

УДК 519.213.2
ББК 22.172

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ РАБОТЫ СЛОЖНЫХ МНОГОСТАДИЙНЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМ ВРЕМЕНЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАЯВОК

Олейникова С.А.¹

*(Воронежский государственный технический универси-
тет, Воронеж)*

Статья посвящена анализу недостатков существующих методов решения задач сетевого планирования и управления со случайным временем выполнения операций, а также модификации данных методов, позволяющей повысить точность оценок длительности обслуживания и план-графика в целом.

Ключевые слова: сетевое планирование и управление, PERT, математическое ожидание.

1. Введение

Рассматривается функционирование сложной многостадийной системы, на вход которой в случайные моменты времени поступает поток заявок. Обслуживание каждой отдельной заявки заключается в выполнении некоторых взаимосвязанных операций, причем время выполнения является случайной величиной. Важной задачей в таких случаях является наиболее корректная оценка длительности выполнения работ. Основным подходом для получения такой оценки является метод PERT (Program Evaluation and Review Technique) [1]. Он (как и неко-

¹ Светлана Александровна Олейникова, кандидат технических наук, доцент (osa@vmail.ru).

торые другие подходы) при получении оценки длительности основывается на двух предположениях. Первое заключается в предположении о бета-распределении случайной величины, описывающей длительность выполнения операций. Второе предполагает, что стандартное отклонение равно шестой части размаха данного распределения. Однако, некоторые другие методы, изначально основываясь на тех же предположениях, в результате получили другие оценки длительности обслуживания. В связи с этим возникает необходимость анализа данных предположений с целью выбора наиболее оптимального способа оценки длительности операций. Другой отличительной особенностью метода PERT является предположение о нормальности случайной величины, описывающей длительность выполнения всего проекта. Это предположение основывается на центральной предельной теореме и гипотезе о большом количестве операций, определяющих длительность проекта (стоящих на критическом пути). Однако, зачастую число работ, стоящих на критическом пути, не так велико (не смотря на их большое количество в целом). В связи с этим возникает необходимость оценки правомерности предположения о нормальности времени выполнения всего проекта.

2. Анализ метода PERT

Поскольку длительность работ является случайной величиной, то оценка значения этой величины будет в наибольшей степени влиять на соответствие реального графика запланированному и, как следствие, на оптимальность работы всей системы. Для оценки времени выполнения операций, как правило, требуются данные о следующих параметрах:

- наименьшем времени обслуживания a ;
- наибольшем времени обслуживания b ;
- наиболее вероятном времени обслуживания (моде) m .

Метод PERT является одним из самых распространенных способов для планирования работ со случайной длительностью

обслуживания. Как было сказано ранее, он основывается на следующих предположениях:

1. Закон распределения длительности обслуживания определяется формулой [2]:

$$(1) \quad f_{\xi}(t) = \begin{cases} \frac{(t-a)^{p-1}(b-t)^{q-1}}{B(p, q)}, & a \leq t \leq b, \\ 0, & t < a, t > b. \end{cases}$$

2. Стандартное отклонение случайной величины равно шестой части размаха:

$$(2) \quad \sigma^* t = \frac{b-a}{6}.$$

В этом случае он оценивает длительность выполнения отдельной операции с помощью формулы:

$$(3) \quad M^* \xi = \frac{a + 4m + b}{6}.$$

Рассмотрим предположения данного подхода более подробно. Бета-распределение – это наиболее универсальный способ описания непрерывной случайной величины, обладающей свойством одномодальности, плотность распределения которой имеет две точки пересечения с осью абсцисс [1]. Варьируя параметрами p и q , можно описать различные особенности поведения случайной величины (от случая равномерного закона, когда любое время выполнения некоторой работы в интервале $[a, b]$ равновероятно, до случая с ярко выраженной модой). Поэтому в случае, если возможно оценить наименьшее и наибольшее время выполнения данной работы, бета-распределение является наиболее универсальным способом описания длительности обслуживания. Предположение (2) возникло в силу правила трех сигм.

Исходя из этого, при планировании работ на основе метода PERT могут возникнуть погрешности, которые можно классифицировать следующим образом:

- погрешности, вызванные неточностью оценок a , b и m ;

- ошибки, вызванные допущением о распределении (1) длительности обслуживания;
- ошибки, возникающие из-за предположения о нормальности распределения случайной величины, определяющей длительность проекта;
- погрешности, возникающие из-за неточности оценок (2) и предположения (3).

При этом первые три группы погрешностей можно минимизировать, имея результаты фактического и запланированного расписания за прошедшие периоды (выборочные значения о длительности выполнения работ). Рассмотрим более подробно оценку метода PERT (3) и, по возможности, улучшим эту оценку.

3. Оценка длительности обслуживания заявок

Следует отметить, что оценка PERT – это не единственная оценка, основанная на предположениях (1) и (2). В частности, В.С. Попов, основываясь на тех же предположениях, получил следующую формулу для оценки математического ожидания [1]:

$$(4) \quad M^* \xi = \frac{a + 5m + b}{7}.$$

В работе [3] была предложена следующая формула, оценивающая длительность выполнения операций:

$$(5) \quad M^* \xi = \frac{a + b + 6m}{8}.$$

Таким образом, одна и та же формула, определяющая дисперсию, привела к трем различным оценкам математического ожидания. Поэтому возникает необходимость в анализе предположений, на основании которых были получены данные формулы. Другой причиной анализа является то, что наиболее распространенный в данное время метод оценки длительности выполнения операций PERT не свободен от недостатков, что приводит к

постоянным попыткам модифицировать предлагаемые им формулы.

Основываясь на предположении (2), выпишем значение дисперсии:

$$(6) \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{36}.$$

С другой стороны, дисперсия бета-распределения может быть определена формулой:

$$(7) \quad D\xi = \frac{(b-a)^2 pq}{(p+q)^2 (p+q+1)}.$$

Выразив из формул, описывающих моду и математическое ожидание бета-распределения параметры p и q , и подставив их в формулу (7), получим:

$$(8) \quad D\xi = \frac{(b-M\xi)(M\xi-a)(M\xi-m)}{a-3m+b+M\xi}.$$

Перепишем уравнение (8) относительно математического ожидания следующим образом:

$$(9) \quad x^3 - x^2(b+m+a) + x(am+bm + ab + D\xi) - abm + (a-3m+b)D\xi = 0.$$

Найдем численное решение данного уравнения при известной дисперсии. Начальным этапом будет являться отделение корней. В [5] было показано, что значение математического ожидания будет лежать в интервале (x_1, x_2) , где x_1 и x_2 определяются формулой:

$$(10) \quad x_{1,2} = \frac{(b+m+a) \pm \sqrt{D/4}}{3}.$$

Здесь $D/4$ – дискриминант квадратного уравнения, полученного взятием производной левой части уравнения (9). Он выражается следующим образом:

$$(11) \quad D/4 = (b+m+a)^2 - 3(ab+am+bm+D\xi).$$

Проведем эксперимент, целью которого будет являться определение корня уравнения (9), лежащего в интервале (x_1, x_2) ,

где x_1 и x_2 – решения уравнения (10). Исходными данными будут являться:

- границы интервала a и b ;
- дисперсия.

Будем изменять моду последовательно от a до b . Проведя эксперимент для большого числа опытов с разными значениями a и b , получили, что на результат влияют не сами значения границ интервалов, а их разность. То есть для разных значений a и b с одинаковой разностью этих чисел оценки математического ожидания будут совпадать. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности можно брать $a=0$, а в качестве b использовать значение размаха.

В [4] приведены результаты эксперимента. Помимо поиска численного решения уравнения (9) определялись также оценки математического ожидания каждым из методов с целью их сравнительного анализа. Определив погрешность каждого из методов как разность между оценкой метода и численной оценкой математического ожидания, можно для каждого значения моды определить такую оценку математического ожидания, которая обладает наименьшей погрешностью. Проводя опыт для различных размахов, получили, что зависимость погрешности от моды примерно остается примерно постоянной. На основании этого можно предложить следующую оценку математического ожидания:

$$(12) \quad M^* \xi = \begin{cases} \frac{a+4m+b}{6}, 0 \leq m' < 0.21; \\ \frac{a+5m+b}{7}, 0.21 \leq m' < 0.32; \\ \frac{a+6m+b}{8}, 0.32 \leq m' < 0.68; \\ \frac{a+5m+b}{7}, 0.68 \leq m' < 0.79; \\ \frac{a+4m+b}{6}, 0.79 \leq m' \leq 1. \end{cases}$$

Здесь m' – мода, приведенная к отрезку $[0,1]$.

$$(13) \quad m' = \frac{m}{b-a}.$$

Таким образом, получили аналитическую оценку математического ожидания, характеризующуюся наименьшей погрешностью относительно наиболее распространенных методов. Однако данные формулы могут быть справедливы лишь при справедливости предположения о размахе бета-распределения.

Очевидно, что формулы (12) могут быть уточнены путем рассмотрения более общих оценок длительности обслуживания, а затем, например, с помощью интерполяции наиболее оптимальных оценок для каждого значения моды.

4. Оценка длительности всего проекта

Оценка длительности проекта в целом является важной задачей при составлении план-графиков. Она позволит не только рассчитать величину критического пути, которая лежит в основе определения раннего и позднего времени начала работ, но и рассчитать вероятность, что весь проект будет выполнен к некоторому времени t . Для получения математического ожидания случайной величины, описывающей длительность всего проекта, достаточно сложить математические ожидания длительностей всех работ, лежащих на критическом пути. Однако, для того, чтобы рассчитать выполнение проекта к заданному сроку, необходимо знать закон распределения случайной величины с точностью до параметров. Как было сказано ранее, PERT предполагает, что длительность проекта – это случайная величина, имеющая нормальное распределение. Поскольку сходимость суммы случайных величин к нормально распределенной случайной величине происходит достаточно быстро, на практике для гипотезы о нормальности распределения не обязательно наличия очень большого числа работ на критическом пути. Однако может сложиться ситуация, когда критический путь

состоит из небольшого числа работ (не смотря на их большое количество в целом). В этом случае допущение о нормальности закона распределения может привести к серьезным погрешностям при оценке длительности проекта. Поэтому при небольшом числе работ возникает необходимость проверки нормальности закона распределения. В случае если данное распределение не будет нормальным, возникает необходимость выдвижения гипотезы о другом законе распределения. Проанализировав остальные возможные законы, которые могут описать длительность проекта, можно сделать вывод о том, что это может быть также закон бета [2].

Проверить выдвинутую гипотезу можно с помощью одного из критериев согласия. Наиболее оптимальным в данном случае будет критерий χ^2 . Это обуславливается, в частности, тем, что это один из немногих критериев, который предусматривает возможность оценки параметров предполагаемого распределения и в этом случае меняет число степеней свободы.

Таким образом, возникает задача оценки параметров закона распределения случайной величины, определяющейся как сумма конечного числа случайных величин ξ_i , распределенных по закону бета в интервале $[a_i, b_i]$. Для простоты рассмотрим случайную величину, определяемую как сумма двух случайных величин.

Для проверки гипотезы о любом законе распределения необходимо знать параметры предполагаемого закона. Наиболее простым в данном случае будет нормальный закон. Для проверки гипотезы о нормальном распределении суммы двух случайных величин необходимо знать значения параметров a и σ данного распределения. Поскольку задача решается в предположении о независимости всех случайных величин, то эти параметры будут определяться по формулам:

$$(14) \quad a = M\xi_1 + M\xi_2;$$

$$(15) \quad \sigma = \sqrt{D\xi_1 + D\xi_2}.$$

Если бета-распределения двух случайных величин ξ_1 и ξ_2 на отрезках $[A_1, B_1]$ и $[A_2, B_2]$ имеют параметры p_1, q_1 и p_2, q_2 соответственно, то формулы (14) и (15) переписутся в виде:

$$(16) \quad a = A_1 + \frac{p_1}{p_1 + q_1} (B_1 - A_1) + \\ + A_2 + \frac{p_2}{p_2 + q_2} (B_2 - A_2);$$

$$(17) \quad \sigma = \left[(B_1 - A_1)^2 \frac{p_1 q_1}{(p_1 + q_1)^2 (p_1 + q_1 + 1)} + \right. \\ \left. + (B_2 - A_2)^2 \frac{p_2 q_2}{(p_2 + q_2)^2 (p_2 + q_2 + 1)} \right]^{1/2}$$

Таким образом, параметры этого закона будут определены по формулам (16) и (17) соответственно. Более сложная ситуация возникает в случае, если предполагаемый закон имеет вид бета. Найдем параметры p и q этого закона. Для этого воспользуемся формулами, определяющими математическое ожидание и дисперсию для бета-распределения [6]. Составим следующую систему:

$$(18) \quad \begin{cases} a + (b - a) \frac{p}{p + q} = M\xi \\ (b - a)^2 \frac{pq}{(p + q)^2 (p + q + 1)} = D\xi. \end{cases}$$

В этой системе $a=A_1+A_2$; $b=B_1+B_2$. Это границы области распределения случайной величины $\xi=\xi_1+\xi_2$. Математическое ожидание и дисперсию (точнее, корень из нее) можно определить с помощью формул (16) и (17).

Решим систему (18) относительно p и q . Для этого выразим из первого уравнения q :

$$(19) \quad q = p \frac{b - M\xi}{M\xi - a}.$$

Подставим это значение во второе уравнение данной системы:

$$(b-a)^2 \frac{p^2 \frac{b-M\xi}{M\xi-a}}{p^2 \left(1 + \frac{b-M\xi}{M\xi-a}\right)^2 \left(p + \frac{b-M\xi}{M\xi-a} + 1\right)} = D\xi.$$

Упростив данное уравнение, получим:

$$(b-a)^2 \frac{\frac{b-M\xi}{M\xi-a} \cdot (M\xi-a)^3}{(b-a)^2 (p(b-a) + M\xi-a)} = D\xi.$$

Таким образом, получим следующее уравнение относительно p :

$$D\xi \cdot p \cdot (b-a) = (b-M\xi) \cdot (M\xi-a)^2 - D\xi \cdot (M\xi-a).$$

Решив уравнение относительно p , будем иметь [6]:

$$(20) \quad p = \frac{(b-M\xi) \cdot (M\xi-a)^2 - D\xi \cdot (M\xi-a)}{D\xi \cdot (b-a)}.$$

Подставив это значение в формулу (19), получим:

$$(21) \quad q = \frac{(b-M\xi)^2 \cdot (M\xi-a) - D\xi \cdot (b-M\xi)}{D\xi \cdot (b-a)}.$$

Формулы (20) и (21) дают возможность определить параметры бета-распределения при условии, что сумма двух случайных величин, распределенных по закону бета, даст также бета-распределение.

Аналогичным образом можно получить оценку параметров для любого числа слагаемых.

Выводы

В ходе работы получены следующие результаты:

1. Было экспериментально показано, что на величину оценки математического ожидания не влияют не только границы интервала $[a, b]$, но даже размах $b-a$. Для этой

оценки важны лишь такие характеристики, как мода и дисперсия.

2. Получено уравнение, позволяющее найти численную оценку математического ожидания на основе моды и дисперсии. Это уравнение определяется формулой (9).

3. Проведен сравнительный анализ методов, основывающихся на предположении о размахе распределения (2). В результате получили погрешности каждого метода для каждого значения моды.

4. На основании сравнительного анализа предложена аналитическая оценка математического ожидания (12). Она основывается на выборе той формулы, которая при данном значении моды будет давать наименьшую погрешность.

5. Определены значения параметров p и q через математическое ожидание и дисперсию. Это позволит проверить гипотезу о бета-распределении длительности всего проекта.

На основании данных результатов можно получить более точные оценки не только времени выполнения отдельной операции, но и длительности всего проекта в целом.

Литература

1. ГОЛЕНКО Д.И. *Статистические методы сетевого планирования и управления*. М.: Наука, 1968. – 400 с.
2. КОБЗАРЬ А.И. *Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников*-М.: Физматлит, 2006. – 816 с.
3. ОЛЕЙНИКОВА С. А. *Обобщение метода для оценки длительности работ в задачах сетевого планирования и управления* // Вестник ВГТУ. –2009 –Том 4 (№11). - с. 18-21.
4. ОЛЕЙНИКОВА С. А. *Сравнительный анализ подходов для оценки ожидаемого времени обслуживания в задачах сете-*

вого планирования и управления//Системы управления и информационные технологии. – 2009. – № 2(36). – с. 50–53.

5. ОЛЕЙНИКОВА С. А. Численная оценка времени обслуживания в задачах сетевого планирования и управления// Вестник ВГТУ. –2009 –Том 5 (№3). - с. 111-115.
6. ОЛЕЙНИКОВА С. А. Подходы к описанию длительности выполнения проекта в задачах сетевого планирования и управления// Новые технологии в научных исследованиях, проектировании, управлении, производстве: труды Всерос. конф. Воронеж: ГОУВПО «ВГТУ», 2009. - с. 72-73.

OPTIMIZATION OF THE PLANNING THE WORKING OF THE COMPLEX MULTISTAGE SYSTEM WITH CASUAL TIME OF SERVICING THE DEMANDS

Svetlana Oleynikova, Voronezh State Technical University
(osa@vmail.ru).

Abstract: The article devoted to the analysis of the existing defects of the decision the problems of network planning and management with casual time of servicing the demands, and modification of these methods, which allows to raise accuracy of estimates of duration of the service and plan-graph as a whole.

Keywords: network planning and management, PERT, average of distribution.