

УДК 519.21; 681.518
ББК 22.18

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ПРИЁМА И УВОЛЬНЕНИЯ СОТРУДНИКОВ

Белов М. В.¹
(Компания IBS, Москва)

Рассмотрены характеристики процесса жизненного цикла сотрудника (ЖЦС) в фирме – с момента поступления на работу до увольнения. Продемонстрирована существенность влияния характеристик ЖЦС на экономику фирмы. Показана невозможность высоко достоверного оценивания характеристик ЖЦС на основании наблюдений. Предложены процедуры статистического последовательного анализа для выявления момента изменения характеристик жизненного цикла сотрудников.

Ключевые слова: процесс увольнений, оценивание пуассоновских потоков, цензурированные выборки, последовательный критерий, разладка.

1. Введение. Актуальность проблемы.

Ключевым элементом любого бизнеса (фирмы, предприятия) являются сотрудники, поэтому вопросы управления человеческими ресурсами всегда находились и находятся в центре внимания и менеджеров-практиков, и исследователей. Значительное количество исследований посвящено не только работе с персоналом, вовлеченности, кадровому делопроизводству, но также экономике труда и учёту человеческих ресурсов (HR accounting) – см., например, [5,12,21,22,24]. В последние десятилетия популярной стала проблематика «управления человеческим капиталом» [18, 20, 23, 28, 27], подчёркивающая цен-

¹ Михаил Валентинович Белов, кандидат технических наук (mbelov@ibs.ru).

тральную роль персонала в любом бизнесе. Вместе с тем вопросы влияния характеристик деятельности сотрудников на экономический эффект¹, получаемый фирмой, изучены недостаточно полно.

Данная статья продолжает работы в области математического моделирования экономики человеческого капитала и жизненного цикла сотрудника [1, 2], а также изучения зависимости экономических эффектов бизнеса от этих факторов. Исследуется такой важный аспект бизнеса как движение сотрудников между фирмой и рынком труда, в частности, увольнения сотрудников по собственному желанию (в дальнейшем «увольнения», если не оговорено особо), предлагаются модели и методы исследования этого процесса.

Во втором разделе вводится математическая модель, и доказывается утверждение о зависимости экономических эффектов бизнеса от характеристик ЖЦС, в частности, вероятности принятия предложений о работе и распределения времени работы в фирме. Третий раздел посвящён модели процесса увольнений и непараметрическим методам его статистического анализа. В четвёртом разделе предлагаются методы статистического оценивания и анализа характеристик жизненного цикла сотрудников. В заключении обсуждаются полученные методы и приводятся примеры практического использования предлагаемых подходов. В Приложения П1-П4 вынесены выкладки, обосновывающие используемые соотношения.

¹ Экономический эффект, следуя современным экономическим подходам [3, 8, 16], понимается как разность между результатом экономической деятельности и затратами, произведенными для его получения.

2. Модель зависимости экономических эффектов бизнеса от характеристик жизненного цикла сотрудников

Будем представлять бизнес, как и в статьях [1, 2], в виде двух процессов с дискретным временем (дискреты времени будем называть интервалами):

- процесса продаж продукции или услуг, порождающего потребность в персонале;
- процесса движения персонала.

Персонал рассматриваем как организованную совокупность специалистов, обладающих определёнными знаниями, навыками, квалификацией и мотивированных на решение стоящих перед ними задач. Для описания процесса движения персонала (как и в [1, 2]) используем два понятия:

- «функциональных домов» (ФД) - групп специалистов, обладающих эквивалентными функциональными возможностями для решения бизнес-задач,
- жизненного цикла сотрудника, понимая под ним весь интервал времени с момента, когда сотрудник принял предложение о работе в фирме до момента его увольнения из фирмы.

Проиллюстрируем значимость исследуемого в работе фактора – характеристик ЖЦС - на примере стационарного бизнеса для случая единственного ФД. Стационарность бизнеса будем понимать как постоянство характеристик процессов продаж и движения персонала, то есть считаем среднюю потребность в персонале, интенсивность увольнений сотрудников и соответственно приёма – постоянными. Единственность ФД предполагает однородность предмета бизнеса (продукта или сервиса) и соответственно, однородность основного персонала. Запишем выражение для экономического эффекта V , получаемого за один интервал времени, сразу используя соотношение (5) из работы [1], полученное с учётом следующих ключевых предположений (сами предположения и адекватность их применения подробно обсуждены в [1]):

- стационарности условий бизнеса,
- статистической эквивалентности и независимости поведения сотрудников друг от друга и на различных интервалах времени.

$$V = n_{пред} \pi \sum_{\theta=0}^{\infty} (S(\theta) \varphi_{\theta}) - n_{пред} S_{пред} - n_{пред} \pi S_{найм} + V^*$$

где $n_{пред}$ - среднее количество предложений о работе кандидатам на приём актуальных в течение одного интервала времени;

π - вероятность того, что кандидат примет предложение в течение одного интервала времени;

φ_{θ} - доля сотрудников, отработавших фирме ровно θ интервалов времени с момента приёма на работу до увольнения, фактически функция $\{\varphi_{\tau}\}$ является функцией вероятности времени работы сотрудника в фирме;

$S(\theta)$ - средний экономический эффект за всё время работы сотрудника, отработавшего в фирме θ интервалов времени, равный его экономическому результату за минусом издержек на его содержание – компенсационного пакета, налогов и социальных выплат, затрат на обучение и других;

$S_{пред}$ - средние затраты на подготовку одного предложения о работе, включая поиск кандидатов;

$S_{зам}$ - средние затраты на замещение уволившегося сотрудника включая транзакционные издержки на оформление, начальную адаптацию и другие¹;

¹ В состав этих затрат также имеет смысл включать стоимость временного привлечения человеческих ресурсов на период поиска постоянных. Например, за счёт организации сверхурочных работ штатных сотрудников, или аутстаффинга, или временного найма фрилансеров. Аутстаффинг (англ. out – «вне» + staff – «штат») – способ управления персоналом, предполагающий оказание услуг в форме предоставления в распоряжение заказчика определенного числа работников, не вступающих с ним в какие-либо правовые отношения (гражданско-правовые, трудовые) напрямую, но оказывающих от

V^* - часть экономического эффекта компании, не зависящая непосредственно от персонала (например, затраты на сырье, электроэнергию и т.д.).

Очевидно, что $n_{пред}\pi$ будет равно среднему числу принимаемых на работу в течение каждого интервала новых сотрудников. А оно, в свою очередь, равно среднему числу увольняющихся в предположении стационарности процессов. $t_{cp} = \sum_{\theta=0}^{\infty} \theta \varphi_{\theta}$

- среднее время работы сотрудника в фирме,

$n_{пред}\pi t_{cp} = n_{пред}\pi \sum_{\theta=0}^{\infty} \theta \varphi_{\theta}$ - среднее число работающих сотрудников,

а $\sum_{\theta=0}^{\infty} (S(\theta) \varphi_{\theta})$ - средний эффект от сотрудника за весь период работы в фирме (усреднённый по длительности срока работы в фирме).

Важно заметить, что менеджмент фирмы, если он действует рационально, обеспечивает значение численности сотрудников как можно более близким к уровню, необходимому для выполнения всего объема деятельности соответственно объему продаж [1, 2]. Поэтому среднее число работающих сотрудников определяется потребностью со стороны продаж:

$$(1) \quad n_{пред}\pi t_{cp} = D$$

где D – средний объем продаж за интервал времени, отнесенный к средней результативности одного сотрудника, то есть объем продаж за интервал времени выраженный в количестве сотрудников, необходимых для его реализации, или средняя численность ФД, необходимая для реализации бизнеса данного объема.

Экономический эффект $S(\circ)$ от сотрудника за всё время работы в фирме, за весь жизненный цикл, складывается из эф-

имени исполнителя определенные услуги (работы) по месту нахождения заказчика. Фрилансер (англ. freelancer) – свободный работник, частный специалист.

фактов на каждом из интервалов $S(\theta) = \sum_{\tau=1}^{\theta} s(\tau)$ и в общем случае может быть представлен следующим образом. Жизненный цикл сотрудника логично разделить на три фазы – а) адаптации, б) продуктивной работы и в) предшествующей увольнению. Причём также логично предполагать, что экономический эффект сотрудника на фазах а) и в) ниже, чем на фазе продуктивной работы:

$$(2) \quad s(\tau) = \begin{cases} s_{np\partial} - \Delta s_{a\partial} & \text{при } 0 \leq \tau \leq t_{a\partial} \\ s_{np\partial} & \text{при } t_{a\partial} < \tau \leq \theta - t_{np.y\partial} \\ s_{np\partial} - \Delta s_{y\partial} & \text{при } \max\{t_{a\partial}; \theta - t_{np.y\partial}\} < \tau \leq \theta \end{cases}$$

где $s_{np\partial}$ - средний экономический эффект на продуктивной фазе;

$\Delta s_{a\partial}$ - среднее снижение эффекта на фазе адаптации;

$t_{a\partial}$ - длительность фазы адаптации;

$\Delta s_{y\partial}$ - среднее снижение эффекта на фазе, предшествующей увольнению;

$t_{np.y\partial}$ - продолжительность фазы, предшествующей увольнению.

Подставив (1) и (2) в выражение для экономического эффекта, получим (соответствующие выкладки приведены в приложении П1):

$$(3) \quad V = D s_{np\partial} - D \left(\Delta s_{a\partial} \frac{t_{a\partial}^*}{t_{cp}} + \Delta s_{y\partial} \frac{t_{np.y\partial}^*}{t_{cp}} + S_{зам} \frac{1}{t_{cp}} + \frac{S_{не\partial}}{\pi} \frac{1}{t_{cp}} \right) + V^*$$

$$\text{где } t_{a\partial}^* = \sum_{\theta=0}^{t_{a\partial}} \theta \varphi_{\theta} + t_{a\partial} \sum_{\theta=t_{a\partial}+1}^{\infty} \varphi_{\theta} \text{ и } t_{np.y\partial}^* = \sum_{\theta=t_{a\partial}+1}^{t_{a\partial}+t_{np.y\partial}} \theta \varphi_{\theta} + t_{np.y\partial} \sum_{\theta=t_{a\partial}+t_{np.y\partial}+1}^{\infty} \varphi_{\theta}$$

Проанализируем с помощью (3), как характеристики деятельности сотрудников влияют на экономический эффект фирмы V .

Третий элемент выражения (3) V^* не зависит от персонала и в дальнейшем рассматриваться не будет.

Первый элемент выражения (3) Ds_{npd} пропорционален объему продаж – требуемому количеству рабочих мест, замещённых сотрудниками, D , и среднему экономическому эффекту s_{npd} от сотрудника в течение одного интервала времени на продуктивной фазе. Требуемое количество рабочих мест D является внешним по отношению к деятельности сотрудников и потому не зависит от характеристик их деятельности. Средний экономический эффект s_{npd} зависит от результативности сотрудников, однако в рамках принятой концепции ФД как групп специалистов, обладающих эквивалентными функциональными возможностями, s_{npd} имеет смысл также считать постоянным, а отклонения учитывать через процесс увольнений (при возникновении недопустимого отклонения сотрудник увольняется по инициативе менеджмента фирмы), который рассмотрим дальше.

Второй элемент выражения (3) пропорционален D и сумме четырёх слагаемых, рассмотрим их.

Величины снижения эффекта Δs_{ad} и $\Delta s_{yв}$ в силу сделанного выше замечания об эквивалентности сотрудников также будем считать постоянными. Издержки на приём каждого сотрудника $S_{найм}$ и подготовку одного предложения о работе $S_{пред}$ не зависят от деятельности сотрудников. Фактически все эти параметры являются априорными нормативными характеристиками функциональных домов, которые в свою очередь определяются потребностями и характеристиками бизнеса.

Таким образом, в рамках принятой концепции ФД экономический эффект V , зависит от вероятности π и временных характеристик жизненного цикла сотрудников (ЖЦС) t_{ad}^* , $t_{np.yв}^*$ и t_{cp} , зависящих от t_{ad} , $t_{np.yв}$ и функции $\left\{ \varphi_{\theta}; \theta=0, 1, \dots, \infty; \sum_{\theta=0}^{\infty} \varphi_{\theta} \equiv 1 \right\}$.

Будем обозначать зависимость экономического эффекта от характеристик ЖЦС как $V(\pi, \{\varphi_{\theta}\}, t_{ad}, t_{np.yв})$. В приложении П2 выполнен анализ функции $V(\pi, \{\varphi_{\theta}\}, t_{ad}, t_{np.yв})$ от своих аргумен-

тов. Проинтерпретируем полученные свойства с точки зрения бизнеса.

Во-первых, $\frac{\partial}{\partial \pi} V(\pi, \{\varphi_\theta\}, t_{ad}, t_{np.ye}) > 0$. Причём при уменьшении π экономический эффект становится отрицательным, начиная с некоторых π . А при стремлении π к нулю V может неограниченно уменьшаться, будучи отрицательным $\lim_{\pi \rightarrow 0} \{V(\pi, \{\varphi_\theta\}, t_{ad}, t_{np.ye})\} = -\infty$. Содержательно это означает, что низкая эффективность процедур поиска и найма новых сотрудников (низкая доля кандидатов, принимающих предложение по сравнению с рассматриваемыми и приглашаемыми) – малые значения π – негативно сказывается на экономическом эффекте бизнеса V . Хотя, конечно же, неограниченное – неконтролируемое – уменьшение экономического эффекта, в том числе из-за неэффективного найма, является, скорее, исключением из правил.

Во-вторых, $\frac{\partial}{\partial t_{ad}} V(\pi, \{\varphi_\theta\}, t_{ad}, t_{np.ye}) < 0$ и

$\frac{\partial}{\partial t_{np.ye}} V(\pi, \{\varphi_\theta\}, t_{ad}, t_{np.ye}) < 0$. С точки зрения бизнеса монотонное

убывание экономического эффекта при росте продолжительности интервала адаптации и/или фазы снижения производительности, предшествующей увольнению, является интуитивно очевидным, так как это «вынужденные» фазы ЖЦС, основной эффект от сотрудника фирма получает не в течение них.

Вид функции вероятности времени работы сотрудников в фирме $\{\varphi_\theta\}$ влияет на экономический эффект более сложным образом, для исследования этого влияния использованы «малые вариации» $\delta\varphi_\theta(x, i)$. В приложении П2 показано, что влияние на экономический эффект «малых вариаций» $\delta\varphi_\theta(x, i)$ в области $0 \leq i < t_{ad} + t_{np.ye}$ проявляется неоднозначно. При длительности работы менее $t_{ad} + t_{np.ye}$ сотрудник не «успевает» достичь продуктивной фазы и, следовательно, произвести требуемый фирме эффект. Наличие таких сотрудников свидетельствует о неэф-

фективных процессах и найма, и адаптации, и удержания. То есть сотрудников, увольняющихся ранее $t_{ad} + t_{np.yв}$ интервалов должно быть как можно меньше, «в идеале» - ни одного. Поэтому детальный анализ экономики жизненного цикла таких сотрудников не имеет смысла – достаточно оценивать их долю и стремиться уменьшить эту долю.

Однако для «малых вариаций» в области времени работы больше $t_{ad} + t_{np.yв}$ справедливо $\frac{\partial}{\partial t_{cp}} V(\pi, \{\varphi_\theta\}, t_{ad}, t_{np.yв}) > 0$ (вообще говоря, независимо от вида функции вероятности времени работы в фирме $\{\varphi_\theta\}$), что также соответствует логике бизнеса: увеличение среднего времени работы в этом случае увеличивает относительную продолжительность продуктивной фазы по отношению к общей продолжительности ЖЦС.

Выполненный анализ выражения (3) для экономического эффекта легко расширяется на случай нескольких функциональных домов, а также на случай известного нестационарного процесса $D(t)$ изменения потребности в персонале, необходимом для реализации всех продаж.

Таким образом, на основании выполненного анализа можно сформулировать **утверждение 1** «О зависимости экономического эффекта фирмы от характеристик жизненного цикла сотрудников в рамках концепции функциональных домов»:

Экономический эффект фирмы (независимо от вида функции вероятности времени работы сотрудников фирмы до увольнения по собственному желанию) монотонно возрастает при:

- увеличении вероятности того, что кандидат принимает предложение о приеме на работу;
- уменьшении длительности фазы адаптации и длительности фазы, предшествующей увольнению;
- увеличении среднего времени работы в фирме (за счет изменения вероятностей увольнения позднее суммарной длительности фазы адаптации и фазы, предшествующей увольнению).

Сформулированное утверждение 1 иллюстрирует важность оперативного контроля характеристик ЖЦС для обеспечения

эффективного функционирования фирмы, то есть актуальность задачи моделирования и контроля характеристик ЖЦС, поставленной во введении.

3. Модель процесса увольнения и непараметрические методы его анализа

Рассмотрим более детально процесс увольнений сотрудников из функционального дома с точки зрения отвечающего за него менеджера.

ФД дом рассматривается как пул эквивалентных и статистически независимых сотрудников, численность которых необходимо поддерживать на требуемом (в общем случае меняющимся со временем) уровне. То есть, в случае увольнения сотрудника по собственному желанию его место необходимо восполнять в течение «малого» промежутка времени, что в целом должно пренебрежимо мало сказываться на значении численности. Адекватной метафорой в данном случае является следующая: ФД состоит из эквивалентных функциональных ролей, каждая из которых постоянно (с точностью до пренебрежимо малых промежутков времени, необходимых для замены увольняющегося сотрудника) заполнена сотрудниками, поведение которых статистически эквивалентно и независимо друг от друга. Тогда с точки зрения менеджера события увольнений сотрудников, занимающих каждую из ролей, образуют независимые, возможно, нестационарные, потоки (для краткости будем называть их «р-потоки»). С хорошей степенью точности суммарный поток – поток увольнений из ФД в целом – можно аппроксимировать пуассоновским. Адекватность такой аппроксимации следует, во-первых, из свойств р-потоков, во-вторых, из теорем [6, 7, 9] о сходимости суммы независимых потоков. В частности, ([9] теорема 2) сумма взаимно независимых ординарных нестационарных равномерно ограниченных потоков со слабым последствием сходится при увеличении их числа к пуассоновскому потоку. Очевидно, р-потоки обладают свойством ординарности (вероятность наступления двух и более со-

бытий на малом интервале времени исчезающе мала по сравнению с вероятностью наступления одного и более событий). С хорошей точностью р-потoki можно считать равномерно ограниченными (суммарная интенсивность в любой момент времени ограничена) и обладающими слабым последствием (отношение условной интенсивности к безусловной ограничено и сверху, и снизу).

Так как менеджер знает, в какой момент t_d произошло предыдущее увольнение в каждой из функциональных ролей (событие р-потoka), в каждый момент времени t можно определить интенсивность соответствующего р-потoka:

$$\lambda_d(t) = \varphi_{t-t_d} \left(\sum_{\theta=t-t_d}^{\infty} \varphi_{\theta} \right)^{-1}, \text{ используя функцию вероятности време-}$$

ни работы сотрудника $\{\varphi_{\theta}\}$. Тогда поток увольнений из ФД аппроксимируется пуассоновским с интенсивностью равной суммарной интенсивности р-потокoв:

$$(4) \quad \Lambda(t) = \sum_{d=1}^{N_t} \lambda_d(t) = \sum_{d=1}^{N_t} \varphi_{t-t_d} \left(\sum_{\theta=t-t_d}^{\infty} \varphi_{\theta} \right)^{-1}$$

Пуассоновская аппроксимация и выражение (4) для суммарной интенсивности потока удобны для получения и аналитического исследования различных зависимостей. Однако их использование затрудняется тем, что, функция $\{\varphi_{\theta}\}$ вероятности времени работы сотрудника априори не известна и основывается не на объективных фундаментальных закономерностях, а на активном выборе субъектов-сотрудников. То есть, функцию $\{\varphi_{\theta}\}$ (или её характеристики) необходимо оценивать на основании наблюдений. Кроме того, есть основания считать, что бизнес-условия отличаются определённой изменчивостью: можно говорить о существовании сменяющих друг друга периодов стационарности с характерной продолжительностью в нескольких лет, что принципиально ограничивает доступные интервалы наблюдений и объёмы получаемых данных.

Поэтому рассмотрим методики оценивания характеристик процесса увольнения и использования оценок для анализа эконо-

номического эффекта фирмы. Функции вероятности $\{\varphi_\theta\}$ наиболее полно характеризует процесс увольнений, поэтому рассмотрим возможность непосредственно оценивания её значений.

Известно, что в общем случае выборочная функция распределения случайной величины сходится почти наверное к теоретической функции распределения (теорема Гливенко – Кантелли, например, [13]), а также является её асимптотически нормальной оценкой со скоростью убывания величины доверительного интервала обратно пропорционально квадратному корню объема выборки (теорема Колмогорова, например, [13]).

Однако для оценивания функции вероятности времени работы в фирме целесообразно использовать процедуру, предложенную в классической работе [25] для анализа «выживаемости» на основе цензурированных данных, широко применяемую и известную сейчас как «процедура Каплана-Мейера» [11]. Процедура позволяет получить оценку «функции выживания», равной вероятности того, что увольнение сотрудника произойдёт позже t интервалов времени с момента прихода в фирму

$$(\Phi(t) = \sum_{\theta=t+1}^{\infty} \varphi_\theta).$$

Процедура [25, 11] заключается в следующем:

На временной оси своими границами задаются интервалы $(0, u_1); (u_1, u_2); \dots; (u_{j-1}, u_j); \dots; (u_{J-1}, u_J)$.

На основании наблюдений формируется выборка $\{n_1; n_2; \dots; n_j; \dots; n_J\}$, где n_j - количество сотрудников, проработавших в фирме время, не меньшее u_{j-1} . Среди n_j будут и сотрудники продолжающие работать в фирме, стаж которых на момент наблюдений не меньше u_{j-1} , и уже уволившиеся, но стаж которых на момент увольнения был не меньше u_{j-1} . Аналогично формируется выборка $\{m_1; m_2; \dots; m_j; \dots; m_J\}$, где m_j - количество сотрудников, у которых стаж работы на момент

увольнения принадлежал интервалу (u_{j-1}, u_j) . Тогда оценка

«функции выживания» будет иметь вид $\Phi(t) = \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{m_j}{n_j}\right)$,

где $k = \max_{u_j \leq t} \{u_j\}$. Данная оценка является состоятельной и не-

смещённой, с дисперсией $\text{var}[\Phi(t)] = \Phi^2(t) \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n_j - m_j} - \frac{1}{n_j}\right)$

[25], то есть относительный доверительный интервал оценки $\Phi(t)$ изменяется с ростом объема выборки как

$$\sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n_j - m_j} - \frac{1}{n_j}\right)}.$$

«Функция выживания» связана с интенсивностью соотношением:

$$\lambda(t) = \varphi_t \left(\sum_{\theta=t}^{\infty} \varphi_{\theta} \right)^{-1} = \varphi_t \Phi(t-1)^{-1} = 1 - \Phi(t) \Phi(t-1)^{-1}.$$

Поэтому выражение для оценки интенсивности $\lambda(t)$, которое может быть получено с помощью процедуры Каплана-Мейера, совпадает с «прямой» оценкой интенсивности $\lambda(t) = 1 - \Phi(t) \Phi(t-1)^{-1} =$

$$= 1 - \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{m_j}{n_j}\right) \left(\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{m_j}{n_j}\right) \right)^{-1} = \frac{m_k}{n_k}.$$

Оценка интенсивности $\lambda(t) = \frac{m_k}{n_k}$ также является несмещённой и состоятельной с дисперсией $\text{var}[\lambda(t)] = \lambda(t)(1 - \lambda(t))n_k$. Соответственно, относительный доверительный интервал меняется пропорционально

$$\sqrt{\frac{(1 - \lambda(t))}{\lambda(t)n_k}} \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda(t)n_k}}.$$

Так как математические ожидания выборочных значений $E[n_k] = N\Phi(t-1) = N \sum_{\theta=t}^{\infty} \varphi_{\theta}$ и $E[m_k] = N\varphi_t$, то характер зависимости от t и N относительных доверительных интервалов обеих

оценок имеет вид $\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^t \left(\frac{\varphi_j}{\sum_{\theta=j}^{\infty} \varphi_{\theta} \sum_{\theta=j+1}^{\infty} \varphi_{\theta}} \right)}$ и $(N\varphi_t)^{-1/2}$, то есть за-

метно растёт при длительных сроках работы сотрудников даже при значительных объемах выборки (потому что φ_t существенно убывает с ростом t). Например, для геометрического распределения времени работы $\varphi_t = \varphi(1-\varphi)^{t-1}$ зависимость относительных доверительных интервалов от t и N будут иметь характер $O\left(N^{-1/2} (1-\varphi)^{-t/2}\right)$ для обеих рассматриваемых оценок - и для функции выживания, и для интенсивности.

Из этого следует, что идентифицировать функцию $\{\varphi_{\theta}\}$ с приемлемой точностью для больших времён в принципе невозможно: отмеченная выше изменчивость бизнес-условий не позволит «накопить настолько большие N , которые обеспечили бы приемлемо малые значения $(N\varphi_t)^{-1/2}$ ». Данный тезис иллюстрируется графиками оценок интенсивностей увольнения сотрудников двух российских фирм («фирма А» и «фирма Б») из различных индустрий (рис. 1 и 2).

На обоих графиках вертикальная ось соответствует интенсивности увольнений в течение одного интервала времени, интервалы времени отложены по горизонтальной оси. Штриховой линией показаны оценки интенсивности, более тонкими сплошными линиями – верхняя и нижняя границы доверительных интервалов, принятых в иллюстративных целях равными плюс-минус три среднеквадратичных отклонения.

На Рис. 1, «фирма А», интервал времени соответствует 1 неделе, а численность сотрудников рассматриваемого ФД имеет порядок 50-70 тысяч человек.

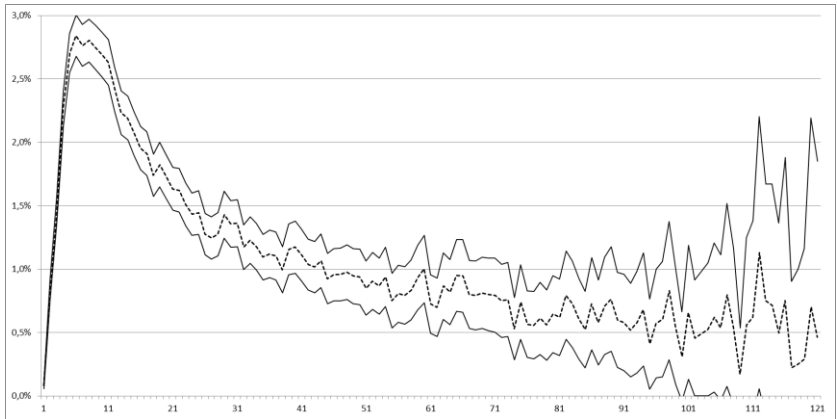


Рис. 1. Оценка интенсивности увольнений и её доверительный интервал для «фирмы А».

Количество увольняющихся на начальных интервалах имеет порядок несколько тысяч человек в течение одного интервала, спадает до сотен и далее до десятков человек. Это позволяет получить относительно точную оценку для первых 20-30 интервалов. Начиная со значений стажа 90-100 интервалов, количество увольнений в выборке уменьшается до десяти-двадцати, что приводит к тому, что доверительный интервал становится вдвое больше самого значения оценки. Такую оценку вряд ли можно считать достоверной.

Во втором случае, «фирма Б», интервал времени соответствует одному месяцу, численность сотрудников имеет порядок 8-10 тысяч человек. В результате существенно меньшее количество увольняющихся в течение одного интервала времени значительно ухудшает точность оценки даже для малых значений стажа.

Это означает, что даже для фирм с численностью однородных сотрудников в несколько десятков тысяч человек возможности точного оценивания функции вероятности времени работы сотрудников являются ограниченными: относительно достоверно могут быть оценены интенсивности увольнений только

для малых значений стажа сотрудников, когда доля таких сотрудников относительно велика, а для больших значений стажа оценки становятся мало достоверными.

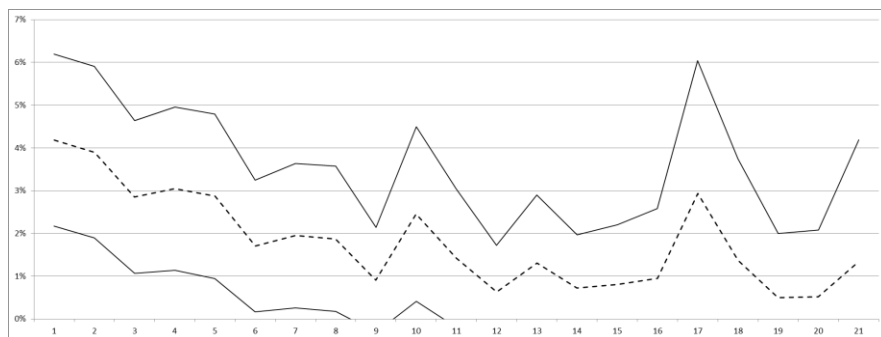


Рис. 2. Оценка интенсивности увольнений и её доверительный интервал для «фирмы Б».

Практическое следствие этого заключается в том, что непосредственно функция вероятности (или функция интенсивности) увольнений сотрудников может использоваться для анализа и принятия управленческих решений только для относительно малых длительностей стажа работы сотрудников. Но в разделе 2 выше было показано, что количество сотрудников, увольняющихся при малых значениях стажа должно быть как можно меньше, в идеальном случае – их вообще не должно быть. Поэтому достоверное оценивание и детальный анализ функции вероятности для малых значениях стажа может использоваться для анализа именно этой группы сотрудников и принятия управленческих решений с целью уменьшения их доли. В частности уместно использование для этого регрессионных методик Кокса [19] для анализа факторов, влияющих на «ранние увольнения».

Во всех иных случаях целесообразно использовать другие статистические инструменты, рассмотрим их в следующем разделе.

4. Последовательная задача выявления изменения характеристик жизненного цикла сотрудников

Конечной целью деятельности практического менеджера, отвечающего за ФД, является обеспечение его экономической эффективности на определённом промежутке времени. Данная задача была решена в постановке поиска равновесных оптимальных решений [1] и для стационарных условий [2]. Для обеспечения этих решений необходимо контролировать стационарность процессов ЖЦС сотрудников, рассмотрим эту задачу в последовательной постановке. Выше было отмечено, что бизнес-условия на длительном периоде не могут считаться стационарными: для бизнес-среды свойственны периодические смены ключевых факторов - переходы от одного периода стационарности к другому. Поэтому, безусловно, важной с практической точки зрения является задача как можно более оперативного и в то же время достоверного выявления таких переходов.

Рассмотрим задачу оптимального обнаружения момента изменения («разладки») характеристик жизненного цикла сотрудников (вероятности π и функции вероятности $\{\phi_\theta\}$) в рамках моделей, представленных в разделах 1 и 2. Считаем, что до разладки характеристики ЖЦС имели одни постоянные значения, а после – другие, также постоянные. Характеристики ЖЦС ни до, ни после разладки априори неизвестны, а их значения должны быть оценены на основании наблюдений за процессами ζ_t^1 - приема новых сотрудников и ζ_t^2 - увольнения сотрудников по собственному желанию. Сохраним предположение о статистической эквивалентности и независимости поведения сотрудников друг от друга и на различных интервалах времени. Априори имеются наблюдения в течение предварительного промежутка времени, про который известно, что весь он относится к единому периоду стационарности условий бизнеса. На основании накопленных в течение предварительного промежутка наблюдений характеристики ЖЦС должны быть оценены, а начиная с текущего момента необходимо на основании опера-

тивных наблюдений последовательно принимать решение о наличии или отсутствии разладки.

Учитывая вывод, сделанный в заключении раздела 3, о невозможности достоверной идентификации функции вероятности $\{\varphi_\theta\}$, процесс увольнений ζ_t^2 будем рассматривать не детально, по каждому сотруднику, а агрегировано – по всему функциональному дому в целом. В качестве характеристик ЖЦС будем использовать – интенсивность потока увольнений в целом

$$\lambda(t) = \varphi_t \left(\sum_{\theta=t}^{\infty} \varphi_\theta \right)^{-1}, \text{ идентифицировать стационарные значения}$$

интенсивности и выявлять их изменения. Очевидно, при таком подходе – преднамеренном «загрублении модели» теряется некоторая информация, которая теоретически могла бы быть учтена, если бы функция вероятности $\{\varphi_\theta\}$, была достоверно известна, однако на практике эта потеря неизбежна.

Наблюдаемые процессы определяют изменения фактической численности N_t (также наблюдаемой) ФД во времени (некоторые свойства N_t приведены в приложении П3):

$$(5) \quad N_{t+1} = N_t + \zeta_t^1 - \zeta_t^2$$

где ζ_t^1 – последовательность независимых случайных величин, распределённых также биномиально с параметрами $n_{пред}(t)$ и $\pi(t)$ и отражающих процесс найма сотрудников, ζ_t^2 – последовательность независимых случайных величин с пуассоновским распределением с параметром $\Lambda_t = \lambda(t)N_t$, отражающих процесс увольнений.

Тогда формально задача выявления разладки может быть поставлена следующим образом: ненаблюдаемый двумерный процесс $x(t) = (\pi(t); \lambda(t))^T$ изменяет свои значения в априори неизвестные моменты времени, сохраняя значения постоянными между моментами изменений. Необходимо обнаруживать момент изменения значений процесса $x(t)$ на основании последовательных наблюдений процесса $\zeta_t = (\zeta_t^1; \zeta_t^2)^T$, связанного с $x(t)$ закономерностями, описываемыми соотношениями (5). Началь-

ное значение процесса $x(t)$ должно быть идентифицировано на основании ζ_t в течение предварительного периода наблюдений длительностью T_{anp} (условно в моменты времени - T_{anp} ; - $T_{anp} + 1$; - $T_{anp} + 2$; ...; 0)

Для решения будем использовать оценки максимального правдоподобия.

Введём обозначения:

$$\zeta_{[u,v]}^1 = \sum_{\tau=u}^v \zeta_{\tau}^1; \quad \zeta_{[u,v]}^2 = \sum_{\tau=u}^v \zeta_{\tau}^2; \quad n_{npod[u,v]} = \sum_{\tau=u}^v n_{npod}(\tau); \quad N_{[u,v]} = \sum_{\tau=u}^v N_{\tau}$$

Оценка $(\hat{\pi}_0; \hat{\lambda}_0)^T$ начального значения процесса $x(t)$ с учётом (5) имеет следующий вид и характеристики:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_0 &= \left(n_{npod[-T_{anp}; 0]} \right)^{-1} \zeta_{[-T_{anp}; 0]}^1; \quad E[\hat{\pi}_0] = \pi_0; \\ var[\hat{\pi}_0] &= \pi_0 (1 - \pi_0) \left(n_{npod[-T_{anp}; 0]} \right)^{-1} \\ \hat{\lambda}_0 &= \left(N_{[-T_{anp}; 0]} \right)^{-1} \zeta_{[-T_{anp}; 0]}^2; \quad E[\hat{\lambda}_0] = \lambda_0; \\ var[\hat{\lambda}_0] &= \lambda_0 \left(N_{[-T_{anp}; 0]} \right)^{-1}; \quad cov[\hat{\pi}_0; \hat{\lambda}_0] = 0 \end{aligned}$$

Имеет смысл отметить, что в практически интересных случаях величины $n_{npod[-T_{anp}; 0]}$; $\zeta_{[-T_{anp}; 0]}^1$; $N_{[-T_{anp}; 0]}$ и $\zeta_{[-T_{anp}; 0]}^2$ имеют порядок нескольких сотен, поэтому распределения обеих величин $\zeta_{[-T_{anp}; 0]}^1$ и $\zeta_{[-T_{anp}; 0]}^2$ хорошо аппроксимируются нормальными, а оценка $(\hat{\pi}_0; \hat{\lambda}_0)^T$ является несмещённой и состоятельной.

Решение о выявлении разладки в каждый момент времени t фактически заключается в проверке семейства гипотез $\mathbf{H}_{\tau}$ о том, что разладка произошла в момент времени $t - \tau$ ($\tau \geq 1$) против гипотезы $\mathbf{H}_0$, что разладки не было.

Тогда последовательный критерий выявления разладки на основе относительного правдоподобия может быть построен в следующем виде:

$$(6) \quad \begin{cases} H_0: \max_{\theta} \left\{ \ln \left(\Pr \left(\left(\zeta_{[-T_{анп};t]}^1; \zeta_{[-T_{анп};t]}^2 \right); t; \theta \right) \right) \right\} \leq C; \\ H_{\tau}: \max_{\theta} \left\{ \ln \left(\Pr \left(\left(\zeta_{[-T_{анп};t]}^1; \zeta_{[-T_{анп};t]}^2 \right); t; \theta \right) \right) \right\} > C; \\ \tau = \arg \left\{ \max_{\theta} \left\{ \ln \left(\Pr \left(\left(\zeta_{[-T_{анп};t]}^1; \zeta_{[-T_{анп};t]}^2 \right); t; \theta \right) \right) \right\} \right\} \end{cases}$$

где $\ln \left(\Pr \left(\left(\zeta_{[-T_{анп};0]}^1; \zeta_{[-T_{анп};0]}^2 \right); t; \theta \right) \right)$ - логарифмическая функция относительного правдоподобия (л.ф.о.п.) вычисленная в момент времени t на основании наблюдений на интервале $[-T_{анп};t]$ для пары событий: а) что разладка произошла в момент времени $t - \theta$; и б) разладка до текущего момента не произошла. Л.ф.о.п. может быть записана также в виде суммы $\ln(\Pr(\bullet)) = \sum_{\omega=t-\theta}^t \Delta l(\omega)$, где $\Delta l(\omega)$ - частные л.ф.о.п. на каждом интервале времени ω .

Используя функции $\Delta l(\omega)$, образуем критерий, эквивалентный (6), но имеющий иной вид, традиционно используемый в задачах о разладке (см. например, [10, 14, 15, 17, 26]):

$$(7) \quad \begin{cases} L(t) = \max \{0; L(t-1) + \Delta l(t)\}; \quad L(0) = 0 \\ H_0: L(t) \leq C; \\ H_{\tau}: L(t) > C; \quad \tau = \arg \left\{ \min_{\theta} \{L(t-\theta) = 0\} \right\} \end{cases}$$

Исследование характеристик последовательных критериев (ошибок первого и второго рода в последовательной интерпретации) всегда является трудной задачей, что отмечается всеми исследователями, начиная с основополагающей работы Вальда [4]. К текущему моменту накоплено значительное количество результатов в области последовательного анализа и предложены различные методики, имеющие практическое значение, напри-

мер, в работах [10, 14, 15, 17, 26]. В частности, в [10] разбирается проблематика получения аналитических выражений характеристик критериев, аналогичных (7), и отмечается невозможность получения для них точных аналитических выражений. Вместе с тем, в [10] предлагаются (стр.67, (4.2.14-16)) граничные оценки для среднего времени между ложными выявлениями разладки и среднего времени от момента наступления разладки до момента её выявления. Упомянутые граничные оценки основываются на значениях первых и вторых моментов приращений решающих функций $\Delta l(t)$ до и после разладки, когда $\Delta l(t)$ являются независимыми нормально распределёнными случайными величинами.

Как правило, при отсутствии разладки математические ожидания значений процесса $\Delta l(t)$ отрицательны, а после наступления разладки – положительны, соответственно, до разладки процесс $L(t)$ образует супермартингал, а после – субмартингал. В этих условиях для границ каждой из характеристик критерия – $T_{лм}$ среднего времени между ложными выявлениями разладки и $T_{с.р.}$ среднего времени от момента наступления разладки до момента её выявления могут быть получены аналитические выражения.

Введём (используя выражения (4.2.14-16) из [10], стр.67) функцию $a(m, h)$, зависящую от нормированного математического ожидания m и порога критерия h , имеющую вид

$$a(m, h) = \frac{1}{2m^2} (e^{-2mh} - 1 + 2mh) + \frac{\varphi(m)}{m\Phi(m)} + 1, \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{и } \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(\chi) d\chi.$$

Функция $a(m, h)$ позволяет получить следующие граничные значения характеристик каждого из критериев, подставляя моменты процесса $\Delta l(t)$:

$$(8) \quad \begin{aligned} T_{\text{лп}} &> a \left(\frac{E[\Delta l(t)|H_0]}{\sqrt{\text{var}[\Delta l(t)|H_0]}}; \frac{C}{\sqrt{\text{var}[\Delta l(t)|H_0]}} \right) \\ T_{\text{в.р.}} &< a \left(\frac{E[\Delta l(t)|H_r]}{\sqrt{\text{var}[\Delta l(t)|H_r]}}; \frac{C}{\sqrt{\text{var}[\Delta l(t)|H_r]}} \right). \end{aligned}$$

Выражения (8) позволяют получить оценки характеристик критериев и выбрать параметры критерия - порог принятия решения C и уровень γ ожидаемого изменения характеристик ЖЦС.

Следует заметить, что решение задачи происходит в условиях, когда значения изменений процесса $x(t)$ априори неизвестны. Практически значимым является выявление увеличения интенсивности увольнений $\hat{\lambda}_0 \rightarrow \hat{\lambda}_0 + \Delta\lambda$ и снижение вероятности принятия предложений $\hat{\pi}_0 \rightarrow \hat{\pi}_0 - \Delta\pi$. При этом не всегда имеются априорные основания, рассматривать одновременные изменений обеих компонентов - $\Delta\pi$ и $\Delta\lambda$, в общем случае следует считать, что они могут меняться независимо. Поэтому рассмотрим несколько сценариев изменения характеристик ЖЦС – в одном или нескольких функциональных домах, независимое или одновременное изменение $\hat{\lambda}_0 \rightarrow \hat{\lambda}_0 + \Delta\lambda$ и $\hat{\pi}_0 \rightarrow \hat{\pi}_0 - \Delta\pi$, соответственно, несколько вариантов построений приращений решающей функции $\Delta l(t)$.

Сценарий 1. Выявление независимых изменений характеристик ЖЦС $\hat{\lambda}_0 \rightarrow \hat{\lambda}_0 + \Delta\lambda$ и $\hat{\pi}_0 \rightarrow \hat{\pi}_0 - \Delta\pi$ одного функционального дома, причём детектировать относительно существенные изменения, не менее чем, скажем, на $\gamma=10\%$. В этом случае задача естественным образом распадается на две параллельные задачи – выявления изменения $\{\hat{\pi}_0 \rightarrow (1-\gamma)\hat{\pi}_0; \gamma \geq 0,1\}$ на основании наблюдений за $\zeta_{[-T_{\text{анп}}; t]}^1$ и $\{\hat{\lambda}_0 \rightarrow (1+\gamma)\hat{\lambda}_0; \gamma \geq 0,1\}$ – на основании $\zeta_{[-T_{\text{анп}}; t]}^2$. Тогда вместо критерия (7) используются два параллельных и независимых, имеющих вид (7), но отличаю-

щихся значениями порогов C_1 и C_2 , а также видом функций частных л.ф.о.п.:

$$\Delta l^1(t) = \zeta_t^1 \ln(1-\gamma) + (n_{пред,t} - \zeta_t^1) \ln\left(1 + \frac{\gamma \hat{\pi}_0}{1 - \hat{\pi}_0}\right)$$

$$\Delta l^2(t) = \zeta_t^2 \ln(1+\gamma) - N_t \hat{\lambda}_0 \gamma$$

Каждый из процессов $\Delta l^1(t)$, $\Delta l^2(t)$ образует последовательность независимых случайных величин, распределение которых адекватно аппроксимируется нормальным с параметрами:

$$E[\Delta l^1(t)] = E[\zeta_t^1] \ln\left(\frac{(1-\gamma)(1-\hat{\pi}_0)}{1-\hat{\pi}_0 + \gamma \hat{\pi}_0}\right) + n_{пред,t} \ln\left(\frac{1-\hat{\pi}_0 + \gamma \hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right);$$

$$var[\Delta l^1(t)] = \left(\ln\left(\frac{(1-\hat{\pi}_0)(1-\gamma)}{1-\hat{\pi}_0 + \gamma \hat{\pi}_0}\right)\right)^2 var[\zeta_t^1];$$

$$E[\Delta l^2(t)] = E[\zeta_t^2] \ln(1+\gamma) - N_t \hat{\lambda}_0 \gamma;$$

$$var[\Delta l^2(t)] = (\ln(1+\gamma))^2 var[\zeta_t^2];$$

Сценарий 2. Выявление одновременных изменений характеристик ЖЦС $\hat{\lambda}_0 \rightarrow \hat{\lambda}_0 + \Delta\lambda$ и $\hat{\pi}_0 \rightarrow \hat{\pi}_0 - \Delta\pi$ одного функционального дома, также на $\gamma=10\%$. Если есть веские основания полагать, что изменения $\Delta\pi$ и $\Delta\lambda$ произойдут одновременно $\{\hat{\lambda}_0 \rightarrow (1+\gamma)\hat{\lambda}_0; \hat{\pi}_0 \rightarrow (1-\gamma)\hat{\pi}_0; \gamma \geq 0,1\}$, то решение принимается на основании единственного критерия, в котором функция частных л.ф.о.п. имеет вид:

$$\Delta l(t) = \Delta l^1(t) + \Delta l^2(t) =$$

$$= \zeta_t^1 \ln(1-\gamma) + (n_{пред,t} - \zeta_t^1) \ln\left(1 + \frac{\gamma \hat{\pi}_0}{1 - \hat{\pi}_0}\right) + \zeta_t^2 \ln(1+\gamma) - N_t \hat{\lambda}_0 \gamma$$

где первые два слагаемые детектируют уменьшение вероятности $\hat{\pi}_0 \rightarrow \hat{\pi}_0 - \Delta\pi$, а вторые два – увеличение интенсивности $\hat{\lambda}_0 \rightarrow \hat{\lambda}_0 + \Delta\lambda$.

Процесс $\Delta l(t)$, образует последовательность независимых случайных величин, распределение которых адекватно аппроксимируется нормальным с параметрами:

$$E[\Delta l(t)] = E[\Delta l^1(t)] + E[\Delta l^2(t)];$$

$$\text{var}[\Delta l(t)] = \text{var}[\Delta l^1(t)] + \text{var}[\Delta l^2(t)];$$

Сценарий 3. Практически интересными является случай, когда фирма состоит из существенного числа ФД, причём есть бизнес-основания считать, что в нормальном состоянии характеристики ЖЦС всех ФД эквивалентны. А разладкой считается появление аномалий в поведении сотрудников отдельных ФД независимо по $\hat{\lambda}_0 \rightarrow \hat{\lambda}_0 + \Delta\lambda$ и $\hat{\pi}_0 \rightarrow \hat{\pi}_0 - \Delta\pi$, в то время, как в нормальном состоянии такое поведение стационарно по времени и идентично для всех ФД. То есть, для каждого i -го ($i = 1, 2, \dots, I$) функционального дома необходимо проверять семейство гипотез $\mathbf{H}_\tau$ о том, что начиная с момента времени $t - \tau$ ($\tau \geq 1$) характеристики ЖЦС данного ФД стали отличаться от характеристик ЖЦС всех остальных ФД против гипотезы $\mathbf{H}_0$, что характеристики ЖЦС данного ФД равны характеристикам ЖЦС всех остальных ФД. В этом случае для всех ФД целесообразно сформировать частные л.ф.о.п. $\Delta l_i^{1,2}(t)$ на каждом интервале времени и применять критерий вида (7). Рассмотрим вид частных л.ф.о.п. $\Delta l_i^1(t)$ и $\Delta l_i^2(t)$ в этом случае, аналогично сценарию 1.

$$\Delta l_i^1(t) = \zeta_{i,t}^1 \ln(1 - \gamma) + (n_{\text{пред},i,t} - \zeta_{i,t}^1) \ln \left(1 + \frac{\gamma \hat{\pi}_{0,i}}{1 - \hat{\pi}_{0,i}} \right);$$

$$\Delta l_i^2(t) = \zeta_{i,t}^2 \ln(1 + \gamma) - N_{i,t} \hat{\lambda}_{0,i} \gamma;$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_{0,i} &= \left(\sum_{j \neq i} n_{nped,j}[-T_{anp};0] \right)^{-1} \sum_{j \neq i} \zeta_{j,-T_{anp};0}^1; \quad E[\hat{\pi}_{0,i}] = \pi_0; \\ var[\hat{\pi}_{0,i}] &= \pi_0(1-\pi_0) \left(n_{nped,i}[-T_{anp};0] \right)^{-1} \\ \hat{\lambda}_{0,i} &= \left(\sum_{j \neq i} N_{j,-T_{anp};0} \right)^{-1} \sum_{j \neq i} \zeta_{j,-T_{anp};0}^2; \quad E[\hat{\lambda}_{0,i}] = \lambda_0; \\ var[\hat{\lambda}_{0,i}] &= \lambda_0 \left(N_{i,-T_{anp};0} \right)^{-1}; \quad cov[\hat{\pi}_0; \hat{\lambda}_0] = 0\end{aligned}$$

Выражения для моментов $\Delta l_i^1(t)$ и $\Delta l_i^2(t)$ также аналогичны выражениям, приведённым для сценария 1.

Сценарий 4. Множество ФД и одновременное изменение $\hat{\lambda}_0 \rightarrow \hat{\lambda}_0 + \Delta\lambda$ и $\hat{\pi}_0 \rightarrow \hat{\pi}_0 - \Delta\pi$. Для этого случая частные л.ф.о.п. равны $\Delta l_i(t) = \Delta l_i^1(t) + \Delta l_i^2(t)$, а их моменты аналогичны сценарию 2.

$$\begin{aligned}\Delta l(t) &= \Delta l^1(t) + \Delta l^2(t) = \\ &= \zeta_t^1 \ln(1-\gamma) + (n_{nped,t} - \zeta_t^1) \ln \left(1 + \frac{\gamma \hat{\pi}_0}{1 - \hat{\pi}_0} \right) + \zeta_t^2 \ln(1+\gamma) - N_t \hat{\lambda}_0 \gamma\end{aligned}$$

Покажем теперь, что для каждого из сценариев решающие функции до разладки образуют супермартингалы, а после неё – субмартингалы.

Если условия в действительности отвечают условиям гипотезы $\mathbf{H}_0$, то есть $x(u) = (\hat{\pi}_0; \hat{\lambda}_0)^T$ при всех $-T_{anp} \leq u \leq t$ тогда моменты процессов $\Delta l_1(t)$ и $\Delta l_2(t)$ принимают значения $(\Delta l_i^1(t))$ и $\Delta l_i^2(t)$ - аналогично):

$$E\left[\Delta l^1(u)\middle|H_0\right]=\left(\ln(1-\gamma)\hat{\pi}_0+\ln\left(1+\frac{\gamma\hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right)(1-\hat{\pi}_0)\right)n_{преду};$$

$$var\left[\Delta l^1(u)\middle|H_0\right]=\left(\ln\left(\frac{(1-\gamma)(1-\hat{\pi}_0)}{1-\hat{\pi}_0+\gamma\hat{\pi}_0}\right)\right)^2\hat{\pi}_0(1-\hat{\pi}_0)n_{преду};$$

$$E\left[\Delta l^2(u)\middle|H_0\right]=(\ln(1+\gamma)-\gamma)N_u\hat{\lambda}_0;$$

$$var\left[\Delta l^2(u)\middle|H_0\right]=(\ln(1+\gamma))^2N_u\hat{\lambda}_0$$

И математическое ожидание любого из процессов $\Delta l^1(t)$, $\Delta l^2(t)$, $\Delta l(t)$ отрицательно (см. также (13)) при любых γ , $\hat{\pi}_0$ и $\hat{\lambda}_0$ (см. приложение П4), а каждая из решающих функций $L^1(t)$, $L^2(t)$, $L(t)$ образует супермартингал ($\Delta l_i^1(t)$, $\Delta l_i^2(t)$ и $\Delta l_i(t)$ - аналогично).

Если условия отвечают условиям гипотезы **H_τ** $x(u)=(\hat{\pi}_0;\hat{\lambda}_0)^T$ при $-T_{анп}\leq u\leq t-\tau$ и $x(u)=(\pi_p;\lambda_p)^T$ при $t-\tau\leq u\leq t$, причём $\pi_p\leq(1-\gamma)\hat{\pi}_0$ и $\lambda_p\geq(1+\gamma)\hat{\lambda}_0$ тогда моменты процессов $\Delta l^1(t)$, $\Delta l^2(t)$ принимают значения ($\Delta l_i^1(t)$ и $\Delta l_i^2(t)$ - аналогично):

$$E\left[\Delta l^1(u)\middle|H_\tau\right]=\left(\hat{\pi}_0(1-\gamma)\ln(1-\gamma)+(1-\hat{\pi}_0(1-\gamma))\ln\left(1+\frac{\gamma\hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right)\right)n_{преду};$$

$$var\left[\Delta l^1(u)\middle|H_\tau\right]=\left(\ln\left(1-\frac{\gamma}{1-\hat{\pi}_0+\gamma\hat{\pi}_0}\right)\right)^2\hat{\pi}_0(1-\gamma)(1-\hat{\pi}_0(1-\gamma))n_{преду};$$

$$E\left[\Delta l^2(u)\middle|H_\tau\right]=((1+\gamma)\ln(1+\gamma)-\gamma)N_u\hat{\lambda}_0;$$

$$var\left[\Delta l^2(u)\middle|H_\tau\right]=(1+\gamma)(\ln(1+\gamma))^2N_u\hat{\lambda}_0;$$

В этом случае все математические ожидания $\Delta l^1(t)$, $\Delta l^2(t)$, $\Delta l(t)$ положительны (см. также (13)) при любых γ , $\hat{\pi}_0$ и $\hat{\lambda}_0$ и монотонно возрастает по γ (см. приложение П4), а решающие

функции $L^1(t)$, $L^2(t)$, $L(t)$ образует субмартингал ($\Delta l_i^1(t)$, $\Delta l_i^2(t)$ и $\Delta l_i(t)$ - аналогично).

5. Заключение: Обсуждение разработанных процедур и примеры их практического использования

Проиллюстрируем применение предложенных методик на практических примерах «фирмы А» и «фирмы Б», которые были кратко описаны в разделе 2 при обсуждении достоверности оценивания функции .

Пример 1, «фирма А».

Для «фирмы А», как видно из иллюстративного рисунка 1, характерна существенная доля сотрудников, увольняющихся в течение первых 6 недель после приёма на работу. На рис.3 представлена гистограмма распределения времени работы сотрудников до увольнения. Устойчивое увольнение в течение таких малых сроков работы в фирме свидетельствует о явных проблемах в процедурах найма и адаптации сотрудников. Это означает, что, начав работать в фирме, сотрудник обнаруживает, что условия его не устраивают, или это является результатом неудачной адаптации на рабочем месте, в частности, линейный менеджер выясняет, что сотрудник не соответствует требуемому профилю. Экономическая модель (1-3) позволяет оценить, какие потери несёт «фирма А» из-за проблем в процедурах найма и адаптации. На основании оценок все сотрудники разбиты на группы по стажу работы (на момент увольнения), в таблице 1 представлены доли сотрудников и среднее время работы внутри групп. В столбце «фактическое» показано среднее время работы в неделях, полученное в результате оценок по фактическим данным. В столбцах «возможное» проставлены ожидаемые менеджментом экспертные оценки возможного среднего времени после улучшения процедур найма и адаптации. Соотношения (1-3) позволяют получить в таком случае численные финансовые оценки влияния улучшения бизнес-процессов на финансовый результат фирмы. В случае «фирмы А» изменение среднего

времени для рассматриваемой группы с 3,9 недель до 7 приводит к повышению среднего эффекта от одного сотрудника на 0,7%, а с 3,9 до 12,8 недель – на 2%. При численности сотрудников порядка нескольких десятков тысяч эти незначительные относительные изменения влекут за собой существенные суммарные эффекты. И, что очень важно, эти эффекты достигаются за счёт улучшения вспомогательных бизнес-процессов, то есть не требуют затрат в области основных процессов, которые всегда велики.

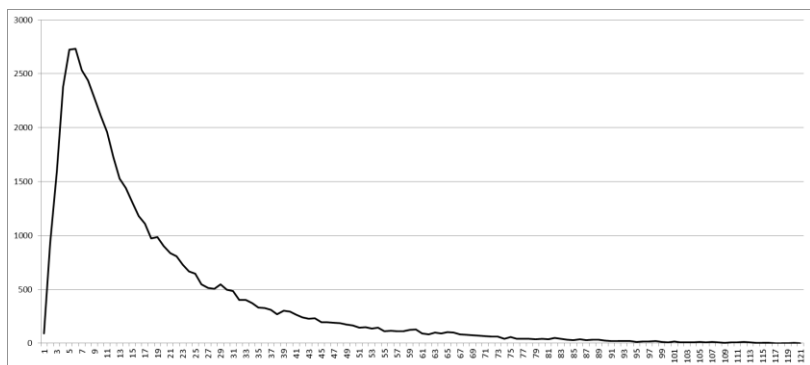


Рис. 3. Гистограмма распределения времени работы сотрудников до увольнения (среди уже уволившихся) «фирмы А».

Таблица 1. Распределения времени работы сотрудников до увольнения

Группы: (недели)	Доля	Среднее время работы (недели)		
		Факт	Возможное 1	Возможное 2
0-6	27%	3,9	7,0	12,8
7-22	46%	12,8	12,8	12,8
23 и более	26%	41,6	41,6	41,6
Всего:	100%	18,5	19,3	20,9

Пример 2, «фирма Б».

Для «фирмы Б» не свойственно большое количество увольнений на ранних стадиях, для неё актуальной является задача оперативного контроля характеристик ЖЦС, чтобы управленческими решениями устранять угрозы потери эффективности при возникновении системных изменений интенсивности увольнений λ и вероятности принятия предложений новыми сотрудниками π .

Особенностью «фирмы Б» является наличие большого количества функциональных домов, более тысячи, по которым необходимо оперативно контролировать характеристики ЖЦС. То есть, группа менеджеров, отвечающая за бизнес «фирмы Б» в целом должен на каждом интервале времени оперативно сопоставлять более тысячи кортежей:

- численность N_t ;
- количество уволившихся ζ_t^2 ;
- количество актуальных предложений $n_{пред}(t)$;
- количество принятых предложений ζ_t^1 .

Поставленная задача решается с помощью предложенной в разделе 3 методики, применяемой параллельно ко всем ФД в варианте сценария 3.

Результаты выявления служат основанием для более детального анализа ситуации в функциональных домах, по которым сформировано решение об обнаружении разладки. Для наглядности результаты отображаются не только в численной, но также и в графической форме (рис.4). На рисунке 4 представлен пример результатов выявления в виде трёхмерной поверхности. По вертикали отложено относительное правдоподобие наличия разладки против его отсутствия, одна из горизонтальных осей соответствует функциональным домам, а другая – текущему времени. Пики на трёхмерной поверхности показываю значительное превышение правдоподобия разладки над её отсутствием и служат индикаторами для менеджмента для детального рассмотрения ситуации в соответствующих функциональных домах.

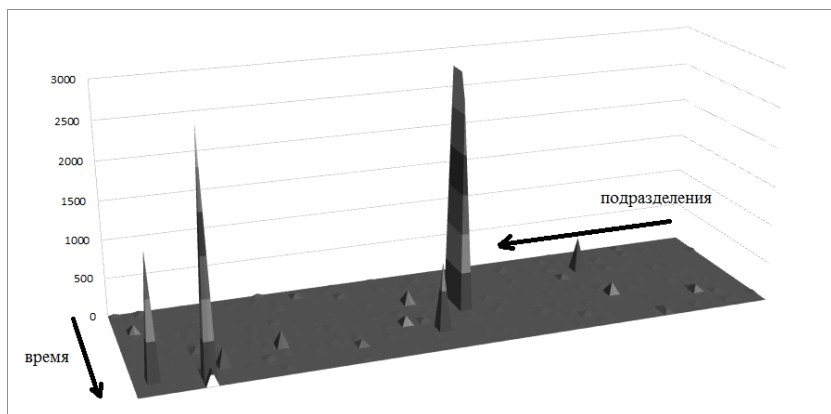


Рис. 4. Пример отображения результатов выявления изменений характеристик ЖЦС на множестве функциональных домов «фирмы Б».

Итак, во втором разделе была проанализирована зависимость экономической эффективности бизнеса от таких характеристик жизненного цикла сотрудников как функция $\{\varphi_{\theta}\}$ вероятности времени работы до увольнения и π вероятность принятия предложений о работе в ходе найма. Было показано наличие существенного влияния рассматриваемых характеристик ЖЦС на эффективность бизнеса, отражённое в утверждении 1.

Третий раздел посвящён более детальному рассмотрению процесса увольнения сотрудников по собственному желанию. В нём объяснена адекватность использования пуассоновской аппроксимации процесса увольнений в практически интересных случаях. Вместе с тем показана невозможность оценивания функции $\{\varphi_{\theta}\}$ с высокой достоверностью и предложено использовать агрегированный параметр интенсивности увольнений λ вместо $\{\varphi_{\theta}\}$. Поэтому на практике следует использовать агрегированные характеристики ЖЦ сотрудников, не рассчитывая на детальные модели, а также использовать «экспертные» модели, сочетать параметры, значения которых известно из отчётности фирм, с оцениваемыми и задаваемыми экспертно.

В четвёртом разделе предложены процедуры последовательного выявления моментов изменения (разладки) характеристик ЖЦС - π , λ для четырёх сценариев таких изменений, а также на основании известных результатов получены граничные значения характеристик последовательных критериев обнаружения разладки.

Приложения.

П.1. ПОЛУЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА РАЗДЕЛА 2

$$s(\tau) = \begin{cases} s_{np\partial} - \Delta s_{a\partial} & \text{при } 0 \leq \tau \leq t_{a\partial} \\ s_{np\partial} & \text{при } t_{a\partial} < \tau \leq \theta - t_{np.y\partial} \\ s_{np\partial} - \Delta s_{y\partial} & \text{при } \max\{t_{a\partial}; \theta - t_{np.y\partial}\} < \tau \leq \theta \end{cases}$$

$$S(\theta) = \sum_{\tau=0}^{\theta} s(\tau) = \begin{cases} s_{np\partial} \theta - \Delta s_{a\partial} \theta & \text{при } 0 \leq \theta \leq t_{a\partial} \\ s_{np\partial} \theta - \Delta s_{a\partial} t_{a\partial} - \Delta s_{y\partial} (\theta - t_{a\partial}) & \text{при } t_{a\partial} < \theta \leq t_{a\partial} + t_{np.y\partial} \\ s_{np\partial} \theta - \Delta s_{a\partial} t_{a\partial} - \Delta s_{y\partial} t_{np.y\partial} & \text{при } t_{a\partial} + t_{np.y\partial} < \theta \end{cases}$$

$$S(\theta) = s_{np\partial} \theta - \begin{cases} \Delta s_{a\partial} \theta & \text{при } 0 \leq \theta \leq t_{a\partial} \\ \Delta s_{a\partial} t_{a\partial} + \Delta s_{y\partial} (\theta - t_{a\partial}) & \text{при } t_{a\partial} < \theta \leq t_{a\partial} + t_{np.y\partial} \\ \Delta s_{a\partial} t_{a\partial} + \Delta s_{y\partial} t_{np.y\partial} & \text{при } t_{a\partial} + t_{np.y\partial} < \theta \end{cases}$$

$$\sum_{\theta=0}^{\infty} (S(\theta) \varphi(\theta)) = s_{np\partial} \sum_{\theta=0}^{\infty} (\theta \varphi(\theta)) - \Delta s_{a\partial} \sum_{\theta=0}^{t_{a\partial}} (\theta \varphi(\theta)) - \Delta s_{a\partial} t_{a\partial} \sum_{\theta=t_{a\partial}+1}^{\infty} \varphi(\theta) -$$

$$- \Delta s_{y\partial} \sum_{\theta=t_{a\partial}+1}^{t_{a\partial}+t_{np.y\partial}} (\theta \varphi(\theta)) - \Delta s_{y\partial} t_{np.y\partial} \sum_{\theta=t_{a\partial}+t_{np.y\partial}+1}^{\infty} \varphi(\theta)$$

Обозначим
$$t_{a\partial}^* = \sum_{\theta=0}^{t_{a\partial}} (\theta \varphi(\theta)) + t_{a\partial} \sum_{\theta=t_{a\partial}+1}^{\infty} \varphi(\theta) \quad \text{и}$$

$$t_{np.y\theta}^* = \sum_{\theta=t_{a\partial}+1}^{t_{a\partial}+t_{np.y\theta}} (\theta \varphi(\theta)) + t_{np.y\theta} \sum_{\theta=t_{a\partial}+t_{np.y\theta}+1}^{\infty} \varphi(\theta)$$

Заметим, что $t_{a\partial}^* < t_{a\partial}$; $t_{a\partial}^* < t_{cp}$; $t_{np.y\theta}^* < t_{np.y\theta}$; $t_{np.y\theta}^* < t_{cp}$.

П.2. АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИИ $V(\pi^+, \{\varphi_\theta\}, t_{a\partial}, t_{np.y\theta})$ ОТ АРГУМЕНТОВ

Проанализируем зависимость функции $V(\pi^+, \{\varphi_\theta\}, t_{a\partial}, t_{np.y\theta})$ от всех своих аргументов.

$$V(\pi^+, \{\varphi_\theta\}, t_{a\partial}, t_{np.y\theta}) = Ds_{np\partial} - D \left(\Delta s_{a\partial} \frac{t_{a\partial}^*}{t_{cp}} + \Delta s_{y\theta} \frac{t_{np.y\theta}^*}{t_{cp}} + S_{зам} \frac{1}{t_{cp}} + \frac{S_{np\partial}}{\pi^+} \frac{1}{t_{cp}} \right) + V^*$$

где $t_{a\partial}^* = \sum_{\theta=0}^{t_{a\partial}} \theta \varphi_\theta + t_{a\partial} \sum_{\theta=t_{a\partial}+1}^{\infty} \varphi_\theta$; $t_{np.y\theta}^* = \sum_{\theta=t_{a\partial}+1}^{t_{a\partial}+t_{np.y\theta}} \theta \varphi_\theta + t_{np.y\theta} \sum_{\theta=t_{a\partial}+t_{np.y\theta}+1}^{\infty} \varphi_\theta$ и

$$t_{cp} = \sum_{\theta=0}^{\infty} \theta \varphi_\theta$$

Во-первых, вероятность π^+ влияет на значение функции $V(\bullet)$, только входя в элемент $-D \frac{S_{np\partial}}{t_{cp}} \frac{1}{\pi^+}$. Поэтому, очевидно,

что функция $V(\bullet)$ монотонно возрастает по π^+ , т.е. есть

$\frac{\partial}{\partial \pi^+} V(\pi^+, \{\varphi_\theta\}, t_{a\partial}, t_{np.y\theta}) > 0$. Напротив, при уменьшении π^+ становится отрицательным, начиная с некоторых малых π^+ , и при стремлении π^+ к нулю может неограниченно уменьшаться, будучи отрицательным $\lim_{\pi^+ \rightarrow 0} \left\{ V(\pi^+, \{\varphi_\theta\}, t_{a\partial}, t_{np.y\theta}) \right\} = -\infty$.

Во-вторых, длительность периода адаптации $t_{a\partial}$ влияет на функцию $V(\bullet)$ только через элемент $-D \Delta s_{a\partial} \frac{t_{a\partial}^*}{t_{cp}}$. Причём t_{cp} не

зависит от $t_{a\partial}$, а из $t_{a\partial}^* = \sum_{\theta=0}^{t_{a\partial}} \theta \varphi_{\theta} + t_{a\partial} \sum_{\theta=t_{a\partial}+1}^{\infty} \varphi_{\theta}$ непосредственно следу-

ет, что $t_{a\partial}^*$ монотонно растёт с ростом $t_{a\partial}$. Поэтому

$\frac{\partial}{\partial t_{a\partial}} V(\pi^+, \{\varphi_{\theta}\}, t_{a\partial}, t_{np.y\theta}) < 0$. Аналогичные соображения также

справедливы и для продолжительности фазы, предшествующей

увольнению, следовательно $\frac{\partial}{\partial t_{np.y\theta}} V(\pi^+, \{\varphi_{\theta}\}, t_{a\partial}, t_{np.y\theta}) < 0$. С точ-

ки зрения бизнеса монотонное убывание функции $V(\cdot)$ при росте продолжительности интервала адаптации и/или фазы снижения производительности, предшествующей увольнению является интуитивно очевидным.

Вид функции вероятностей времени работы сотрудников в фирме $\{\varphi_{\theta}\}$ влияет на функцию $V(\cdot)$ более сложным образом. Изучим это влияние, для чего используем «вариации» функции $\{\varphi_{\theta}\}$ следующего вида:

$$\delta\varphi_{\theta}(x, i) = x\varepsilon_{\theta}(i); \text{ где } \varepsilon_{\theta}(i) = \begin{cases} 1 & \text{при } \theta=i \\ -1 & \text{при } \theta=i+1 \\ 0 & \text{при } \theta < i \text{ или } \theta > i+1 \end{cases}$$

Несложно показать, что разность между любыми функциями вероятности $\{\varphi_{\theta}\}$ и $\{\tilde{\varphi}_{\theta}\}$ может быть представлена в виде суммы счётного числа «вариаций» $\delta\varphi_{\theta}(x, i)$.

Рассмотрим влияние «малых вариаций» $\delta\varphi_{\theta}(x, i)$ ($x \rightarrow 0$) при различных i на функцию $V(\cdot)$, то есть оценим

$$\frac{\partial}{\partial x} V(\pi^+, \{\varphi_{\theta} + \delta\varphi_{\theta}(x, i)\}, t_{a\partial}, t_{np.y\theta}).$$

Из (3) следует:

$$\frac{\partial}{\partial x} V(\pi^+, \{\varphi_{\theta} + \delta\varphi_{\theta}(x, i)\}, t_{a\partial}, t_{np.y\theta}) = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta s_{a\partial} \frac{t_{a\partial}^*}{t_{cp}} + \Delta s_{y\theta} \frac{t_{np.y\theta}^*}{t_{cp}} + S_{зам} \frac{1}{t_{cp}} + \frac{S_{np\partial}}{\pi^+} \frac{1}{t_{cp}} \right)$$

где $a = \Delta s_{a\partial}$, $b = \Delta s_{y\theta}$ и $c = S_{зам} + S_{np\partial} / \pi^+$ не зависят от x .

Также из выражений для t_{cp} , t_{ad}^* и $t_{np.y6}^*$ следует:

$$t_{cp}(\{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x, i)\}) = \sum_{\theta=0}^{\infty} \theta\varphi_\theta + xi - x(i+1) = t_{cp}(\{\varphi_\theta\}) - x \quad \text{для}$$

всех i .

$$t_{ad}^*(\{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x, i)\}) = \begin{cases} t_{ad}^*(\{\varphi_\theta\}) - x & \text{для } 0 < i < t_{ad} \\ t_{ad}^*(\{\varphi_\theta\}) & \text{для } t_{ad} \leq i \end{cases}$$

$$t_{np.y6}^*(\{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x, i)\}) = \begin{cases} t_{ad}x & \text{для } i = t_{ad} \\ t_{np.y6}^*(\{\varphi_\theta\}) - x & \text{для } t_{ad} < i < t_{ad} + t_{np.y6} \\ t_{np.y6}^*(\{\varphi_\theta\}) & \text{для } t_{ad} + t_{np.y6} \leq i \text{ или } i < t_{ad} \end{cases}$$

Откуда видно, что при $i < t_{ad} + t_{np.y6}$ знак производной $\frac{\partial}{\partial x} V(\pi^+, \{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x, i)\}, t_{ad}, t_{np.y6})$ может быть различным в зависимости от соотношений a , b , и c , то есть влияние «малых вариаций» $\delta\varphi_\theta(x, i)$ на функцию $V(\bullet)$ в области $0 \leq i < t_{ad} + t_{np.y6}$ проявляется неоднозначно.

Однако при $t_{ad} + t_{np.y6} \leq i$ справедливо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V(\pi^+, \{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x, i)\}, t_{ad}, t_{np.y6}) &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{t_{ad}^*}{t_{cp}} + b \frac{t_{np.y6}^*}{t_{cp}} + c \frac{1}{t_{cp}} \right) = \\ &= D \frac{(at_{ad}^* + bt_{np.y6}^* + c)}{t_{cp}^2} \frac{\partial t_{cp}}{\partial x} \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial / \partial x V(\pi^+, \{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x, i)\}, t_{ad}, t_{np.y6})}{\partial t_{cp} / \partial x} &= \frac{\partial V(\pi^+, \{\varphi_\theta\}, t_{ad}, t_{np.y6})}{\partial t_{cp}} = \\ &= D \frac{(at_{ad}^* + bt_{np.y6}^* + c)}{t_{cp}^2} > 0 \end{aligned}$$

П3. СВОЙСТВА ПРОЦЕССА N_T ИЗ РАЗДЕЛА 4

Приведём некоторые свойства процесса N_t (5).

Математическое ожидание численности будет изменяться как: $E[N_{t+1}] = (1 - \lambda(t))E[N_t] + \pi^+(t)n_{\text{пред}}(t)$.

или:

$$E[N_{t+T}] = E[N_t] \prod_{\omega=1}^T (1 - \lambda(t + \omega)) + \sum_{\tau=1}^T \pi^+(t + \tau) n_{\text{пред}}(t + \tau) \prod_{\omega=\tau}^T (1 - \lambda(t + \omega))$$

.

Для стационарного случая, когда $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$; $n_{\text{пред}}(t) = n_{\text{пред}} = \text{const}$ и $\pi^+(t) = \pi^+ = \text{const}$, имеем $E[N_{t+T}] = N_{\text{см}} + (1 - \lambda)^T (E[N_t] - N_{\text{см}})$ и $\lim_{T \rightarrow \infty} E[N_{t+T}] = N_{\text{см}}$, где $N_{\text{см}} = \pi^+ n_{\text{пред}} \lambda^{-1}$ - стационарное значение численности.

П4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ К РАЗДЕЛУ 4

Покажем, что если условия бизнеса в действительности отвечают условиям гипотезы $\mathbf{H}_0$, то математические ожидания $\Delta l^1(t)$, $\Delta l^2(t)$, $\Delta l(t)$ отрицательны при любых γ , $\hat{\pi}_0$ и $\hat{\lambda}_0$:

Рассмотрим $E[\Delta l^1(u) | H_0] = \ln(1 - \gamma) \hat{\pi}_0 + \ln\left(1 + \frac{\gamma \hat{\pi}_0}{1 - \hat{\pi}_0}\right) (1 - \hat{\pi}_0)$.

Обозначим $F(\hat{\pi}_0; \gamma) = \ln(1 - \gamma) \hat{\pi}_0 + \ln\left(1 + \frac{\gamma \hat{\pi}_0}{1 - \hat{\pi}_0}\right) (1 - \hat{\pi}_0)$ и исследуем поведение функции $F(x; y)$

Во-первых, $F(0; y) = 0$. Вычислим производную по x .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} F(x; y) &= \ln(1-y) - \ln\left(1 + \frac{xy}{1-x}\right) + (1-x) \frac{\partial}{\partial x} \ln\left(1 + \frac{xy}{1-x}\right) = \\
 &= \ln(1-y) - \ln\left(1 + \frac{xy}{1-x}\right) + (1-x) \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln(1-x+xy) - \frac{\partial}{\partial x} \ln(1-x) \right] = \\
 &= \ln(1-y) - \ln\left(\frac{1-x+xy}{1-x}\right) + (1-x) \left[-\frac{1-y}{1-x+xy} + \frac{1}{1-x} \right] = \\
 &= \ln(1-y) - \ln\left(\frac{1-x+xy}{1-x}\right) + 1 - \frac{(1-x)(1-y)}{1-x+xy} = \\
 &= \ln(1-y) - \ln\left(\frac{1-x+xy}{1-x}\right) + \frac{1-x+xy-1+x+y-xy}{1-x+xy} = \\
 &= \ln(1-y) - \ln\left(\frac{1-x+xy}{1-x}\right) + \frac{y}{1-x+xy} = \\
 &= \ln\left(\frac{(1-y)(1-x)}{1-x+xy}\right) + \frac{y}{1-x+xy} = \ln\left(1 - \frac{y}{1-x+xy}\right) + \frac{y}{1-x+xy} < 0
 \end{aligned}$$

То есть, $F(x; y)$ монотонно убывает по x при любых y . Также найдём предел $F(x; y)$ при $x \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \ln(1-y)x + \ln\left(1 + \frac{yx}{1-x}\right)(1-x) \right\} &= \ln(1-y) + \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)(1-x) \right\} = \\
 &= \ln(1-y) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(x)}{x} \right\} = \ln(1-y) < 0
 \end{aligned}$$

Таким образом, $E\left[\Delta l^1(u) | H_0\right]$ всегда отрицательно.

Рассмотрим $E\left[\Delta l^2(u) | H_0\right] = N_u \hat{\lambda}_0 (\ln(1+\gamma) - \gamma)$, для любых $\gamma > 0$ справедливо $\gamma > \ln(1+\gamma)$, поэтому $E\left[\Delta l^2(u) | H_0\right]$ второе слагаемое также всегда отрицательно.

Так как $E\left[\Delta l^1(u) | H_0\right] < 0$ и $E\left[\Delta l^2(u) | H_0\right] < 0$, тогда и $E\left[\Delta l(u) | H_0\right] < 0$.

Если условия бизнеса отвечают условиям гипотезы $\mathbf{H}_\tau$ -
 $x(u) = (\hat{\pi}_0; \hat{\lambda}_0)^T$ при $-T_{anp} \leq u \leq t-\tau$ и $x(u) = (\pi_p; \lambda_p)^T$ при $t-\tau \leq u \leq t$,
 причём $\pi_p \leq (1-\gamma) \hat{\pi}_0$ и $\lambda_p \geq (1+\gamma) \hat{\lambda}_0$ тогда:

$$E[\Delta l^1(u)|H_\tau] = \left(\hat{\pi}_0(1-\gamma) \ln(1-\gamma) + (1-\hat{\pi}_0(1-\gamma)) \ln \left(1 + \frac{\gamma \hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0} \right) \right) n_{пред};$$

$$E[\Delta l^2(u)|H_\tau] = ((1+\gamma) \ln(1+\gamma) - \gamma) N_u \hat{\lambda}_0;$$

Рассмотрим первое математическое ожидание $E[\Delta l^1(u)|H_\tau]$.

Обозначим

$$G(\hat{\pi}_0; \gamma) = \hat{\pi}_0(1-\gamma) \ln(1-\gamma) + (1-\hat{\pi}_0(1-\gamma)) \ln \left(1 + \frac{\gamma \hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0} \right) \quad \text{и ис-}$$

следуем поведение функции $G(x; y)$.

Во-первых, $G(0; y) = 0$. Вычислим производную по x .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} G(x; y) &= (1-y) \ln(1-y) + \frac{\partial}{\partial x} (1-x(1-y)) \ln \left(1 + \frac{xy}{1-x} \right) = \\ &= (1-y) \ln(1-y) - (1-y) \ln \left(1 + \frac{xy}{1-x} \right) + (1-x(1-y)) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left(\frac{1-x+xy}{1-x} \right) = \\ &= (1-y) \left(\ln(1-y) - \ln \left(\frac{1-x+xy}{1-x} \right) \right) + (1-x(1-y)) \left(-\frac{1-y}{1-x+xy} + \frac{1}{1-x} \right) = \\ &= (1-y) \ln \left(\frac{(1-y)(1-x)}{1-x+xy} \right) + (1-x(1-y)) \frac{1-x+xy - (1-y)(1-x)}{(1-x(1-y))(1-x)} = \\ &= (1-y) \ln \left(\frac{(1-y)(1-x)}{1-x+xy} \right) + \frac{y}{(1-x)} \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x; y) = (1-y) \ln(1-x) + (1-y) \ln(1-y) - (1-y) \ln(1-x+xy) + \frac{y}{(1-x)}$$

Покажем, что производная положительна.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x} G(x; y) \right|_{x=0} &= (1-y) \ln(1-y) + y = -(1-y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} + y = y - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n-1} = \\ &= y - y - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) y^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{(n-1)n} > 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим вторую производную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x; y) &= \frac{\partial}{\partial x} \{ (1-y) \ln(1-y) + (1-y) \ln(1-x) \} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -(1-y) \ln(1-x(1-y)) + \frac{y}{(1-x)} \right\} = \\ &= \frac{1-y}{1-x} + \frac{(1-y)^2}{1-x+xy} + \frac{y}{(1-x)^2} > 0 \end{aligned}$$

Первая производная в точке $x=0$ положительна, а вторая – положительна при $x \geq 0$, откуда следует, что $G(x; y) > 0$ при $x > 0$, и первое математическое ожидание $E[\Delta I^1(u)|H_\tau]$ всегда больше нуля.

Рассмотрим второе математическое ожидание $E[\Delta I^2(u)|H_\tau]$.

Функция $(1+\gamma) \ln(1+\gamma) - \gamma$ обращается в 0 при $\gamma=0$. Вычислим её производную

$$\frac{d}{d\gamma} (1+\gamma) \ln(1+\gamma) - \gamma = \ln(1+\gamma) + \frac{(1+\gamma)}{(1+\gamma)} - 1 = \ln(1+\gamma) > 0. \text{ Тогда}$$

$(1+\gamma) \ln(1+\gamma) - \gamma$ при всех $\gamma > 0$, следовательно второе математическое ожидание $E[\Delta I^2(u)|H_\tau] > 0$.

Откуда $E[\Delta I(u)|H_\tau] = E[\Delta I^1(u)|H_\tau] + E[\Delta I^2(u)|H_\tau] > 0$

Литература

1. Белов М.В. Модель управления человеческим капиталом фирмы // Проблемы управления. – 2016. – № 5. – С. 24–34.
2. Белов М.В. Модели управления численностью сотрудников предприятия // Проблемы управления. – 2017. – №1 – С. 19–30.
3. Борисов А.Б. Большой экономический словарь / А.Б. Борисов. – М.: Книжный мир, 2003. – 895 с.
4. Вальд А. Последовательный анализ. М.: Физматлит, 1960. — 328 с.
5. Исследование вовлеченности. — URL: <http://axesgroup.ru/engagement/> (дата обращения: 11.02.2016).
6. Круглов В. М. Сходимость сумм независимых потоков требований к пуассоновскому // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 1979. — № 4. — С. 43–51
7. Круглов В. М. Нормальная и пуассоновская сходимости// Теория вероятностей и ее применения. — 2003, — том 48, выпуск 2, – С. 392–398.
8. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки / 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Дело, 2003. – 520 с.
9. Мархасин А. Б. Асимптотическая модель суммирования нестационарных потоков однородных событий с последствием в беспроводных сетях множественного доступа. Вестник СибГУТИ. 2011. № 4– С.19-31.
10. Никифоров И.В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. М.: Наука, 1983. - 199 с.
11. Процедура Каплана-Мейера. MachineLearning.ru. Профессиональный информационно-аналитический ресурс, посвященный машинному обучению, распознаванию образов и интеллектуальному анализу данных. — URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Процедура_Каплана-Мейера (дата обращения: 12.12.2017).

12. Смирнов В.Т., Сошников И.В., Романчин В.И., Скоблякова И.В Человеческий капитал: содержание и виды, оценка и стимулирование: монография / под ред. В.Т. Смирнова. – М.: Машиностроение-1; Орел: ОрелГТУ, 2005. – 513 с.
13. Чернова Н. И. Математическая статистика: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007. 148 с.
14. Ширяев А.Н., Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. — 2-е изд., новое. — М.: МЦНМО, 2014. — 144 с.
15. Ширяев А. Н. Стохастические задачи о разладке, МЦНМО, М., 2016 , 392 с.
16. Экономический словарь / Е.Г. Багудина и др. – М.: ТК Велби; Проспект, 2004. – 624 с.
17. Bartroff J., Finkelman M., Tze Leung Lai. Modern Sequential Analysis and Its Applications to Computerized Adaptive Testing. Psychometrika. September 2008, Volume 73, Issue 3, pp 473–486.
18. Blackburn K. and Varvarigos D. Human Capital Accumulation in a Stochastic Environment: Some New Results on the Relationship Between Growth and Volatility. – URL: <http://www.socialsciences.manchester.ac.uk/medialibrary/cgbc/discussionpapers/dpcgbc74.pdf> (дата обращения: 15.02.2016).
19. Cox D. R. (1972). Regression models and life tables (with discussion). Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol. 34, No. 2. (1972), pp. 187-220.
20. Fan X., Seshadri A., Taber C. Estimation of a Life-Cycle Model with Human Capital, Labor Supply and Retirement. University of Chicago. Department of Economics. Workshops. –URL: <http://www.ssc.wisc.edu/~aseshadr/WorkingPapers/FST.pdf> (дата обращения: 12.09.2016).
21. Flamholtz E. Human resource accounting: advances in concepts, methods, and applications. – N.-Y.: Springer Science+Business Media, 1999. – 390 p.
22. Flamholtz E., Bullen M., Hua W. Human resource accounting: a historical perspective and future implications // Management Decision. – 2002. – Vol. 40, iss. 10. – P. 947–954.

23. Human capital management definition. – URL: <http://blogs.gartner.com/it-glossary/hcm-human-capital-management/> (дата обращения: 20.03.2016).
24. Kahn W.A. Psychological Conditions of Personal Engagement and Disengagement at Work // Academy of Management Journal. – 1990. – Vol. 33, N 4. P. 692–724.
25. Kaplan E.L., Meier P. Nonparametric Estimation from Incomplete Observations. Journal of the American Statistical Association, Vol. 53, No. 282 (Jun., 1958), pp. 457–481.
26. Nikiforov I.V. Sequential detection/isolation of abrupt changes. Sequential Analysis. Design Methods and Applications. Volume 35, 2016 - Issue 3 pp.268-301.
27. Palacios M. Human Capital as an Asset Class Implications From a General Equilibrium Model. – Owen Vanderbilt University. Graduate School of Management. – URL: http://www2.owen.vanderbilt.edu/miguel.palacios/index_files/Palacios_Human_Capital_as_an_Asset_Class.pdf (дата обращения: 12.02.2016).
28. Smith D., Silverstone Y. and Lajtha A. A new lens on business advantage: Human capital strategy and the drive for high performance / Accenture, 2013.

STATISTICS OF HIRING AND ATTRITION PROCESSES

Mikhail Belov, IBS, Moscow, Cand.Sc., (mbelov@ibs.ru).

Abstract: The characteristics of the lifecycle of the employee (ELC) in the firm are considered - from the moment of entering the work to the leaving the company. The importance of the influence of the characteristics of the ELC on the company's profitability is demonstrated. The impossibility of a highly reliable estimation of the characteristics of the ELC based on observations is shown. Procedures for a statistic sequential analysis of the detection of the moment of change in the characteristics of the life cycle of employees are proposed.

Keywords: attrition process, poison estimation, censored sampling, sequential analysis, fault detection.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...

Опубликована ...заполняется редактором...