УДК 519.833.2
ББК 22.18

РАВНОВЕСИЕ В БЕЗОПАСНЫХ СТРАТЕГИЯХ В МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ ХОТЕЛЛИНГА

Искаков М.Б.[1], Павлов П.А.[2]
*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)*

Задача пространственной конкуренции была сформулирована в 1929 году Хотеллингом. Это модель игрового двухшагового взаимодействия участников, в котором их стратегиями являются, во-первых, определение расположения своих торговых точек в пространстве и, во-вторых, установление цен на товар. В задаче не для всех случаев местоположения существует равновесие Нэша в игре определения цен. Для исследования таких случаев предлагается использовать равновесие в безопасных стратегиях, что позволяет полностью решить игровую задачу. Рассмотрен нетривиальный частный случай повышения цен на пространственном рынке при переходе от монополии к дуополии.

Ключевые слова: теория игр, равновесие в безопасных стратегиях, пространственная конкуренция Хотеллинга.

1. Введение

Статья посвящена исследованию классической задачи пространственно распределенной конкуренции, поставленной Хотеллингом в 1929 году [11]. Основной предпосылкой появле-

[1] *Михаил Борисович Искаков, кандидат технических наук (mih_iskakov@mail.ru)*
[2] *Павел Алексеевич Павлов, аспирант (pashapavlov@gmail.com)*

ния модели пространственно распределенной конкуренции стало наблюдение, что на большом рынке, где один покупатель приобретает товар у одного продавца, а другой у иного, выбор зависит не только от цены. Причинами такого эффекта могут служить множество факторов, которые влияют на характер конкуренции и на поведение, как покупателей, так и продавцов. Одним из важнейших факторов является пространственное расположение продавцов и покупателей и вытекающие из этого транспортные издержки. Модель Хотеллинга описывает поведение участников рынка на которых влияют два фактора: цены и затраты на перевозку товара.

Основная сложность, обнаружившаяся при исследовании модели – отсутствие равновесия Нэша в игре установления цен для многих случаев расположения магазинов продавцов, предлагающих товар [9]. При дальнейших исследованиях модели разными авторами был получен ряд как положительных, так и отрицательных результатов. Отрицательные результаты сводились к доказательству несуществования равновесия Нэша в различных вариантах модели [8, 9]. Положительные результаты были получены на разных путях: модификации функции транспортных издержек, при которой игра цен всегда имеет равновесное положение [9], решение игровой задачи в смешанных стратегиях [12], введение «эффекта сноба», при котором предпочтения покупателей зависят от объема продаж магазинов [7].

В предлагаемой статье в качестве игры цен для тех случаев, в которых не существует равновесия Нэша, берется простое равновесие в безопасных стратегиях (РБС) [4, 6], которое для рассматриваемой задачи существует всегда. Такой подход подкрепляется тем, что игровой смысл РБС, заключающийся в стремлении игроков к увеличению своего выигрыша, но при условии своей безопасности относительно действий других игроков, полностью соответствует естественной логике поведения участников моделируемой ситуации. Применяемое доопределение равновесного состояния позволяет получить решение игровой задачи по обоим параметрам стратегии – местоположению и ценам – и попутно обнаружить интересные эффекты, возникающие в частных случаях игры пространственной конкуренции.

2. Постановка задачи

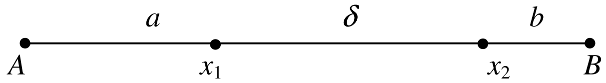

Рис.1 Расположение игроков-продавцов на отрезке

Рассматривается отрезок $[A, B]$ длины l, это может быть улица в городе, береговая линия или автомагистраль. На нем расположены покупатели с некоторой постоянной плотностью, которую без потери общности можно считать единичной. На расстоянии a и b от концов отрезка в точках $x_1, x_2 (x_1 \le x_2)$ расположены магазины игроков 1 и 2, предлагающие одинаковый товар по ценам p_1, p_2. Расстояние между магазинами обозначается $\delta = l - a - b$. Каждый покупатель тратит на транспортировку товара до дома некоторую цену на единицу длины, которая, также без потери общности, считается единичной. Единица товара потребляется в каждую единицу времени в каждой точке отрезка, то есть спрос является абсолютно неэластичным. Все потребители не имеют никаких предпочтений по выбору продавца, кроме как по сумме стоимости товара и затрат на транспортировку. Таким образом, объемы проданного товара q_1, q_2 равны длине отрезков, на которых расположены покупатели, выбравшие тот или иной магазин.

Исследуется равновесие, совершенное по подыграм в динамической игре, которая проходит в три шага:

Шаг 1. Продавцы определяют точки своего расположения $x_1, x_2 (x_1 \le x_2)$.

Шаг 2. Продавцы определяют цену на свой товар p_1, p_2.

Шаг 3. Покупатели выбирают продавца, у которого они покупают единицу товара.

Целевая функция покупателя:

$$(1)\quad u(x) = u_0 - \min_{i\in\{1,2\}} (p_i + |\, x_i - x \,|)$$

где x – точка расположения покупателя, а u_0 – полезность товара для покупателя, которая без ограничения общности может считаться единичной. Возможны два варианта постановки задачи. В первом каждый покупатель обязательно покупает единицу товара, даже если при этом его целевая функция становится отрицательной. В большей части работ рассматривается именно этот случай. Во втором случае покупатель отказывается от приобретения товара, если это для него убыточно.

Для первого варианта постановки задачи целевая функция игрока-продавца 1:

$$(2)\quad u_1(x_1, x_2, p_1, p_2) = p_1 q_1 = \begin{cases} p_1 l, & p_1 < p_2 - \delta \\ p_1\left(a + \dfrac{\delta + p_2 - p_1}{2}\right), & |\, p_1 - p_2 \,| \le \delta \\ 0, & p_1 > p_2 + \delta \end{cases}$$

В зависимости от назначенных цен для игрока 1 может реализоваться один из трех случаев: полный захват рынка, установление конкурентного сосуществования, потеря рынка. Целевая функция игрока 2 выписывается симметрично. Несколько более сложные целевые функции игроков для второго случая постановки задачи будут приведены ниже.

3. Обзор полученных ранее результатов

К моменту постановки задачи Хотеллингом в 1929 году [11] теории игрового равновесия Нэша еще не существовало, поэтому равновесная ситуация искалась из простых логических соображений. Была найдена такая точка границы между областями двух конкурирующих магазинов x, что для находящегося в ней покупателя безразличен выбор того или иного продавца:

(3) $$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2}$$

Далее было получено выражение для целевых функций продавцов, их производные по ценам были приравнены нулю, и в результате найдены равновесные значения:

(4) $$\begin{gathered} p_1 = l + \frac{a-b}{3}, \quad p_2 = l - \frac{a-b}{3}, \\ q_1 = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a-b}{3}\right), \quad q_2 = \frac{1}{2}\left(l - \frac{a-b}{3}\right). \end{gathered}$$

Хотеллинг в своей статье нашел решение, являющееся оптимальным, но не исследовал, при каких условиях локальное равновесие является глобальным. На протяжении пятидесяти лет не было почти никаких работ, посвященных данной теме. Большинство последующих работ можно разделить на две группы: 1) поиск равновесий для базовой модели и исследование поведения игроков в тех областях, где равновесие отсутствует; 2) модификации модели с целью описания более сложного поведения участников рынка. Необходимо отметить, что в большинстве публикаций разбирается модель дуополии на отрезке ввиду резкого усложнения задачи при увеличении размерности (количества игроков).

В работе [9], посвященной полностью модели Хотеллинга, опровергается результат, полученный в 1929 году, для некоторых случаев. Также приведена измененная модель, в которой равновесие по подыграм существует всегда. Сформулировано и доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Для* $a + b = l$ *существует единственное равновесие* $p_1 = p_2 = 0$. *Для* $a + b < l$ *точка равновесия существует тогда и только тогда, когда:*

(5) $$\left(l + \frac{a-b}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3} l(a + 2b), \quad \left(l + \frac{b-a}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3} l(b + 2a)$$

и в данном равновесии:

(6) $p_1 = l + \frac{a-b}{3}, \quad p_2 = l - \frac{a-b}{3}$.

Если же изменить функцию транспортных издержек с x на x^2, тогда равновесие в подыгре определения цен существует всегда и задача имеет решение.

В работе [12] рассматривается модификация задачи Хотеллинга, когда стратегией производителя является интервал цен с плотностью вероятности выбора каждого значения. Пусть (F_1, F_2) – равновесие, где F_i – функция распределения цены каждого игрока, и пусть a_i, b_i – наименьшая и наибольшая цена из данного распределения. Определяется равновесие T как такое, для которого $b_i - a_i \le 2\delta$. Доказывается утверждение о том, что в двухшаговой игре производителей, со стратегиями по местоположениям и ценам, любое равновесие является равновесием типа T по ценам, и есть как минимум одно такое равновесие.

В работе [8] доказано, что если игроки определяют местоположение и цену не в 2 шага, а одновременно, то равновесие не существует.

В [7] в модель вводится «эффект сноба», при котором в целевую функцию покупателя вводится дополнительная отрицательная полезность, зависящая от объема продаж выбранного магазина:

(7) $-u(x) = p_i + |x_i - x| + kq_i$

При этом покупатель должен при выборе прогнозировать объем продаж производителей. Найдены уникальные выпуски товаропроизводителями q_i при фиксированных x_i, p_i. На отрезке $[A, B]$ определены регионы с различными предпочтениями покупателей по выбору производителя.

4. Постановка задачи при неотрицательных выигрышах покупателя

В данной статье исследуется постановка задачи с неотрицательной полезностью покупателя. Целевая функция покупателя:

$$(8)\quad u(x) = \max\{0, 1 - \min_{i\in\{1,2\}}(p_i + |x_i - x|)\}$$

Для такого варианта постановки задачи при выписывании целевых функций продавцов более удобным будет сначала рассмотреть игру установления цен в пространственной конкуренции неотрицательной полезности покупателей на прямой $(A = -\infty, B = \infty)$. Условие неотрицательной полезности позволяет ограничить область рынка, где расположены покупатели, не отказывающиеся от покупок, что делает задачу корректной. Единственной существенной характеристикой расположения магазинов, влияющей на выбираемые игроками стратегии p_1, p_2, является расстояние между ними $\delta = |x_2 - x_1|$.

При заданных ценах p_1, p_2 возможны следующие исходы. Если цены различаются более, чем на δ: $|p_1 - p_2| > \delta$, то игрок с более высокими ценами исчезает с рынка. Также исчезает с рынка игрок установивший цены выше или равные единичной полезности товара $p_1 \geq 1$. Если сумма величин $1 - p_i$ превышает расстояние δ, то области двух магазинов не соприкасаются друг с другом. В оставшемся случае границей областей двух магазинов будет точка $\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2}$, в которой расположен покупатель, которому безразличен выбор того или иного продавца (рис.2).

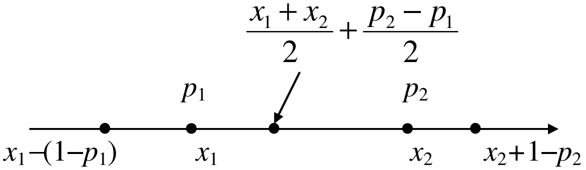

Рис. 2. Области продавцов при условии их соприкосновения

Целевые функции игроков:

(9)

$$u_1(p_1,p_2)=$$
$$=\begin{cases} u_I(p_1), & ((p_1<p_2-\delta)\vee(p_1>2-\delta-p_2))\wedge(p_1<1) \\ u_{II}(p_1,p_2), & (p_1\ge p_2-\delta)\wedge(p_1\le p_2+\delta)\wedge(p_1\le 2-\delta-p_2) \\ u_{III}, & (p_1>p_2+\delta)\vee(p_1>1) \end{cases}$$

$$u_2(p_2,p_1)=$$
$$=\begin{cases} u_I(p_2), & ((p_2<p_1-\delta)\vee(p_2>2-\delta-p_1))\wedge(p_2<1) \\ u_{II}(p_2,p_1), & (p_2\ge p_1-\delta)\wedge(p_2\le p_1+\delta)\wedge(p_2\le 2-\delta-p_1) \\ u_{III}, & (p_2>p_1+\delta)\vee(p_2>1) \end{cases}$$

где

$$u_I(p_1)=2p_1(1-p_1),$$

(10) $$u_{II}(p_1,p_2)=p_1\left(1-p_1+\frac{p_2-p_1+\delta}{2}\right), u_{III}=0$$

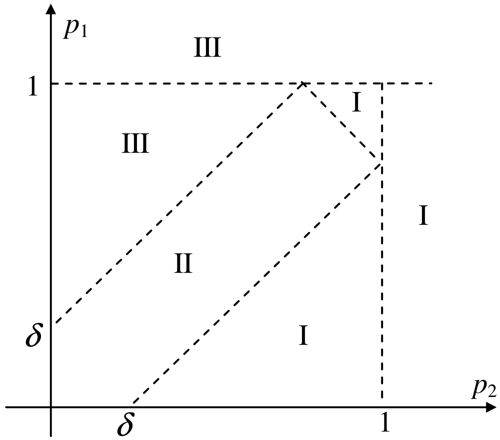

Рис. 3. Области значений целевой функции игрока 1

На рис. 3 изображены области, на которых функция $u_1(p_1, p_2)$ принимает значения $u_I(p_1)$, $u_{II}(p_1, p_2)$ и u_{III}. В области II происходит конкуренция сосуществующих на рынке фирм. В нижнем треугольнике области I в конкуренции побеждает фирма 1. В верхнем треугольнике области I зоны покупателей фирм не пересекаются. В области III фирма 1 терпит поражение в конкуренции и исчезает с рынка.

$$(11)\quad u_I(p_1) = \begin{cases} u_{I.1}(p_1) = & 2p_1(1-p_1), & p_1 \ge 1-a \\ u_{I.2}(p_1) = & p_1(1+a-p_1), & p_1 \in [1-\delta-a, 1-a] \\ u_{I.3}(p_1) = & p_1(\delta+2a), & p_1 \le 1-\delta-a, \end{cases}$$

$$u_{II}(p_1, p_2) =$$

$$= \begin{cases} u_{II.1}(p_1, p_2) = & \dfrac{2}{3} p_1 \left(\dfrac{2+\delta+p_2}{3} - p_1 \right), & p_1 \ge 1-a \\ u_{II.2}(p_1, p_2) = & \dfrac{1}{2} p_1(\delta + 2a + p_2 - p_1), & p_1 \le 1-a, \end{cases}$$

$$u_{III} = 0\,.$$

Сравнительно со случаем игры на прямой, в игре с симметричным расположением игроков (рис.4) задачи целевые функции игроков имеют более сложный вид. Области I и II разделяются на подобласти, в зависимости от того, достигает ли граница зоны покупателей данного магазина края отрезка $[A, B]$ (рис.5). Целевая функция (для игрока 1) имеет вид:

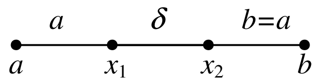

Рис.4. Симметричное расположение игроков на отрезке

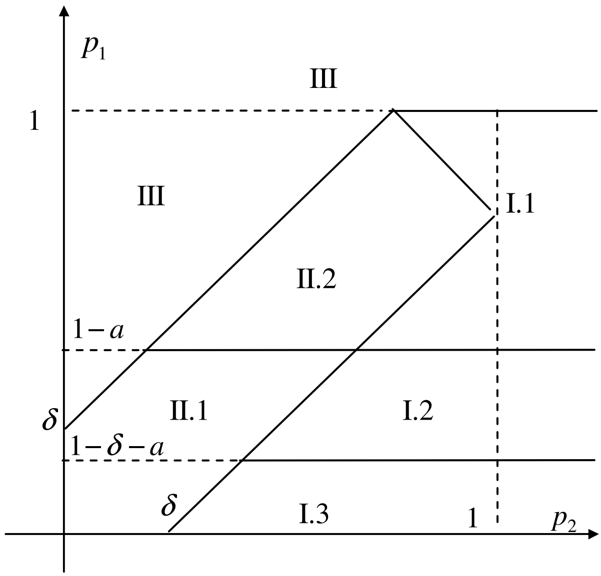

Рис.5. Области значений целевой функции $u_1(p_1, p_2)$

$$(12)\quad u_I(p_1) = \begin{cases} u_{I.1}(p_1) = \quad 2p_1(1-p_1), & p_1 \ge 1-a \\ u_{I.2}(p_1) = \quad p_1(1+a-p_1), & p_1 \in [1-\delta-a, 1-a] \\ u_{I.3}(p_1) = \quad p_1(\delta+2a), & p_1 \le 1-\delta-a, \end{cases}$$

$$u_{II}(p_1,p_2)=$$

$$(12)\quad =\begin{cases} u_{II.1}(p_1,p_2)= & \dfrac{2}{3}p_1\left(\dfrac{2+\delta+p_2}{3}-p_1\right), \quad p_1\ge 1-a \\ u_{II.2}(p_1,p_2)= & \dfrac{1}{2}p_1(\delta+2a+p_2-p_1), \quad p_1\le 1-a, \end{cases}$$

$$u_{III}=0\,.$$

При несимметричном расположении игроков $a\neq b$ их целевые функции еще несколько усложняются. Для игрока 1:

$$u_I^a(p_1)=$$

$$(13)\quad =\begin{cases} u_{I.1}(p_1)= & 2p_1(1-p_1), & p_1\ge 1-a, & p_1\ge 1-\delta-b, \\ u_{I.2}(p_1)= & p_1(1+a-p_1), & p_1\ge 1-a, & p_1\le 1-\delta-b, \\ u_{I.3}(p_1)= & p_1(1+b+\delta-p_1), & p_1\le 1-a, & p_1\ge 1-\delta-b, \\ u_{I.4}(p_1)= & p_1(\delta+a+b), & p_1\le 1-a, & p_1\le 1-\delta-b, \end{cases}$$

$$u_{II}^a(p_1,p_2)=$$

$$=\begin{cases} u_{II.1}(p_1,p_2)= & \dfrac{2}{3}p_1\left(\dfrac{2+\delta+p_2}{3}-p_1\right), \quad p_1\ge 1-a, \\ u_{II.2}(p_1,p_2)= & \dfrac{1}{2}p_1(\delta+2a+p_2-p_1), \quad p_1\le 1-a, \end{cases}$$

$$u_{III}=0\,.$$

Целевая функция игрока 2 выписывается симметрично:

$$u_I^b(p_2)=$$

$$(14)\quad =\begin{cases} u_{I.1}(p_2)= & 2p_2(1-p_2), & p_2\ge 1-b, & p_2\ge 1-\delta-a, \\ u_{I.2}(p_2)= & p_2(1+b-p_2), & p_2\ge 1-b, & p_2\le 1-\delta-a, \\ u_{I.3}(p_2)= & p_2(1+a+\delta-p_2), & p_2\le 1-b, & p_2\ge 1-\delta-a, \\ u_{I.4}(p_2)= & p_2(\delta+b+b), & p_2\le 1-b, & p_2\le 1-\delta-a, \end{cases}$$

$$u_{II}^b(p_2,p_1)=$$

$$(14)\quad =\begin{cases} u_{II.1}(p_2,p_1)= & \dfrac{2}{3}p_2\left(\dfrac{2+\delta+p_1}{3}-p_2\right), \quad p_2\ge 1-b, \\ u_{II.2}(p_2,p_1)= & \dfrac{1}{2}p_2(\delta+2b+p_1-p_2), \quad p_2\le 1-b, \end{cases}$$

$u_{III} = 0$.

Функция $u_I(p_1)$ всегда состоит из не более, чем трех участков, случаи $u_{I.2}(p_1)$ и $u_{I.3}(p_1)$ являются взаимоисключающими при одинаковых a, b, δ.

5. Модель простого равновесия в безопасных стратегиях

Если рассмотреть игру установления цен при фиксированных местоположениях игроков, то для несовпадающих $x_1 \neq x_2$ каждый из игроков может, назначив достаточно низкие цены, обеспечить себе положительный выигрыш независимо от стратегии конкурента. С другой стороны, при некоторых местоположениях магазинов не существует равновесия Нэша в игре цен потому, что в локальном равновесии, найденном Хотеллингом (далее называемом равновесием Хотеллинга), возникает следующая ситуация. По крайней мере, один из игроков может, опустив цены относительно данного равновесия, полностью овладеть рынком и получить при этом дополнительную прибыль. Поскольку при реализации этой угрозы одним игроком второй теряет все и получает наихудший результат из возможных, естественно предположить, что рациональной стратегией в областях несуществования равновесия Нэша будет стремление к наибольшему выигрышу при исключении возможности указанного наихудшего результата игры. Именно эта логика поведения заложена в идее равновесия в безопасных стратегиях [4, 6]. Приведем определения простого РБС, достаточного для исследования задачи.

Пусть задана игра $\Gamma = (X_i, u_i, i \in N)$.

Определение 1. Угрозой *игрока j игроку i* $(j \to i)$ *называется пара ситуаций* $x, (x'_j, x_{-j})$ *такая что:* $u_j(x'_j, x_{-j}) > u_j(x)$ *и* $u_i(x'_j, x_{-j}) > u_i(x)$. *При этом ситуация x называется* ***содержа-***

щим угрозу, *а профиль* (x'_j, x_{-j}), *также как и стратегия* x'_j, *называются* ***угрожающими*** *игроку i со стороны игрока j.*

Определение 2. *стратегия* x_i *игрока i называется* ***простой безопасной стратегией*** *при заданной обстановке* x_{-i}, *если ситуация x не содержит угроз игроку i.*

Определение 3. Множеством $W_i(x) \subseteq X_i$ ***простых стратегий, предпочтительных с учетом угроз*** *для игрока i относительно ситуации x называется множество стратегий* x'_i *таких, что* $u_i(x'_i, x_{-i}) \geq u_i(x)$ *и для любого игрока* $j \neq i$ *и для любой его угрозы игроку i:* $\{(x'_i, x_{-i}), (x'_i, x'_j, x_{-ij})\}$ *выполнено* $u_i(x'_i, x'_j, x_{-ij}) \geq u_i(x)$.

Определение 4. *Ситуация* x^* *называется* ***простым равновесием в безопасных стратегиях***, *если* $\forall i: \quad x_i^* \in \arg\max\limits_{x_i \in W_i(x^*)} u_i(x_i, x_{-i})$.

Комментарий.
$x_i \in W_i(x^*) \Leftrightarrow (u_i(x_i, x_{-i}^*) = u_i(x^*)) \wedge (x_i -$ безопасна при окружении $x_{-i}^*)$.

6. Существование РБС в задаче Хотеллинга

Теорема. *Игровая задача* $\Gamma: (X_i = \Re^+, u_i, i \in \{1,2\})$, *где* u_i *определяются (9), (13), (14) всегда имеет решение в смысле РБС.*

Доказательство. Зафиксировав цену конкурента p_2 и рассматривая срез функции $u_1(p_1, p_2)$, можно заметить, что при различных p_2 целевая функция игрока 1 имеет качественно различный вид. Пусть $\delta < 0.5$, это наиболее интересный случай. Тогда при $p_2 \leq \delta$ целевая функция $u_1(p_1, p_2)$ располагается в областях II и III и является однопиковой по p_1 (рис.6). При

$\delta < p_2 \le 1-\delta$ целевая функция $u_1(p_1, p_2)$ располагается в областях I, II и III и является двупиковой (рис.7), причем возможны случаи превышения первого пика, располагающегося в области I, над вторым, так и обратный случай. При $p_2 > 1-\delta$ целевая функция первого игрока по мере роста p_1 располагается в областях I, II, I и III и также может быть двупиковой (рис.8). При $\delta > 0.5$ и при $1-\delta < p_2 \le \delta$ целевая функция $u_1(p_1, p_2)$ является однопиковой и располагается в областях II, I и III (рис.9).

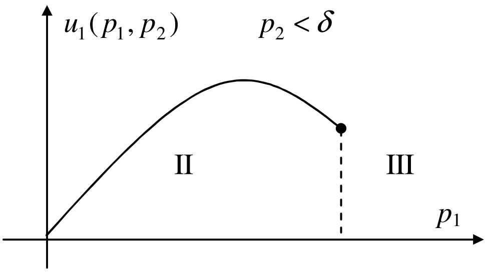

Рис.6. Целевая функция игрока 1 при $p_2 < \delta$

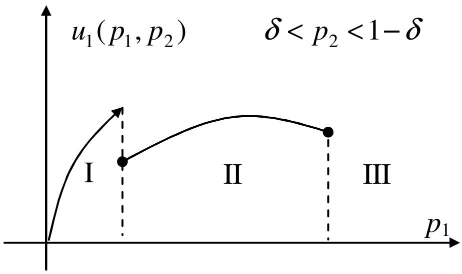

Рис.7. Целевая функция игрока 1 при $\delta < p_2 < 1-\delta$

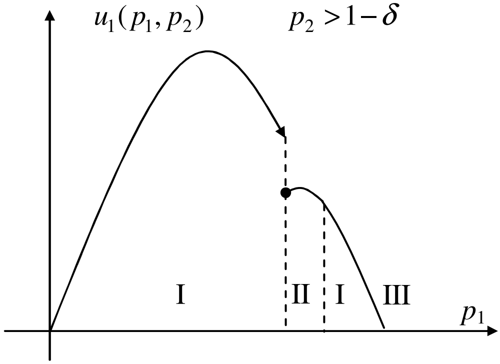

Рис.8. Целевая функция игрока 1 при $p_2 > 1-\delta$

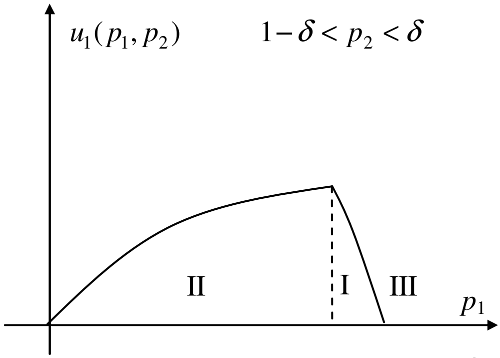

Рис.9. Целевая функция игрока 1 при $1-\delta < p_2 < \delta$

Каждый из игроков при $x_1 \neq x_2, \delta > 0$ может гарантированно получить неотрицательный выигрыш, назначив положительную цену ниже, чем δ. Следовательно, при любом положении в игре, при котором какой-либо из игроков полностью вытесняется с рынка, угрозой проигравшего победителю будет назначение такой цены, значит такое положение не может быть РБС. Следовательно, любое РБС в данной задаче может находиться либо в области конкурентного сосуществования (область II для обоих игроков), либо в области непересечения покупательских зон (область I для обоих игроков). То есть РБС может лежать только в выпуклом компактном множестве $M_{II}: \ |p_1 - p_2| \le \delta, 0 \le p_i \le 1$.

Рассмотрим игру Γ', в которой целевые функции совпадают с u_1, u_2 на множестве M_{II}, а вне него определяются следующим образом:

(15)

$$u_i'(p_i, p_{-i}) =$$
$$= \begin{cases} u_i(M_{II\min}(p_{-i}), p_{-i}) - 2(M_{II\min}(p_{-i})) + 2p_i, p_i < M_{II\min}(p_{-i}), p_{-i} \in [0,1] \\ u_i(p_i, p_{-i}), \qquad p_i \in [M_{II\min}(p_{-i}), M_{II\max}(p_{-i})], p_{-i} \in [0,1] \\ u_i(M_{II\max}(p_{-i}), p_{-i}) - 2(M_{II\max}(p_{-i})) - 2p_i, p_i > M_{II\max}(p_{-i}), p_{-i} \in [0,1] \\ -\infty, \qquad p_{-i} \notin [0,1], \end{cases}$$

где

(16) $$\begin{array}{l} M_{II\max}(p_{-i}) = \max\{0, p_{-i} - \delta\}, \\ M_{II\min}(p_{-i}) = \min\{p_{-i} + \delta, 1\}. \end{array}$$

Так как абсолютное значение производных u_1, u_2 не превышает 2, то целевые функции u_i игры Γ' вогнуты по p_i. Следовательно, существует равновесие Нэша в игре Γ': $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) \in M_{II}$. Если это равновесие является глобальным равновесием Нэша (а, следовательно, и РБС) в исходной игре, то $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = (p_1^*, p_2^*)$ и для данного случая утверждение теоремы доказано.

Допустим, что это не так, что означает: $(u_I(\hat{p}_2 - \delta) > u_{II}(\hat{p}_1, \hat{p}_2)) \vee (u_I(\hat{p}_1 - \delta) > u_{II}(\hat{p}_2, \hat{p}_1))$, или хотя бы для одного из игроков первый пик целевой функции выше второго (рис.7).

Предположим, что $p_1 > 0.5 + \delta$. Тогда игрок 2, выбрав $p_2 = 0.5$, вытеснит соперника с рынка и получит максимально возможный в игре выигрыш 0.5. Следовательно, (p_1, p_2) не безопасна. То есть РБС следует искать при выполнении условия

$p_1, p_2 \le 0.5 + \delta$, при котором функция $u_I(p)$ является возрастающей на $[0,\ p_i - \delta]$.

По аналогии с наилучшим ответом при заданном окружении ($p_i^{BR}(p_{-i}) = \arg\max_{p_i \in X_i} u_i(p, p_{-i})$) введем понятие наилучший безопасный ответ:

(17) $p_i^{BSR}(p_{-i}) = \arg\max_{p_i \in V_i(p_{-i})} u_i(p, p_{-i})$,

где $V_i(p_{-i})$ множество безопасных стратегий игрока i при окружении p_{-i}.

Для рассматриваемой задачи наилучший безопасный ответ определяется следующим образом.

(18) $p_1^{BSR}(p_2) = \arg\max_{p \in [p_2 - \delta, p_2 + \delta]} u_{II}(p, p_2) = p_1^{BR}(p_2)$,

если $u_{II}(p_2, p_1^{BSR}(p_2)) \ge u_I(p_1^{BSR}(p_2) - \delta)$, то есть когда второму игроку невыгодно вытеснять с рынка соперника.

В ином случае, наилучший безопасный ответ определяется из условия:

(19) $u_I(p_1^{BSR}(p_2) - \delta) = u_{II}(p_2, p_1^{BSR}(p_2))$

При этом, в области $p_1 \in [p_2 - \delta, p_2 + \delta]$ (область II) безопасными для игрока 1 будут только цены $p_1 \le p_1^{BSR}(p_2)$. Только при таких ценах будет выполняться условие безопасности его стратегий: $u_I(p_1 - \delta) \le u_{II}(p_2, p_1)$ (второму игроку невыгодно вытеснять соперника).

Функции $p_1^{BSR}(p_2),\ p_2^{BSR}(p_1)$ являются непрерывными в силу непрерывности $u_I(p), u_{II}(p_1, p_2)$ и того, что решение (18) переходит в решение (19) непрерывно. Данные функции определяются для произвольных значений p_1, p_2 и принимают значения внутри множества M_{II}. Следовательно, существует точка $(p_1^*, p_2^*) \in M_{II}$ такая, что $p_1^* = p_1^{BSR}(p_2),\ p_2^* = p_2^{BSR}(p_1)$. Такие и только такие точки являются РБС. ●

7. Исследование игры цен на прямой

Исследуем возможные типы равновесий в игре на прямой, равновесия Нэша и РБС. Прежде всего, следует заметить, что равновесие (Нэша или РБС) может располагаться либо в области II (которая идентична для обоих игроков), там где устанавливается конкурентное равновесие, либо в той части области I, где зоны двух игроков не пересекаются. Случаи полного вытеснения с рынка одного из игроков при $\delta > 0$ исключены.

Область, в которой не существует равновесий Нэша, – это область достаточно малых δ. В таком случае локальное равновесие, найденное Хотеллингом (точнее его аналог для рассматриваемой модификации задачи), не является глобальным. Это происходит потому, что максимум двупиковой функции игрока, при условии, что партнер выбрал точку локального равновесия, лежит в области I, то есть первый пик выше второго. При этом в игре существует РБС, описываемое следующей системой уравнений (рис.10):

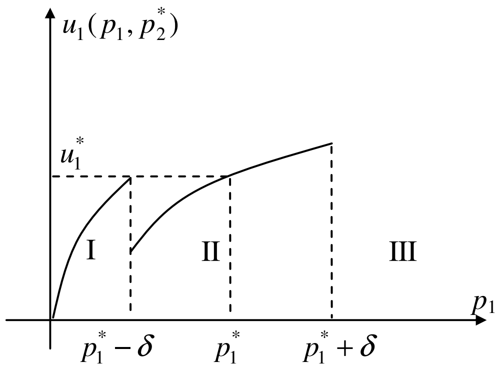

Рис.10. Равновесие в безопасных стратегиях

$$(20)\quad \begin{cases} u_{II}(p_1^*, p_2^*) = u_I(p_1^* - \delta), \\ u_{II}(p_2^*, p_1^*) = u_I(p_2^* - \delta). \end{cases}$$

Так как равновесные стратегии равны из соображений симметрии $p_1^* = p_2^* = p^*$, то уравнение равновесных цен: $u_{II}(p^*, p^*) = u_I(p^* - \delta)$.

Для того, чтобы точка была РБС, необходимо выполнение условий РБС:

(21) $\forall \varepsilon \in (0, \delta] : u_I(p^* - \delta + \varepsilon) > u_{II}(p^*, p^* + \varepsilon)$

Это условие означает, что если игрок увеличит свою стратегию до $p^* + \varepsilon$, то игроку 2, сравнительно с его равновесным положением p^*, станет выгодно предпочесть стратегию $p^* - \delta + \varepsilon$, при которой он вытесняет с рынка игрока 1.

Равновесие Хотеллинга описывается уравнениями:

(22) $$\begin{cases} u_{II}(p_1^*, p_2^*) = \max\limits_{p_1} u_{II}(p_1, p_2^*) \\ u_{II}(p_2^*, p_1^*) = \max\limits_{p_2} u_{II}(p_2, p_1^*) \end{cases}$$

$$u_{II}(p^*, p^*) = \max_{p} u_{II}(p\ \ , p^*).$$

Условием, при котором это равновесие является решением задачи, будет требование, чтобы игрокам не было выгодно переходить с него к стратегии вытеснения конкурента (рис.11):

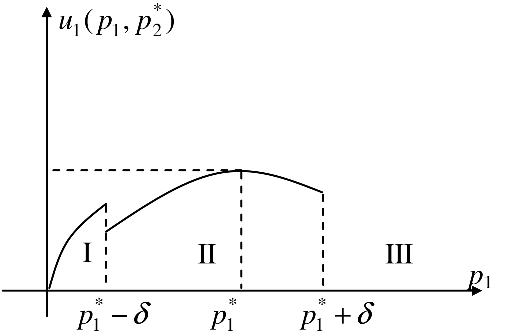

Рис.11.Равновесие Хотеллинга

(23) $u_I(p^* - \delta) < u_2(p^*, p^*)$

Условие неотрицательности целевой функции покупателей порождает появление еще одного типа равновесия – равновесия при условии отрыва. В нем покупатель, находящийся на границе зон двух магазинов получает при покупке товара в любом из них нулевую полезность, то есть при малейшем повышении цен покупательские зоны магазинов отрываются друг от друга. В этом случае равновесные стратегии игроков находятся на границе областей II и I их целевых функций (рис.12). Условием равновесия будет система неравенств:

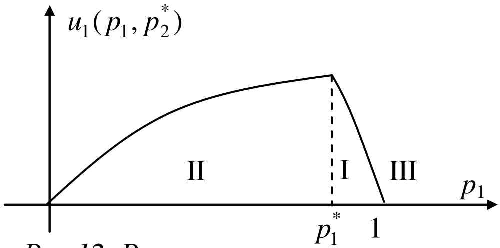

Рис.12. Равновесие при условии отрыва

(24) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{II}(p_1^*, p_2^*)}{\partial p_1} > 0 \\ \dfrac{\partial u_I(p_1^*)}{\partial p_1} < 0 \\ \dfrac{\partial u_{II}(p_2^*, p_1^*)}{\partial p_2} > 0 \\ \dfrac{\partial u_I(p_2^*)}{\partial p_2} < 0. \end{cases}$$

Этот случай допускает не единственное решение, а целый отрезок возможных равновесий на плоскости (p_1, p_2).

Наконец, последний, четвертый случай, при котором игроки расположены настолько далеко, что никак не влияют друг на друга, и игра сводится к независимой оптимизации цены каждым.

Исследуя все вышеперечисленные случаи и решая соответствующие системы уравнений (22), (23), (24), можно получить решение задачи установления цен на прямой и доказать следующее утверждение (рис.13).

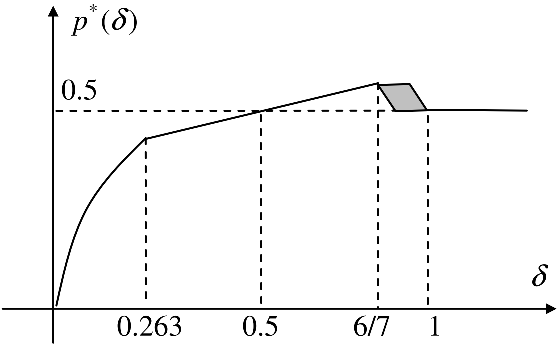

Рис.13. Зависимость равновесных цен от расстояния между магазинами

Утверждение 2. *Игровая задача установления цен на прямой имеет следующее решение в РБС:*

1) При $\delta \in \left[0, \dfrac{-2.24+\sqrt{25.6}}{10.72}\right] \approx [0, 0.263]$ *– РБС:*

$$p_1^* = p_2^* = p^* = \frac{2+7\delta-\sqrt{17\delta^2-4\delta+4}}{4},$$

$$u_1^* = u_2^* = 2(p^*-\delta)(1-p^*+\delta);$$

2) При $\delta \in \left[\dfrac{-2.24+\sqrt{25.6}}{10.72}, \dfrac{6}{7}\right]$ *– равновесие Хотеллинга:*

$$p_1^* = p_2^* = p^* = 0.4+0.2\delta, \quad u_1^* = u_2^* = \frac{3}{2}p^{*2}$$

3) При $\delta \in \left[\frac{6}{7}, 1\right]$ *– равновесие при условии отрыва:*

$$\max\left\{\frac{10}{7} - \delta, 0.5\right\} \le p_1^* \le \min\left\{\frac{4}{7}, 1.5 - \delta\right\},$$

$$p_2^* = 2 - \delta - p_1^*, \quad u_i^* = 2p_i^*(1 - p_i^*);$$

4) При $\delta \in [1, \infty)$: $p_i^* = u_i^* = 0.5$.

Следует отметить интересный парадокс: при $\delta \in (0.5, 1)$ уровень цен, устанавливающихся при конкуренции, выше, чем в монопольном случае непересекающихся областей. Но значение их выигрышей при этом тем не менее меньше, чем в монопольном положении. Чтобы пояснить этот феномен, можно представить, что игроки, находящиеся на расстоянии, соответствующем равновесию при условии отрыва, установили цены $p_i^* = 0.5$. Тогда зона покупателей игрока 1 имеет длину 0.5 слева от его магазина и длину $\delta / 2$ – справа. При этом любое малое увеличение или уменьшение цены компенсируется соответствующим уменьшением или увеличением его левой подобласти так, что доходы с нее не увеличиваются. Но граница его правой подобласти, встречая конкурентное давление второго игрока, изменяет свою длину с приращениями в два раза меньшими, чем левая граница. Поэтому, слабо увеличивая цену, игрок получает с правой подобласти дополнительный доход. Таким образом, устанавливаются равновесные, более высокие цены.

8. Исследование игры цен с симметричным расположением игроков

Исследование игровой задачи цен открывает, что количество вариантов равновесного решения, возможных при различных значениях параметров a и δ, увеличивается, сравнительно со случаем игры на прямой, с 4 до 11. Соответствующие всем возможным равновесиям уравнения, равновесные цены и выигрыши, ограничения приведены в таблице 1. На рис. 14 показано расположение областей, соответствующих различным равновесиям на плоскости (a, δ), а рис. 15 и 16 иллюстрируют общий вид функций равновесных цен и выигрышей игроков в зависимости от a и δ. Для случаев 7, 8, в которых существуют множественные равновесия, показаны средние значения равновесных цен и выигрышей.

Утверждение 3. *Игровая задача установления цен на отрезке с симметричным расположением игроков имеет решение (табл.1).*

Доказательство. Заключается в решении уравнений из первого столбца таблицы. Ограничения выводятся из условия непрерывного перехода одного решения в другое.

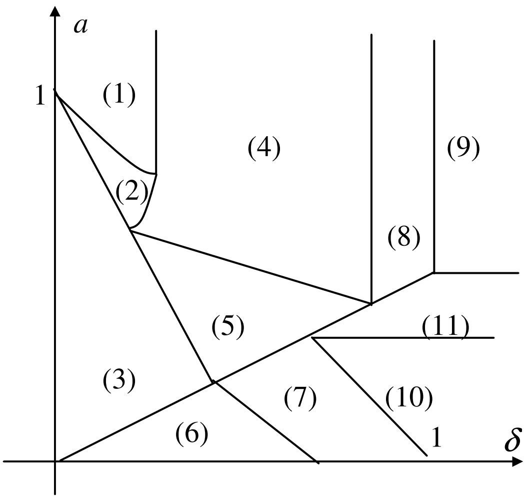

Рис.14. Области решений симметричной игры цен

Таблица 1. Решение игры цен с несимметричным расположением игроков

	Уравнение	Решение	Ограничения
1	$u_{I.1}(p^* - \delta) = u_{II.1}(p^*, p^*)$	$p^* = \dfrac{2+7\delta-\sqrt{17\delta^2-4\delta+4}}{4}$, $u^* = 2(p^*-\delta)(1+\delta-p^*)$	$a \geq \dfrac{2-3\delta+\sqrt{17\delta^2-4\delta+4}}{4}$, $\delta \leq \dfrac{-2.24+\sqrt{25.6}}{10.72} \approx 0.263$
2	$u_{I.2}(p^* - \delta) = u_{II.1}(p^*, p^*)$	$p^* = \dfrac{2\delta(1+\delta+a)}{3\delta+2a}$, $u^* = (p^*-\delta)(1+a+\delta-p^*)$	$a \leq \dfrac{2-3\delta+\sqrt{17\delta^2-4\delta+4}}{4}$, $a \geq \dfrac{\delta(4+7\delta)}{4-8\delta}$, $a \geq 1-2\delta$
3	$u_{I.3}(p^* - \delta) = u_{II.2}(p^*, p^*)$	$p^* = 2\delta$, $u^* = \delta(\delta+2a)$	$\delta/2 \leq a \leq 1-2\delta$

4	$p^* = \arg\max_p u_{II.1}(p, p^*)$	$p^* = 0.4 + 0.2\delta,$ $u^* = 0.06(2+\delta)^2$	$a \le \frac{\delta(4+7\delta)}{4-8\delta}, \delta \in \left[\frac{2}{9}, 0.263\right];$ $a \ge 0.6 - 0.2\delta, \delta \in \left[\frac{2}{9}, \frac{6}{7}\right]$
5	$u_{II.1}(p^*, p^*) = u_{II.2}(p^*, p^*)$	$p^* = 1 - a,$ $u^* = 0.5(1-a)(\delta + 2a)$	$a \le 0.6 - 0.2\delta, \quad a \ge 1 - 2\delta,$ $a \ge \delta / 2$
6	$p^* = \arg\max_p u_{II.2}(p, p^*)$	$p^* = \delta + 2a, u^* = 0.5(\delta + 2a)^2$	$a \le \delta / 2, \quad a \le 0.5 - 0.75\delta$
7	$u_{II.2}(p_1^*, p_2^*) = u_{I.2}(p_1^*)$ $u_{II.2}(p_2^*, p_1^*) = u_{I.2}(p_2^*)$	$p_1^* \ge \max\left\{\frac{10}{7} - \delta, 1 - a, 0.5\right\}$ $p_1^* \le \min\left\{\frac{4}{7}, 1 + a - \delta, 1.5 - \delta\right\}$ $p_2^* = 2 - \delta - p_1^*,$ $u_i^* = p_i^*(1 + a - p_i^*)$	$a \le \delta / 2, \quad a \ge 0.5 - 0.75\delta,$ $a \le 1 - \delta$

8	$u_{II.1}(p_1^*, p_2^*) = u_{I.1}(p_1^*)$ $u_{II.1}(p_2^*, p_1^*) = u_{I.1}(p_2^*)$	$p_1^* \geq \max\left\{ \frac{4-3\delta-2a}{3}, \frac{1+a}{2}, 1+a-\delta \right\}$ $p_1^* \leq \min\left\{ \frac{2+2a}{3}, \frac{2-2\delta-a}{2}, 1-a \right\}$ $p_2^* = 2-\delta-p_1^*,$ $u_i^* = 2p_i^*(1-p_i^*)$	$a \geq \delta/2, \quad \delta \in [6/7, 1]$
9	$p^* = \arg\max_p u_{I.1}(p)$	$p^* = u^* = 0.5$	$a \geq 0.5, \quad \delta \geq 1$
10	$p^* = \arg\max_p u_{I.2}(p)$	$p^* = \frac{1+a}{2}, u^* = \left(\frac{1+a}{2}\right)^2$	$a \geq 1/3, \quad \delta \geq 1-a$
11	$u_{I.1}(p^*) = u_{I.2}(p^*)$	$p^* = 1-a, u^* = 2a(1-a)$	$1/3 \geq a \geq 0.5, \quad \delta \geq a/2$

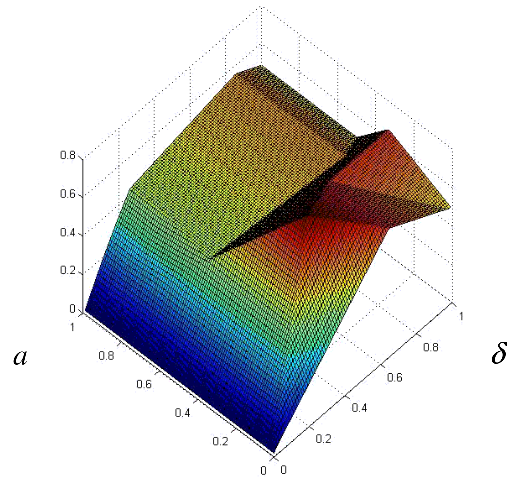

Рис. 15. Равновесные цены в симметричной игре цен

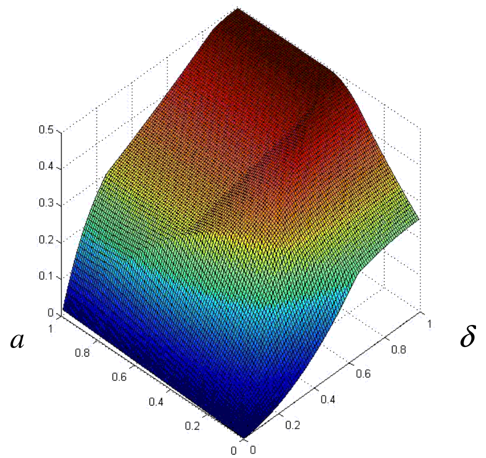

Рис. 16. Равновесные выигрыши в симметричной игре цен

В приведенном решении областям 1, 2, 3 соответствуют РБС. Области 4 и 6 соответствуют равновесиям Хотеллинга, где покупательские зоны касаются краев отрезка в первом случае, и касаются во втором. В областях 7 и 8 имеются множественные равновесия при условии отрыва зон игроков друг от друга. Области 5 и 11 занимают равновесия при условии отрыва зон игроков от края отрезка. Области 9, 10, 11 – решения при непересекающихся зонах игроков. На решения в областях 1, 4, 8, 9 не влияют края отрезка. Особый интерес представляет точка $a = 0.2, \delta = 0.8$, граничащая сразу с четырьмя областями: РБС, равновесия Хотеллинга, равновесия при отрыве зон игроков друг от друга, равновесия при условии отрыва от края отрезка. В этой точке достигается максимальный уровень цен, возможный для исследуемой задачи. Эта точка представляет такой интерес, что ее следует рассмотреть отдельно, как пример.

9. Пример: повышение цен при переходе от монополии к дуополии

Пусть $A = 0, B = 0.8, l = 0.8$. При монополистическом случае одного продавца его наивысший выигрыш при оптимальной цене достигается при расположении магазина в центре отрезка $x_0 = 0.4$. При этом оптимальная цена $p_0^* = 0.6$, а выигрыш $u_0^* = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48$. Полезность покупателя, расположенного в точке x, при приобретении товара (рис.17):

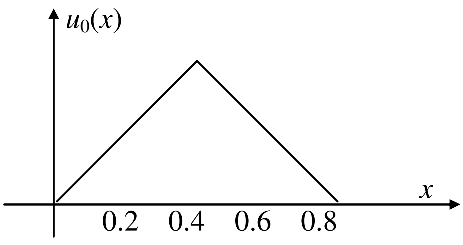

Рис. 17 Полезность покупателей при монополии

(25) $u(x)=\begin{cases} x, & x\le 0.4 \\ 0.8-x, & x\ge 0.4. \end{cases}$

Для случая дуополии при $a=b=0.2, \delta=0.4$ равновесие в игре цен дает $p_1^*=p_2^*=0.8$, выигрыши продавцов $u_i^*=0.8\cdot 0.4=0.32$. Функция полезности игрока 1 при фиксированной равновесной цене соперника будет иметь вид (рис. 18):

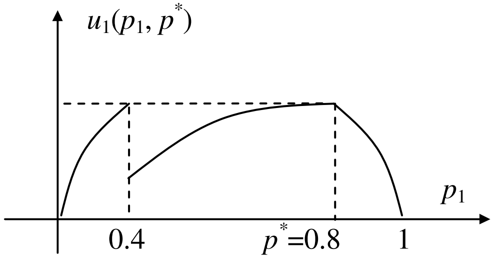

Рис. 18 Полезность продавца при дуополии

(26) $u_1(p_1,p_2^*)=\begin{cases} 0.8p_1, & p_1\in[0,0.4] \\ 0.5p_1(1.6-p_1), & p_1\in[0.4,0.8] \\ 2p_1(1-p_1), & p_1\in[0.8,1]. \end{cases}$

Видно, что стратегия $p_1^*=p_2^*=0.8$ является равновесием Нэша в игре цен. При снижении цен от этого уровня игроком 1 контролируемый им участок слева не возрастает, так как упирается в край отрезка, а увеличение участка справа не компенсирует падения дохода от снижения цен. Полезность покупателя в точке x при приобретении товара (рис.19):

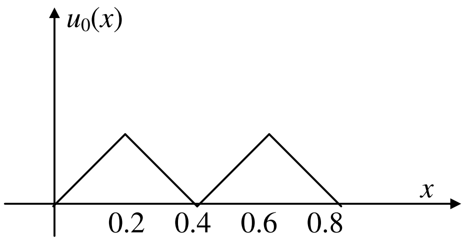

Рис. 19 Полезность покупателей при дуополии

$$(27)\ u(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,0.2]\\ 0.4-x, & x\in[0.2,0.4]\\ x-0.4, & x\in[0.4,0.6]\\ 0.8-x, & x\in[0.6,1]. \end{cases}$$

То есть, с точки зрения покупателей, вариант дуополии доминируется по Парето монопольным вариантом наличия одного магазина. Конкуренция при таких условиях на пространственно распределенном рынке вызывает повышение цен.

10. Обсуждение методов решения игры цен при несимметричном расположении игроков

Технически задача исследования игры цен при несимметричном расположении становится существенно более сложной. Это происходит, с одной стороны, из-за увеличения количества типов возможных равновесий несимметричного типа. Например, равновесие, в котором один из игроков выбирает безопасную стратегию, а другой – равновесную по Нэшу-Хотеллингу. С другой стороны, сами уравнения и решения становятся более сложными.

В качестве примера можно привести решение для несимметричного аналога симметричного случая 3 из таблицы 1. Симметричным решением было: $p_1^* = p_2^* = p^* = 2\delta$, $u^* = \delta(\delta + 2a)$. Для несимметричного случая решение получается существенно сложнее (формула для игрока 1):

$$
p_1^* = 2(l - y_1),
$$
$$
y_1 = \sqrt[3]{-\frac{r_1}{2} + \sqrt{R_1}} + \sqrt[3]{-\frac{r_1}{2} - \sqrt{R_1}},
$$
$$
R_1 = \left(\frac{s_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{r_1}{2}\right)^2,
$$
(28)
$$
r_1 = -\frac{2}{3}\left(l + a - \frac{\delta}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}b\left(l + b + \frac{\delta}{2}\right)\left(l + b - \frac{\delta}{2}\right) - b^2 l,
$$
$$
s_1 = \frac{1}{3}\left(l + b - \frac{\delta}{2}\right)^3 + b\left(l + b + \frac{\delta}{2}\right),
$$
$$
u_1^* = l(p_1^* - \delta).
$$

Для ряда равновесий аналитических решений получить не удалось. Для других не удалось аналитически определить области возрастания и убывания u_i^* по a, b, что необходимо для решения двухшаговой задачи, со стратегиями x_i^* на первом шаге и p_i^* – на втором. Так что, вероятно, дальнейшее полное решение двухшаговой игровой задачи Хотеллинга будет проведено численно, причем теоретических сложностей на этом пути не предвидится, так как все получающиеся системы уравнений корректны и решабельны.

11. Заключение

В предложенной работе получены 3 основных результата. Во-первых, логика угроз и безопасных стратегий позволила предложить убедительное решение классической задачи.

Во-вторых, с точки зрения метода найдено еще одно приложение, в котором применение идеи РБС оказалось плодотворно. Первой задачей, для которой были предложены и на которой опробованы безопасные стратегии, была задача Даунса [2, 4, 5, 6, 10]. Теоретически эта задача является аналогом задачи Хотеллинга с нулевыми ценами, в которой стратегиями игроков является только определение своих местоположений. Как приложение, эта модель применяется для описания политического процесса предвыборной борьбы партий, представляющих свои программы как местоположения на пространстве предпочтений избирателей. Другие классы задач, для которых применялось РБС: исследование конкурсных механизмов [1], конструирование механизмов, восстанавливающих доверие агентов центру [3].

В-третьих, особым, неожиданным результатом работы стало обнаружение эффекта повышения цен при конкуренции на пространственно распределенных рынках. Этот результат тем более ценен, что является не отдельным экзотическим случаем, специально построенным для демонстрации парадокса, а занимает в пространстве возможных местоположений магазинов существенную область. То есть замеченный эффект – не просто чисто теоретическая возможность при совершенно невероятном стечении обстоятельств, но должен быть значимым и при решении практических задач.

Литература

1. ИВАЩЕНКО А.А., ИСКАКОВ М.Б., КОЛОБОВ Д.В., НОВИКОВ Д.А. *Конкуренция на рынке инноваций* / Иващенко А.А., Колобов Д.В., Новиков Д.А. Механизмы финансирования инновационного развития фирмы. М.: ИПУ РАН, 2005, с. 26-37.
2. ИСКАКОВ М.Б. *Игровая задача дележа распределенного на отрезке ресурса* / Модернизация экономики и глобализация; Гос. ун-т – Высшая школа экономики. – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2009. Кн. 3, с. 519-531.
3. ИСКАКОВ М.Б. *Модели и методы управления привлечением вкладов в банковскую сберегательную систему.* М.: Издательство ЭГВЕС. 2006. 156 с.
4. ИСКАКОВ М.Б. *Равновесие в безопасных стратегиях.* // Автоматика и телемеханика. 2005. №3. С. 139 – 153.

5. ИСКАКОВ М.Б. *Равновесие в безопасных стратегиях в задаче дележа распределенного на отрезке ресурса* / Равновесные модели экономики и энергетики: Труды Всероссийской конференции и секции Математической экономики XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2 – 8 июля 2008 г.: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2008. С. 391-398.
6. ИСКАКОВ М.Б. *Равновесие в безопасных стратегиях и равновесия в угрозах и контругрозах в некооперативных играх.* // Автоматика и телемеханика. 2008. №2. С. 114-134.
7. AHLIN P. *Equilibrium existence in the symmetric Hotelling model with negative network effects.* // Duke Journal of Economics, IX, Spring 1997. pp. 1–28.
8. BASU K. *Lectures in Industrial Organization Theory.* Blakwell Cambridge, USA. 1993.
9. D'ASPREMONT C., JASKOLD GABSZEWICZ J., THISSE J.-F. *On Hotelling's "Stability in Competition"* // Econometrica, Vol. 47, №. 5 (Sep., 1979), pp. 1145-1150.
10. DOWNS A. *An Economic Theory of Democracy.* N.Y.: Harper & Row, 1957.
11. HOTELLING H. *Stability in Competition* // The Economic Journal, Vol. 39, №. 153. (Mar., 1929), pp. 41-57.
12. OSBORNE M. J. , PITCHIK C. *Equilibrium in Hotelling's Model of Spatial Competition* // Econometrica, Vol. 55, №. 4 (Jul., 1987), pp. 911-922.

SECURE STRATEGY EQUILIBRIUM IN HOTELLING'S MODEL OF SPATIAL COMPETITION

Mikhail Iskakov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (mih_iskakov@mail.ru).
Pavel Pavlov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, aspirant (pashapavlov@gmail.com).

Abstract: The problem of spatial competition was formulated in 1929 by Harold Hotelling. He considered two firms playing a two-stage game. They choose locations in stage 1 and prices in stage 2. If locations are chosen by competitors Nash equilibrium do not always exist. For studying these cases we employ the concept of secure strategy equilibrium (SSE) which allows to solve the game of choosing prices for any locations. We examine a nontrivial particular case when prices grow if market moves from a monopoly to a duopoly.

Keywords: game theory, secure strategy equilibrium, Hotelling's model of spatial competition