи авторы предлагают эвристический алгоритм, который тестируют на примерах (наборы данных Turkish network из 81 и CAB из 25 вершин) и сравнивают с результатами полученными CPLEX. Тестирование показывает, что предложенный эвристический алгоритм находит решение, отличающееся от найденного CPLEX, в среднем, не больше чем на 1%, однако, важно отметить, что CPLEX не смог решить предложенную авторами формулировку задачи для 81 вершины за 10 часов.

В [13] рассматривается *Capacitated Single Allocation Hub Location Problem* с возможностью выбора пропускных способностей транспортных узлов из заранее заданного множества. Кроме этого, авторы добавляют условие на сбалансированность получившейся транспортной сети, то есть грузопотоки, проходящие через разные транспортные узлы, должны быть примерно одного объема. Предложенная модель была протестирована на примерах размером до 50 вершин. Примеры решались CPLEX, для нескольких примеров время решения превысило 2 часа.

Как отмечалось в классификации выше, для работы с неиз-

вестными параметрами существует два основных подхода. В стохастической оптимизации неизвестные параметры представляются в виде случайных величин с известными вероятностными распределениями. При таком подходе, значение целевой функции это среднее ожидаемое значение. Можно выделить следующие минусы стохастического подхода: а) предположение о существовании и виде вероятностных распределений для неизвестных параметров ни чем не обосновывается, б) отыскание параметров этих вероятностных распределений в практических задачах затруднено, в) в случае моделирования с использованием различных сценариев размер и сложность задачи сильно возрастают, г) найденное среднее значение может отличаться в негативную сторону от реального значения. Ввиду перечисленных недостатков, в данной работе стохастический подход не используется, а применяется робастный подход, при котором, ищется не среднее значения а наилучший гарантированный результат. Ниже рассмотрены работы также применяющие этот подход.

В [29], [30] применяется робастный подход к задачам *Uncapacitated Multiple Allocation Hub Median Problem* и *Capacitated Multiple Allocation Hub Median Problem* с неопределенным спросом на транспортные услуги. Также как и в [1], авторы формулируют задачи минимаксной оптимизации на двух многогранниках и линеаризуют их при помощи перехода к двойственной задаче. Авторы описывают применение метода декомпозиции Бендерса для решения получившихся задач и тестируют предложенную модель и метод решения на примерах до 50 вершин из баз AP и CAB.

Робастный подход в [43], [37] отличается от подхода в [29], [30], авторы [43], [37] допускают случайное изменение значений фиксированного количества параметров, и находят наилучшее решение при наихудшем изменении параметров. Количество параметров, которые могут изменять своё значение, является мерой неопределенности. Такой подход не позволяет моделировать сложные взаимоотношения между значениями параметров.

2. Математическая модель

2.1. МОДЕЛЬ

Представленная ниже модель позволяет найти оптимальный план модернизации существующей транспортной системы. Под оптимальным планом модернизации понимается определение мест для строительства новых транспортных узлов, набора необходимых подъездных путей для каждого нового транспортного узла, пропускных способностей новых транспортных узлов и каждого подъездного пути к каждому из них. Кроме этого, модель позволяет получить оптимальное распределение грузовых потоков в модернизированной транспортной системе.

Модель описывает существующую транспортную систему, состоящую из транспортных узлов и потребителей транспортных услуг. Под потребителем транспортных услуг понимается, например, населенный пункт, который отправляет и принимает грузы через транспортный узел. Под подъездным путём транспортного узла понимается весь комплекс объектов, необходимых транспортному узлу для использования определенного вида транспорта. Клиент может использовать только те транспортные узлы, в которых построены подъездные пути, обеспечивающие использование одного из видов транспорта доступного клиенту. Необходимость модернизации транспортной системы может возникнуть по нескольким причинам, например:

- 1) транспортная система не может обеспечить удовлетворение транспортных потребностей в требуемом объеме;
- 2) прогнозируется значительное увеличение нагрузки на транспортную систему;
- 3) необходимо распространить транспортную систему на ранее необслуживаемую территорию.

Используются следующие предположения:

- 1) длина горизонта планирования известна заранее;
- 2) спрос на транспортные услуги и пропускные способности транспортных узлов и подъездных путей определяются для всего горизонта планирования;

3) места возможного размещения новых транспортных узлов, варианты подъездных путей и пропускных способностей этих узлов известны заранее;

4) для существующих транспортных узлов набор подъездных путей каждого узла остается неизменным на протяжении всего горизонта планирования;

5) в модернизированной транспортной системе грузопоток через каждый транспортный узел не должен превышать выбранной пропускной способности этого узла;

6) весь спрос потребителей на транспортные услуги должен быть удовлетворен.

Пусть

M количество клиентов (пунктов) в транспортной системе рассматриваемого региона, для каждого такого пункта могут существовать исходящие и входящие транспортные потоки,

T_j множество видов транспорта, которые могут быть использованы клиентом j , $j \in \overline{1, M}$, для грузовых перевозок,

N^{new} количество мест, подходящих для размещения в них новых транспортных узлов,

N^{exist} количество существующих транспортных узлов в регионе,

s_j ожидаемый спрос на транспортные услуги в пункте j , $j \in \overline{1, M}$, транспортной сети (суммарный грузопоток из пункта j до транспортных узлов в новой транспортной сети и от узлов до этого пункта),

ϵ_i число вариантов для выбора пропускной способности нового транспортного узла i , $i \in \overline{1, N^{new}}$,

$d_{i\mu}^{new}$ максимальная пропускная способность нового транспортного узла i при выборе варианта пропускной способности μ , $i \in \overline{1, N^{new}}$, $\mu \in \overline{1, \epsilon_i}$,

$d_{i'}^{exist}$ пропускная способность существующего транспортного узла i' , $i' \in \overline{1, N^{exist}}$,

L_i множество подъездных путей к новому транспортному узлу i , $i \in \overline{1, N^{new}}$, которые возможно построить в течении горизонта планирования,

$l_{i'}$ множество подъездных путей к существующему транспортному узлу i' , $i' \in \overline{1, N^{exist}}$, которые планируется обслуживать в течении горизонта планирования,

$Q_{i\mu}^{k\ new}$ пропускная способность подъездного пути k к новому транспортному узлу i при выборе варианта пропускной способности μ , $k \in L_i$, $\mu \in \overline{1, \epsilon_i}$, $i \in \overline{1, N^{new}}$.

$Q_{i'}^{k\ exist}$ пропускная способность подъездного пути k к существующему транспортному узлу i' , $k \in l_{i'}$, $i' \in \overline{1, N^{exist}}$.

$s_{ji}^{k\ new}$ величина грузопотока, который планируется перевезти между клиентом j и новым транспортным узлом i с помощью подъездного пути k , $j \in \overline{1, M}$, $i \in \overline{1, N^{new}}$, $k \in L_i \cap T_j$.

$s_{ji'}^{k\ exist}$ величина грузопотока, который планируется перевезти между клиентом j и существующим транспортным узлом i' с помощью существующего подъездного пути k , $j \in \overline{1, M}$, $i' \in \overline{1, N^{exist}}$, $k \in l_{i'} \cap T_j$.

$y_{i\mu}$ бинарная (Булевская) переменная, принимающая значение 1, если новый транспортный узел с вариантом пропускной способностью μ строится в вершине i , и принимает значение 0 в противном случае, $\mu \in \overline{1, \epsilon_i}$, $i \in \overline{1, N^{new}}$.

$z_{i\mu}^k$ бинарная (Булевская) переменная, принимающая значение 1, если строится подъездной путь k к транспортному узлу i с вариантом пропускной способности μ , и принимает значение 0 в противном случае, $\mu \in \overline{1, \epsilon_i}$, $i \in \overline{1, N^{new}}$, $k \in \overline{1, L_i}$.

Используя эти обозначения, множество допустимых планов модернизации существующей транспортной инфраструктуры может быть задано системой линейных ограничений:

$$(6) \quad \sum_{\mu=1}^{\epsilon_i} y_{i\mu} \leq 1, \forall i \in \overline{1, N^{new}},$$

$$(7) \quad \sum_{\mu=1}^{\epsilon_i} z_{i\mu}^k \leq 1, \forall i \in \overline{1, N^{new}}, k \in \overline{1, L_i},$$

$$(8) \quad \sum_{k=1}^{L_i} z_{i\mu}^k \leq L_i y_{i\mu}, \forall i \in \overline{1, N^{new}}, \mu \in \overline{1, \epsilon_i},$$

$$(9) \quad y_{i\mu} \leq \sum_{k=1}^{L_i} z_{i\mu}^k, \forall i \in \overline{1, N^{new}}, \mu \in \overline{1, \epsilon_i},$$

$$(10) \quad \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{L_i \cap T_j} s_{ji}^k \leq \sum_{\mu=1}^{\epsilon_i} y_{i\mu} d_{i\mu}^{new}, \forall i \in \overline{1, N^{new}},$$

$$(11) \quad \sum_{j=1, k \in T_j}^M s_{ji}^k \leq \sum_{\mu=1}^{\epsilon_i} z_{i\mu}^k Q_{i\mu}^{k, new}, \forall i \in \overline{1, N^{new}}, k \in \overline{1, L_i},$$

$$(12) \quad \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{l_{i'} \cap T_j} s_{ji'}^k \leq d_{i'}^{exist}, \forall i' \in \overline{1, N^{exist}},$$

$$(13) \quad \sum_{j=1, k \in T_j}^M s_{ji'}^k \leq Q_{i'}^{k, exist}, \forall i' \in \overline{1, N^{exist}}, k \in \overline{1, l_{i'}},$$

$$(14) \quad \sum_{i=1}^{N^{new}} \sum_{k=1}^{L_i \cap T_j} s_{ji}^k + \sum_{i'=1}^{N^{exist}} \sum_{k=1}^{l_{i'} \cap T_j} s_{ji'}^k = s_j, \forall j \in \overline{1, M},$$

$$(15) \quad s_{ji}^k \geq 0, \forall i \in \overline{1, N^{new}}, k \in L_i \cap T_j, j \in \overline{1, M},$$

$$(16) \quad s_{ji'}^k \geq 0, \forall i' \in \overline{1, N^{exist}}, k \in l_{i'} \cap T_j, j \in \overline{1, M},$$

$$(17) \quad y_{i\mu} \in \{0, 1\}, \forall \mu \in \overline{1, \epsilon_i}, i \in \overline{1, N^{new}},$$

$$(18) \quad z_{i\mu}^k \in \{0, 1\}, \forall \mu \in \overline{1, \epsilon_i}, i \in \overline{1, N^{new}}, k \in \overline{1, L_i}.$$

Ограничения (6)-(18) имеют следующий смысл: (6) для каждого нового транспортного узла может быть выбран только один вариант пропускной способности; (7) для каждого подъездного пути может быть выбран только один вариант пропускной способности; (8) подъездные пути могут выбираться только для новых транспортных узлов; (9) элси транспортный узел предполагается строить, то для него должен быть выбран хотя бы один подъездной путь; (10) грузопоток через новый транспортный узел не должен превышать выбранный уровень пропускной способности этого транспортного узла, (11) грузопоток через подъездной путь к новому транспортному узлу не должен превышать пропускную способность этого подъездного пути, соответствующую выбранному варианту пропускной способности транспортного узла; (12)

грузопоток через существующий транспортный узел не должен превышать пропускную способность этого узла; (13) грузопоток через подъездной путь к существующему транспортному узлу не должен превышать пропускную способность этого подъездного пути; (14) весь спрос клиентов на транспортные услуги должен быть удовлетворен; (15)-(18) ограничения на неотрицательность действительных и значения булевских переменных.

Пусть $v = (s^{new}, s^{exist}, y, z)$, а $Av \leq a$ описывает систему ограничений (6)-(14). Тогда выпуклый многогранник Π , задаваемый этой системой ограничений, может быть записан как

$$\Pi = \{v | Av \leq a\},$$

а множество V , задаваемое ограничениями (6)-(18), может быть записано как

$$V = \Pi \cap (S \times Y \times Z),$$

где

$$S = \{(s^{new}, s^{exist}) \in R_+^{\sum_{i=1}^{N^{new}} |L_i \cap T_j| + \sum_{i'=1}^{N^{exist}} |l_{i'} \cap T_j|}\},$$

$$Y = \{\{0, 1\}^{\sum_{i=1}^{N^{new}} \epsilon_i}\},$$

$$Z = \{\{0, 1\}^{\sum_{i=1}^{N^{new}} \epsilon_i |L_i|}\}.$$

2.2. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве целевой функции оптимизационной задачи в настоящей работе предлагается минимизировать сумму всех издержек. В эту сумму включены стоимость перевозки грузов от клиентов к транспортным узлам и от узлов к клиентам, стоимость строительства новых узлов и подъездных путей к ним.

Пусть

$t_{ji}^{k, new}$ средняя стоимость транспортировки единицы груза между клиентом j и новым транспортным узлом i с помощью подъездного пути k , $j \in \overline{1, M}$, $i \in \overline{1, N^{new}}$, $k \in L_i \cap T_j$,

$t_{ji'}^{k, exist}$ средняя стоимость транспортировки единицы груза между клиентом j и существующим транспортным узлом i' с помощью подъездного пути k , $j \in \overline{1, M}$, $i' \in \overline{1, N^{exist}}$, $k \in l_{i'} \cap T_j$,

$f_{i\mu}$ стоимость строительства нового транспортного узла в вершине i с вариантом пропускной способностью μ , $\mu \in \overline{1, \epsilon_i}$, $i \in \overline{1, N^{new}}$,

$g_{i\mu}^k$ стоимость строительства подъездного пути k к новому транспортному узлу i с вариантом пропускной способностью μ , $\mu \in \overline{1, \epsilon_i}$, $i \in \overline{1, N^{new}}$, $k \in \overline{1, L_i}$.

Тогда суммарные издержки связанные с транспортировкой грузов можно записать как:

$$\sum_{i'=1}^{N^{exist}} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{l_{i'} \cap T_j} t_{j i'}^k \text{ exist } s_{j i'}^k \text{ exist} + \sum_{i=1}^{N^{new}} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{L_i \cap T_j} t_{j i}^k \text{ new } s_{j i}^k \text{ new}.$$

Издержки, связанные со строительством новых транспортных узлов и подъездных путей можно записать как:

$$\sum_{i=1}^{N^{exist}} \sum_{\mu=1}^{\epsilon_i} f_{i\mu} y_{i\mu} + \sum_{i=1}^{N^{new}} \sum_{k=1}^{L_i} \sum_{\mu=1}^{\epsilon_i} g_{i\mu}^k z_{i\mu}^k.$$

Сама же задача нахождения оптимального размещения новых транспортных узлов с подъездными путями записывается в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{i'=1}^{N^{exist}} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{l_{i'} \cap T_j} t_{j i'}^k \text{ exist } s_{j i'}^k \text{ exist} + \sum_{i=1}^{N^{new}} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{L_i \cap T_j} t_{j i}^k \text{ new } s_{j i}^k \text{ new} + \\ & \sum_{i=1}^{N^{exist}} \sum_{\mu=1}^{\epsilon_i} f_{i\mu} y_{i\mu} + \sum_{i=1}^{N^{new}} \sum_{k=1}^{L_i} \sum_{\mu=1}^{\epsilon_i} g_{i\mu}^k z_{i\mu}^k \rightarrow \min_{(s^{new}, s^{exist}, f, g) \in V}. \end{aligned}$$

Если ввести обозначение

$$c = (t^{new}, t^{exist}, f, g),$$

то эта задача смешанного программирования записывается как

$$\min_{v \in V} \langle c, v \rangle.$$

2.3. РОБАСТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При разработке проектов модернизации грузовой транспортной инфраструктуры региона не вся информация, необходимая для решения оптимизационной задачи, сформулированной выше, может быть доступна для ЛППР. В частности, в виду того, что процессы составления и утверждения плана модернизации транспортной системы, а также строительства и ввода в эксплуатацию новых транспортных узлов сильно растянуты во времени, сложно спрогнозировать точную стоимость строительства транспортных узлов и подъездных путей, а также стоимости транспортировки грузов между клиентами и узлами разными видами транспорта.

В настоящей статье для работы с неизвестными ценами реализован робастный подход.

Хотя спрогнозировать точные значения цен практически невозможно, представляется возможным оценить такие величины как: интервалы значений цен, интервалы для средних значений цен по различным группам (труд, материалы, транспортировка), отношения различных цен друг к другу. В виду этого ниже представлена робастная модель, которая позволяет решить рассматриваемую задачу в условиях, когда сами цены (стоимость строительства узлов и подъездных путей, стоимость транспортировки) не известны, но известно допустимое множество цен, заданное линейными ограничениями.

В результате решения робастной задачи находится оптимальное гарантированное решение задачи, то есть решение, гарантирующее результат не хуже найденного при любых значениях цен из допустимого множества.

Множество допустимых цен может быть задано системой следующих линейных ограничений:

1) Ограничения на значения самих переменных, например

$$(19) \quad \underline{t_{ji}^k} \leq t_{ji}^k \leq \overline{t_{ji}^k},$$

$$(20) \quad \underline{t_{j'i'}^k} \leq t_{j'i'}^k \leq \overline{t_{j'i'}^k},$$

$$(21) \quad \underline{f_{i\mu}} \leq f_{i\mu} \leq \overline{f_{i\mu}},$$

$$(22) \quad \underline{g_{i\mu}^k} \leq g_{i\mu}^k \leq \overline{g_{i\mu}^k}.$$

2) Ограничения на среднее значение по группам переменных, например

а) По типам переменных, например

$$(23) \quad \underline{p_1} \leq \sum_{i'=1}^{N^{exist}} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{L_i \cap T_j} t_{j'i'}^k \leq \overline{p_1},$$

$$(24) \quad \underline{p_2} \leq \sum_{i=1}^{N^{new}} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{L_i \cap T_j} t_{ji}^k \leq \overline{p_2},$$

$$(25) \quad \underline{p_3} \leq \sum_{i=1}^{N^{new}} \sum_{\mu=1}^{\epsilon_i} f_{i\mu} \leq \overline{p_3},$$

$$(26) \quad \underline{p_4} \leq \sum_{i=1}^{N^{new}} \sum_{k=1}^{L_i} \sum_{\mu=1}^{\epsilon_i} g_{i\mu}^k \leq \overline{p_4}.$$

б) По видам транспорта, например

$$(27) \quad \underline{p_5^k} \leq \sum_{i'=1, k \in L_{i'}}^{N^{exist}} \sum_{j=1, k \in T_j}^M t_{j'i'}^k + \sum_{i=1, k \in L_i}^{N^{new}} \sum_{j=1, k \in T_j}^M t_{ji}^k \leq \overline{p_5^k}.$$

3) Ограничения на отношения между ценами, например

а) Между парами цен, например

$$(28) \quad \underline{p_6} t_{j'i'}^{k+1} \leq t_{j'i'}^k \leq \overline{p_6} t_{j'i'}^{k+1},$$

$$(29) \quad \underline{p_7} t_{ji}^{k+1} \leq t_{ji}^k \leq \overline{p_7} t_{ji}^{k+1}.$$

б) Между группами, например

$$(30) \quad t_{ji}^k \leq t_{jl}^k + t_{li}^k.$$

Здесь \underline{t}^{new} , \underline{t}^{exist} , \underline{f} , \underline{g} , $\underline{p_1}$, $\underline{p_2}$, $\underline{p_3}$, $\underline{p_4}$, $\underline{p_5^k}$, $\underline{p_6}$, $\underline{p_7}$ минимальные допустимые, а \overline{t}^{new} , \overline{t}^{exist} , \overline{f} , \overline{g} , $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$, $\overline{p_3}$, $\overline{p_4}$, $\overline{p_5^k}$, $\overline{p_6}$, $\overline{p_7}$ максимальные допустимые значения соответствующих величин.

Обозначим множество всех допустимых цен как

$$C = \{c | c \geq 0, Bc \leq b\},$$

где $Bc \leq b$ описывает ограничения (19)-(30). С использованием этих обозначений робастная задача может быть записана в виде:

$$\max_{c \in C} \langle c, v \rangle \rightarrow \min_{v \in V}.$$

Эта задача минимаксной оптимизации. С помощью метода, представленного в [1], она может быть преобразована в задачу смешанного математического программирования:

$$\min_{v \in V} \max_{c \in C} \langle c, v \rangle = \min_{v \in V, v - uB \leq 0} \langle b, u \rangle,$$

которая может быть решена с использованием стандартного программного обеспечения.

3. Пример

3.1. ОПИСАНИЕ ДАННЫХ

Для тестирования предложенной модели были использованы данные о транспортной системе части России, которая включает 197 города и три вида транспорта: автомобильный, железнодорожный и авиатранспорт. Используется информация

- О расстоянии между рассматриваемыми городами по автомобильным дорогам, по железнодорожным путям, по геодезической (данные собраны из открытых источников),
- О средней стоимости транспортировки тонны груза на один километр автомобильным, железнодорожным и авиатранспортом (данные получены из анализа прайс листов нескольких логистических компаний),
- Об объёме выпуска продукции в городах (объёмы оценены при помощи данных Росстата),

- О стоимости строительства транспортных узлов различных мощностей (величины оценены при помощи анализа существующих аналогичных проектов),
- О стоимости строительства подъездных путей для разных видов транспорта и разных пропускных способностей (величины оценены при помощи анализа существующих аналогичных проектов).

Основные параметры модели имеют следующие значения:

1) Количество клиентов (городов) (M) равно 197,

2) Множество видов транспорта, которые могут быть использованы клиентом j ($T_j, j \in \overline{1, 197}$), определяется для каждого города индивидуально, в зависимости от его транспортной инфраструктуры,

3) Количество существующих транспортных узлов (N^{exist}) 15 (Волгоград, Воронеж, Екатеринбург, Казань, Красноярск, Москва, Нижний Новгород, Новосибирск, Омск, Пермь, Ростов-на-Дону, Самара, Санкт-Петербург, Уфа, Челябинск),

4) Количество мест, подходящих для размещения транспортных узлов, (N^{new}) 11 (Барнаул, Владивосток, Ижевск, Иркутск, Краснодар, Саратов, Тольятти, Тюмень, Ульяновск, Хабаровск, Ярославль),

5) Ожидаемый спрос на транспортные услуги в тоннах в городе j ($s_j, j \in \overline{1, 197}$) определен на основании статистических данных о стоимости продукции произведенной в конкретном городе,

6) Число вариантов для выбора пропускной способности нового транспортного узла i ($\epsilon_i, i \in \overline{1, N^{new}}$) для всех новых узлов одинаково и равно 3 («маленькие», «средние», «большие»).

Решались примеры задачи в оптимизационной постановке

$$\min_{v \in V} \langle c, v \rangle$$

и в робастной постановке

$$\min_{v \in V} \max_{c \in C} \langle c, v \rangle.$$

Множество V задается ограничениями (6)-(18), для задания множества допустимых цен C были использованы ограничения (19)-(27) (ограничения на значения издержек и на значение средних величин).

3.2. ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Все вычисления проводились на ноутбуке под управлением операционной системы Windows (Core i7-3630QM, 8 ГБ ОЗУ). Программа для подготовки входных данных и нахождения оптимального решения оптимизационной и робастной задачи была написана в среде Matlab. Для отыскания оптимальных планов модернизации использована встроенная функция *intlinprog*.

В таблицах 1 и 2 представлены полученные решения оптимизационной и робастной задач соответственно. Расчеты производились для различных значений спроса на транспортные услуги (80%, 100% и 120% от объема спроса, оцененного при помощи данных Росстата), значения доли спроса для конкретного примера задачи указаны в столбце « D ».

В блоке столбцов «Новые ТУ» перечислены номера новых транспортных узлов, решение о постройке которых принято в результате решения соответствующего экземпляра задачи. В столбцах «S», «M» и «L» записаны номера «маленьких», «средних» и «больших» новых транспортных узлов соответственно.

В блоке столбцов «Новые ПП» отражены подъездные пути, которыми должны обладать новые транспортные узлы из блока «Новые ТУ». В столбцах «Auto», «Rail» и «Air» перечислены номера новых транспортных узлов, к которым должны быть построены автомобильные, железнодорожные и авиационные подъездные пути соответственно.

В столбцах « C_T », « C_B » и « C » указаны суммарные издержки на транспортировку, строительство и сумма всех издержек соответственно. Значения указаны в миллиардах рублей. Дополнительно в таблице 2 в этих столбцах указаны относительные изменения издержек робастной задачи по отношению к соответствующим издержкам аналогичного примера оптимизационной задачи (в процентах).

Таблица 1. Результаты решения оптимизационной задачи.

D	Новые ТУ			Новые ПП			C_T	C_B	C
	S	M	L	Auto	Rail	Air			
80%	3,5, 6,7, 9,10	11		3,5, 6,7, 9,10, 11	3,5, 6,7, 9,10, 11		583	61	644
100%	2,4 8,10	3,5, 6,7, 9	11	2,3,4, 5,6,7, 8,9, 10,11	3,5,6, 7,8,9, 11	4, 10	729	152	881
120%	2,4, 10	8	3,5, 6,7, 9, 11	2,3,4, 5,6,7, 8,9, 10,11	3,4,5, 6,7,8, 9,10, 11	2,3, 4,5, 6, 10	908	254	1162

Таблица 2. Результаты решения робастной задачи.

D	Новые ТУ			Новые ПП			C_T	C_B	C
	S	M	L	Auto	Rail	Air			
80%	3,5, 6,7, 9, 10	11		3,5, 6,7, 9,10, 11	3,5, 6,7, 9,10, 11		816 40%	86 40%	902 40%
100%	2,4 8, 10	3, 5, 7, 9	6, 11	2,3,4, 5,6,7, 8,9, 10,11	3,5, 6,7, 8,9, 11	4, 10	1004 38%	195 28%	1199 36%
120%	2,4, 10		3,5, 6,7, 8,9, 11	2,3,4, 5,6,7, 8,9, 10,11	3,5, 6,7, 8,9, 10,11	3,4, 5,6 8, 10	1253 38%	291 15%	1544 33%

При анализе полученных решений можно заметить, что

1) Значение издержек (транспортных, строительных, суммарных) в решениях робастной задачи, несмотря на одинаковые средние значения параметров, выше соответствующих значений издержек в оптимизационной задаче. Это соответствует оценке наилучшего возможного сценария,

2) Несмотря на то, что планы модернизации (список новых транспортных узлов и подъездных путей для постройки), полученные при решении оптимизационной и робастной задач, похожи, они не идентичны (для доли спроса 100% и 120%) и отличаются как в рекомендованных размерах новых транспортных узлов, так и в рекомендованных подъездных путях к ним. Таким образом, рассмотрение робастной задачи вместо оптимизационной позволяет не только реалистичнее оценить издержки, но и получить более надежный вариант плана модернизации,

3) С ростом спроса и, соответственно, увеличением размеров проекта модернизации транспортной системы относительная разница между итоговыми издержками в решениях оптимизационной и робастной задачах снижается. Например, для значения доли спроса 80% итоговые издержки в робастной задаче на 40% больше итоговых издержек в оптимизационной задаче, в то время как для значения доли спроса 120% разница составляет всего 33%. Из этого следует вывод о том, что более крупный проект менее чувствителен к изменениям цен. Этот факт может быть объяснен тем, что в крупных проектах задействовано большее количество объектов (транспортных узлов, связей клиент-узел), и, соответственно, изменение цен на часть объектов не так сильно сказывается на общей стоимости проекта.

Проведенное тестирование показало, что рассматриваемые в работе задачи даже для большой транспортной системы могут быть решены за разумное время (несколько минут) даже на персональном компьютере.

4. Заключение

В работе рассмотрена задача размещения новых транспортных узлов с подъездными путями в географическом регионе с существующей транспортной системой. Такая задача возникает у руководства региона в ситуации, когда существующая транспортная система требует модернизации. Представлена классификация моделей используемых при решении подобных задач и обзор современных работ, посвящённых этой задаче.

Для формализации рассматриваемой задачи предложена математическая модель, позволяющая учитывать а) наличие существующей транспортной системы региона, б) возможность использования различных видов транспорта и в) возможность выбора оптимальных пропускных способностей для новых транспортных узлов.

На основе представленной модели были сформулированы оптимизационная и робастная задачи. Задача в оптимизационной постановке позволяет найти оптимальное размещение новых транспортных узлов и схему грузопотоков в модернизированной транспортной системе в случае известных цен (на транспортировку и строительство). Задача в робастной постановке позволяет найти размещение этих узлов и грузопотоков, обеспечивающие наилучший гарантированный результат в ситуации, когда точные значения цен не известны.

Обе сформулированные задачи были протестированы на собранных автором данных о транспортной системе части России. Тестирование показало адекватность получаемых решений и доказало возможность применения представленной модели к крупным транспортным системам.

В качестве направлений для дальнейших исследований можно выделить два основных направления. Первое направление связано с усовершенствованием программы для отбрасывания заведомо не используемых связей клиентов с транспортными узлами, такое отбрасывание позволит снизить количество переменных в экземпляре задачи и дополнительно увеличит точность робастно-

го решения. Второе направление связано с рассмотрением целевых функций отражающих не издержки, но и прибыль региона или транспортных компаний от модернизации транспортной системы.

Литература

1. БЕЛЕНЬКИЙ А.С. *Минимаксные задачи планирования с линейными ограничениями и методы их решения* // Автоматика и телемеханика. - 1981. - № 10. - С. 157–170.
2. ADIBI A., RAZMI J. *2-Stage stochastic programming approach for hub location problem under uncertainty: A case study of air network of Iran* // Journal of Air Transport Management. - 2015. - № 47. - С. 172-178.
3. ALUMUR S.A., KARA B.Y. *Network hub location problems: The state of the art* // European Journal of Operational Research. - 2008. - № 190. - С. 1–21.
4. ALUMUR S.A., KARA B.Y., KARASAN O.E. *Multimodal hub location and hub network design* // Omega. - 2012. - № 40. - С. 927–939.
5. AYKIN T. *The hub location and routing problem* // European Journal of Operational Research. - 1995. - № 83. - С. 200-219.
6. BELENKY A., FEDIN G., KORNHAUSER A. *An example of the application of a robust approach to choosing an optimal regional freight transportation infrastructure* // ITEA 2017 Programme., Barcelona, - 2017.
7. BELENKY A., FEDIN G., KORNHAUSER A. *Robust mathematical models associated with negotiating financial investments in large-scale transportation projects* // IFORS 2017 Technical Program., Quebec - 2017. - С. 115.
8. CAMPBELL J.F. *Integer programming formulations of discrete hub location problems* // European Journal of Operational Research. - 1994. - № 72. - С. 387-405.
9. CHEN J.F. *A hybrid heuristic for the uncapacitated single allocation hub location problem* // Omega. - 2007. - № 35. - С. 211–220.

10. CONTRERAS I., FERNANDEZ E., MARIN A. *The Tree of Hubs Location Problem* // European Journal of Operational Research. - 2010. - № 202. - С. 390–400.
11. CONTRERAS I., CORDEAU J.-F., LAPORTE G. *Stochastic uncapacitated hub location* // European Journal of Operational Research. - 2011. - № 212. - С. 518-528.
12. CONTRERAS I. *Hub location problems* // Location Science, Laporte G., Saldanha da Gama F., Nickel S. eds., Springer., 2015. – С. 311-344.
13. CORREIA, I., NICKE S., SALDANHA-DA-GAMA F. *Hub and spoke network design with single-assignment, capacity decisions and balancing requirements* // Applied Mathematical Modelling. - 2011. - № 35. - С. 4841–4851.
14. CORREIA, I., NICKE S., SALDANHA-DA-GAMA F. *A stochastic multi-period capacitated multiple allocation hub location problem: Formulation and inequalities* // Omega. - 2017. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2017.01.011>
15. COSTA, M.G., CAPTIVO M.E., CLIMACO J. *Capacitated single allocation hub location problem – a bi-criteria approach* // Computers & Operations Research. - 2008. - № 35(11). - С. 3671-3695.
16. DASKIN M., MAAS K. *The p-Median Problem* // Location Science, Laporte G., Saldanha da Gama F., Nickel S. eds., Springer., 2015. – С. 21-46.
17. ERNST T.A., KRISHNAMOORTHY M. *Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem* // Location Science. - 1996. - № 4(3). - С. 139-154.
18. FARAHANI R., HEKMATFAR M., ARABANI A., NEKBAKHS E. *Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications* // Computer & Industrial Engineering. - 2013. - № 64. - С. 1096-1109.
19. FEDIN G., BELENKY A., KORNHAUSER A. *Mixed programming problems of optimally allocating and scheduling the openings of transport hubs and access roads to them in*

- a geographic region //EURO 2016 Conference Handbook., Poznan, - 2016.*
20. GAO Y., QIN Z. *A chance constrained programming approach for uncertain p-hub center location problem // Computers & Industrial Engineering.* - 2016. - № 102. - С. 10-20.
 21. GAREY M., JOHNSON D. *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness // San Francisco : W.H. Freeman and Co., 1979.* – С. 109–120.
 22. HAKIMI S. *Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph // Operations research.* - 1964. - № 12. - С. 450-459.
 23. HALUK D., DERYA D., NUR E.O., CEM I. *A genetic algorithm for the uncapacitated single allocation planar hub location problem // Computers & Operations Research.* - 2015. - № 62. - С. 224-236.
 24. HOFF A., PEIRO J., CORBERAN A., MARTI R. *Heuristics for the capacitated modular hub location problem // Computers & Operations Research.* - 2017. - № 86. - С. 94-109.
 25. JANKOVIC O., STANIMIROVIC Z. *A general variable neighborhood search for solving the uncapacitated r-allocation p-hub maximal covering problem // Electronic Notes in Discrete Mathematics.* - 2017. - № 58. - С. 23–30.
 26. KARA B.Y., TANSEL B.C. *On the single assignment p-hub center problem // European Journal of Operational Research.* - 2000. - № 125(3). - С. 648–655.
 27. KARA B.Y., TANSEL B.C. *The single-assignment hub covering problem: Models and linearizations // Journal of the Operational Research Society.* - 2003. - № 54(1). - С. 59–64.
 28. MARTINS E., CONTRERAS I., CORDEAUC J.-F. *Exact and heuristic algorithms for the design of hub networks with multiple lines // European Journal of Operational Research.* - 2015. - № 246. - С. 186–198.
 29. MERAKLI M., YAMAN H. *Robust intermodal hub location under polyhedral demand uncertainty // Transportation*

- Research Part B. - 2016. - № 86. - С. 66-85.
30. MERAKLI M., YAMAN H. *A capacitated hub location problem under hose demand uncertainty* // Computers & Operations Research. - 2017. - № 88. - С. 58-70.
 31. O'KELLY M. *A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities* // Transportation Science. - 1986. - № 20. - С. 92–106.
 32. O'KELLY M. *The location of interacting hub facilities* // European Journal of Operational Research. - 1987. - № 32. - С. 393–404.
 33. PEIRO J., CORBERAN A., MARTI R. *GRASP for the uncapacitated r -allocation p -hub median problem* // Computers & Operations Research. - 2014. - № 43. - С. 50-60.
 34. REVELLE C., SWAIN R. *Central facilities location* // Geographical Analysis. - 1970. - № 2. - С. 30-42.
 35. SERPER E., ALUMUR S. *The design of capacitated intermodal hub networks with different vehicle types* // Transportation Research Part B. - 2016. - № 86. - С. 51-65.
 36. SILVA M.R., CUNHA C.B. *A tabu search heuristic for the uncapacitated single allocation p -hub maximal covering problem* // European Journal of Operational Research. - 2017. - № 262. - С. 954–965.
 37. TALBI E-G., TODOSIJEVIC R. *The robust uncapacitated multiple allocation p -hub median problem* // Computers & Industrial Engineering. - 2017. - № 110. - С. 322–332.
 38. TANASH M., CONTRERAS I., VIDYARTHI N. *An exact algorithm for the modular hub location problem with single assignments* // Computers & Industrial Engineering. - 2017. - № 85. - С. 32–44.
 39. WAGNER B. *Model formulations for hub covering problems* // Journal of the Operational Research Society. - 2008. - № 59. - С. 932-938.
 40. YAMAN H. *Star p -hub median problem with modular arc capacities* // Computers and Operations Research. - 2008. - № 35(9). - С. 3009–3019.

41. YAMAN H., ELLOUMI S. *Star p-hub center problem and star p-hub median problem with bounded path lengths* // Computers and Operations Research. - 2012. - № 39(11). - С. 2725–2732.
42. YANG K., YANG L., GAO Z. *Planning and optimization of intermodal hub-and-spoke network under mixed uncertainty* // Transportation Research Part E. - 2016. - № 95. - С. 248-266.
43. ZETINA C.A., CONTRERAS I., CORDEAU J.-F., NIKBAKHS E. *Robust uncapacitated hub location* // Transportation Research Part B. - 2017. <http://dx.doi.org/10.1016/j.trb.2017.06.008>

APPLYING THE ROBUST APPROACH FOR THE TRANSPORTATION HUBS WITH ACCESS ROADS LOCATION PROBLEM IN THE GEOGRAPHICAL REGION WITH EXISTING TRANSPORTATION SYSTEM

Gennadii Fedin, National Research University Higher School of Economics, Moscow, PhD student, Research Assistant (gfedin@hse.ru).

Abstract: This paper presents the problem of locating transportation hubs with access roads to them in a regional transportation system. There are only a few articles in the Russian scientific literature, where problems close to those considered in this paper are formulated and solved mathematically, whereas in foreign scientific literature close problems are intensively studied. The goals of this paper are: 1) to classify formulations of various transportation hubs location problems, 2) to review most recent foreign scientific papers considering these problems, 3) to formulate the problem of locating hubs and choosing access roads as a mixed-integer linear programming problem and robust optimization one, 4) to test proposed model on a transportation system of a part of Russia.

Keywords: transportation infrastructure modernization, transport hubs, robust optimization, mathematical programming.