УДК 519.688
ББК 22.147

ВЗАИМОСВЯЗЬ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ АЛГЕБР И ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Вульфин А.М. [1] ,
(Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа)
Гиниятуллин В.М. [2]
(Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа)

В работе рассматривается взаимосвязь двухкомпонентных алгебр, квадратичных функций и линий второго порядка. Вводится оригинальный способ неявного задания функций. Показано взаимное соответствие некоторой алгебры и конкретного вида кривой. Рассмотрены частные и вырожденные случаи линий второго порядка. Приведен алгоритм перехода от неявного задания функции к её каноническому уравнению, параметрическому виду и обратно.

Ключевые слова: двухкомпонентная алгебра, линия второго порядка, неявное задание функции, каноническое уравнение, параметрический вид зависимости.

Введение

Алгебра комплексных чисел к настоящему времени считается хорошо изученной и имеет множество практических приложений. Вместе с ней к классу двухкомпонентных алгебр [4] также

---

[1] *Алексей Михайлович Вульфин, аспирант, (vulfin.alexey@gmail.com).*
[2] *Вахит Мансурович Гиниятуллин, кандидат технических наук, доцент (fentazer@mail.ru).*

относят множество дуальных чисел и множество паракомплексных [5] чисел (в литературе встречаются названия двойные и/или гиперболические числа). Одно из названий последней алгебры прямо указывает на её соответствие определенному виду кривых второго порядка, а именно гиперболам.

Существует три вида кривых второго порядка: эллипсы, гиперболы и параболы. Каждую из них можно получить сечением некоторого конуса [7]. Возникает вопрос о соответствии оставшихся двухкомпонентных алгебр и линий второго порядка.

1. Неявное задание линий второго порядка

В статье рассматривается способ неявного задания функций второго порядка с помощью скалярного умножения векторов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} c_0 + i \cdot d_0 & c_1 + i \cdot d_1 & c_2 + i \cdot d_2 \end{pmatrix}^T = z,$$

где $(x\ y\ 1)^T$ – вещественнозначный вектор,

x, y — декартовы координаты точки на плоскости,

$(c_0 + i \cdot d_0\ c_1 + i \cdot d_1\ c_2 + i \cdot d_2)^T$ – комплексный вектор,

c_j, d_j – компоненты комплексного вектора,

i – мнимая единица двухкомпонентной алгебры,

z – число соответствующей двухкомпонентной алгебры.

Поставив в соответствие каждой точке пространства (x, y) значение модуля числа z, получим явную функцию двух переменных вида: $t = F(x, y)$. Зафиксировав значение модуля, получим неявно заданную функцию вида $f(x, y) = 0$ двух переменных. Для разных алгебр такие функции будут различаться способом извлечения модуля числа.

1.1. *ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ УРОВНЯ МОДУЛЬНОЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА*

Результатом скалярного умножения вещественнозначного вектора координат на комплексный вектор является комплексное

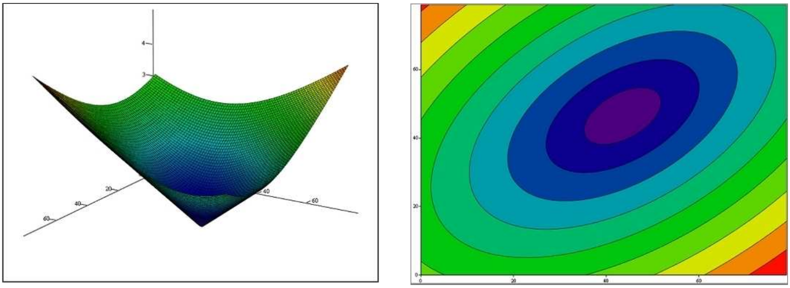

Рис. 1. Функция двух переменных и карта ее изолиний (эллипсы).

число z. Модуль комплексного числа равен

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2},$$

поскольку квадрат мнимой единицы равен минус единице.

На рис. 1 показан пример графического представления функции от двух переменных (слева), и карта изолиний этой поверхности (справа).

Зафиксировав значения модуля комплексного числа, выбираем некоторую эллиптическую кривую из семейства концентрических эллипсов.

1.2. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЛИНИИ УРОВНЯ МОДУЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ПАРАКАМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

Результатом скалярного умножения вещественнозначного вектора координат на паракомплексный вектор является паракомплексное число z. Модуль паракомплексного числа равен:

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 - \mathrm{Im}^2},$$

поскольку квадрат мнимой единицы равен плюс единице.

На рис. 2 приведен пример графического представления функции от двух переменных (слева) и карта изолиний этой поверхности (справа).

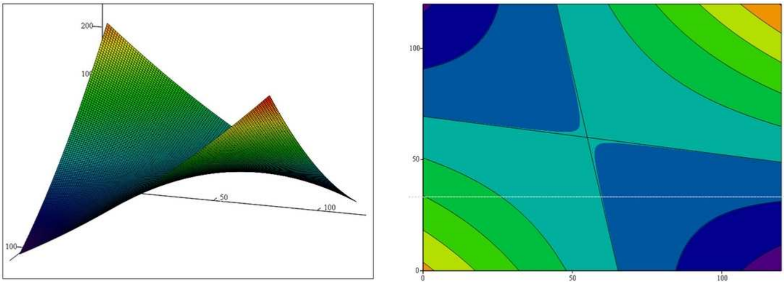

Рис. 2. Функция двух переменных и карта ее изолиний (сопряженные гиперболы).

Модуль паракомплексного числа может быть меньше нуля [6], поэтому на карте изолиний значения модуля в противоположных квадрантах одинаковы по знаку, а в соседних нет. Зафиксировав значения модуля паракомплексного числа, выбираем некую гиперболическую кривую из семейства гипербол.

1.3. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ЛИНИИ УРОВНЯ МОДУЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДУАЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Результатом скалярного умножения вещественнозначного вектора координат на дуальный вектор является некоторое дуальное число z. Модуль дуального числа равен:

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2},$$

поскольку квадрат мнимой единицы равен нулю.

На рис. 3 дан пример графического представления функции от двух переменных (слева) и карта изолиний этой поверхности (справа).

Зафиксировав значения модуля, из семейства полос выбираем две параллельные прямые – вырожденный случай параболы.

На практике удобно использовать квадрат модуля – это снижает вычислительные затраты, а для паракомплексных чисел снимает проблему извлечения корня из отрицательных чисел.

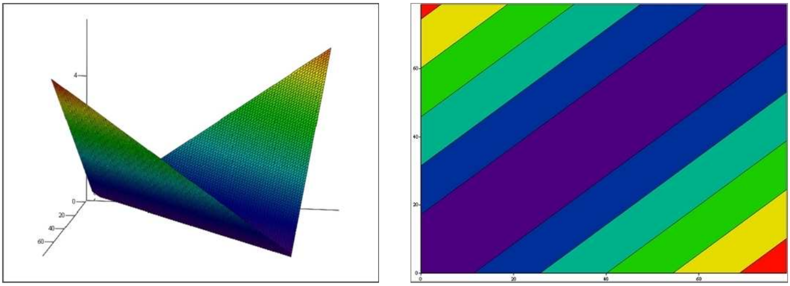

Рис. 3. Функция двух переменных и карта ее изолиний (вырожденные параболы).

2. Исследование свойств полных квадратичных форм

Вычисляя значение модуля произведения вещественнозначного вектора координат на вектор любой из двухкомпонентных алгебр, получаем полную квадратичную форму. Покажем, что каждая из алгебр порождает вполне определенный вид кривой второго порядка.

2.1. ДУАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Полная квадратичная форма для случая дуальной алгебры выводиться следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} c_0 + i \cdot d_0 & c_1 + i \cdot d_1 & c_2 + i \cdot d_2 \end{pmatrix}^T = z,$$

$$xc_0 + i \cdot xd_0 + yc_1 + i \cdot yd_1 + c_2 + i \cdot d_2 = z,$$
$$(xc_0 + yc_1 + c_2) + i \cdot (xd_0 + yd_1 + d_2) = z,$$

$$(xc_0 + yc_1 + c_2)^2 = |z|^2 = H.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$x^2c_0^2 + 2xyc_0c_1 + y^2c_1^2 + 2xc_0c_2 + 2yc_1c_2 + c_2^2 = H. \tag{1}$$

Инвариант квадратичной формы (1) при старших членах равен нулю:

$$c_0^2 \cdot c_1^2 - (c_0c_1)^2 = 0,$$

следовательно, при любых значениях компонент получаем кривую параболического вида [7].

Повернем систему координат на такой угол α, что бы коэффициент при множителе xy стал равен нулю, и выразим значения синуса/косинуса этого угла через компоненты вектора. Тангенс удвоенного угла α равен:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2c_0c_1}{c_0^2 - c_1^2},$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2c_0c_1}{c_0^2-c_1^2}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{(c_0^2-c_1^2)+4c_0^2c_1^2}{(c_0^2-c_1^2)^2}}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c_0^2+c_1^2}{c_0^2-c_1^2}\right)^2}} = -\frac{c_0^2-c_1^2}{c_0^2+c_1^2},$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{c_0^2-c_1^2}{c_0^2+c_1^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{c_0^2+c_1^2-c_0^2+c_1^2}{c_0^2+c_1^2}} =$$

$$= \frac{c_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{c_0^2-c_1^2}{c_0^2+c_1^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{c_0^2+c_1^2+c_0^2-c_1^2}{c_0^2+c_1^2}} =$$

$$= \frac{c_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}.$$

Старые координаты x, y, выраженные через координаты X и Y в повернутой на угол α исходной системе, запишутся так:

$$x = \frac{Xc_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}} - \frac{Yc_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}},$$

$$y = \frac{Xc_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}} + \frac{Yc_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}},$$

Подставим их в полную квадратичную форму (1):

$$c_0^2\left(\frac{Xc_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}-\frac{Yc_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}\right)^2+c_1^2\left(\frac{Xc_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}+\frac{Yc_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}\right)^2+$$

$$+2c_0c_1\left(\frac{Xc_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}-\frac{Yc_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}\right)\left(\frac{Xc_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}+\frac{Yc_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}\right)+$$

$$+2c_0c_2\left(\frac{Xc_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}-\frac{Yc_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}\right)+$$

$$+2c_1c_2\left(\frac{Xc_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}+\frac{Yc_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}\right)+c_2^2=H,$$

$$\frac{c_0^2}{c_0^2+c_1^2}\left(X^2c_1^2-2XYc_1c_0+Y^2c_0^2\right)+$$

$$+\frac{c_1^2}{c_0^2+c_1^2}\left(X^2c_0^2+2XYc_0c_1+Y^2c_1^2\right)+$$

$$+\frac{2c_0c_1}{c_0^2+c_1^2}\left(X^2c_0c_1+XYc_1^2-XYc_0^2-Y^2c_0c_1\right)+$$

$$+\frac{2Xc_0c_1c_2}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}-\frac{2Yc_0^2c_2}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}+\frac{2Xc_0c_1c_2}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}+\frac{2Yc_1^2c_2}{\sqrt{c_0^2+c_1^2}}+c_2^2=H.$$

Умножим все слагаемые на подкоренное выражение, перенесем свободный член вправо и обозначим полученную сумму через h

$$X^2c_0^2c_1^2-2XYc_0^3+Y^2c_0^4+Xc_0^2c_1^2+2XYc_0c_1^3+Y^2c_1^4+$$

$$+2X^2c_0^2c_1^2+2XYc_0c_1^3-2XYc_0^3c_1-2Y^2c_0^2c_1^2+$$

$$+2c_0c_1c_2\sqrt{c_0^2+c_1^2}-2Yc_0^2c_2\sqrt{c_0^2+c_1^2}+$$

$$+2Xc_0c_1c_2\sqrt{c_0^2+c_1^2}+2Yc_1^2c_2=h,$$

$$4X^2c_0^2c_1^2+Y^2\left(c_0^2-c_1^2\right)+4XYc_0c_1\left(c_0^2-c_1^2\right)+$$

$$+4Xc_0c_1c_2\sqrt{c_0^2+c_1^2}+2Yc_2\left(c_1^2-c_0^2\right)\sqrt{c_0^2+c_1^2}=h.$$

Поворот системы координат на угол α должен приводить к тому, что коэффициент при множителе xy становится равным нулю, а это возможно в трех случаях:

$$\begin{array}{ll} c_0=0, & c_1\neq 0; \\ c_0\neq 0, & c_1=0; \\ c_0=\pm c_1. & \end{array}$$

В первых двух случаях получаем квадратное уравнение, не зависящее от X, в третьем случае получаем квадратное уравнение, не зависящее от Y; геометрическое представление таких уравнений есть две параллельные прямые. Другими словами, дуальные числа всегда порождают вырожденную параболу.

2.2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Анализ полной квадратичной формы для комплексной алгебры:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} c_0 + i \cdot d_0 & c_1 + i \cdot d_1 & c_2 + i \cdot d_2 \end{pmatrix}^T = z,$$

$$xc_0 + i \cdot xd_0 + yc_1 + i \cdot yd_1 + c_2 + i \cdot d_2 = z.$$

Группируя действительные и мнимые компоненты, получим

$$\begin{aligned} &(xc_0 + yc_1 + c_2) + i \cdot (xd_0 + yd_1 + d_2) = z, \\ &(xc_0 + yc_1 + c_2)^2 + (xd_0 + yd_1 + d_2)^2 = |z|^2 = H. \end{aligned} \tag{2}$$

Раскрывая скобки, получим результат

$$\begin{aligned} &x^2 c_0^2 + 2xyc_0c_1 + y^2 c_1^2 + 2xc_0c_2 + 2yc_1c_2 + c_2^2 + \\ &+ x^2 d_0^2 + 2xyd_0d_1 + y^2 d_1^2 + 2xd_0d_2 + 2yd_1d_2 + d_2^2 = H, \end{aligned} \tag{3}$$

подобный тому, что был проведен для дуальной алгебры, приводит к громоздким выкладкам. Вместо этого рассмотрим частный и вырожденные случаи эллипсов. Если компоненты элементов комплексного вектора равны $-c_0 = c_1 = d_0 = d_1 = A$ и $c_2 = d_2 = 0$, тогда имеем выражение:

$$x^2 \left(A^2 + A^2\right) + y^2 \left(A^2 + A^2\right) + 2xyA^2 + 2xyA^2 = H,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{H}{2A^2}.$$

уравнение окружности.

Найдем значения компоненты c_2 и d_2 для окружности с центром в произвольной точке $[x_0; y_0]$. В центре окружности модуль комплексного числа z будет равен нулю, следовательно, и действительная, и мнимая компоненты z также равны нулю. Тогда уравнение:

$$-x_0A + i \cdot x_0A + y_0A + i \cdot yA + c_2 + i \cdot d_2 = 0 + i \cdot 0,$$

можно расписать в виде системы:

$$\begin{cases} -x_0A + y_0A + c_2 = 0 \\ -x_0A + y_0A + d_2 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{r} c_2 = A(x_0 - y_0) \\ d_2 = -A(x_0 - y_0) \end{array} \right.$$

таким образом, коэффициенты c_2 и d_2 отвечают за месторасположение центра.

Для окружности с центром в точке $[0; 0]$ имеем:

$$-xA + i \cdot xA + yA + i \cdot yA = z,$$

пусть $x = 0$, тогда

$$yA + i \cdot yA = z,$$

$$y^2A^2 + y^2A^2 = |z| = H,$$

$$y = A\sqrt{\frac{H}{2}}.$$

В данном случае значение y соответствует радиусу окружности. Геометрический смысл параметра – расстояние от вершины конуса до точки пересечения его оси с секущей плоскостью.

Если значения компонент d_0, c_1, d_1, c_2 и d_2 зафиксированы, а c_0 стремиться в бесконечность, то эллипс вырождается в отрезок.

Доказательство этого утверждения приведено ниже (см. систему уравнений (12)).

Если $c_0 = c_1 = d_0 = d_1 = A$ и $c_2 = d_2 = 0$, тогда получим

$$x^2\left(A^2 + A^2\right) + y^2\left(A^2 + A^2\right) + 2xyA^2 + 2xyA^2 = H,$$

$$2A^2x^2 + 2A^2y^2 + 4A^2xy = H,$$

$$(x+y)^2 = \frac{H}{2A^2}.$$

$$x + y = \pm\sqrt{\frac{H}{2A^2}},$$

уравнение двух параллельных прямых.

Следующий вырожденный случай – это окружность нулевого радиуса, а геометрическая интерпретация – точка, полученная проведением секущей плоскости через вершину конуса. Если секущую сместить ниже вершины конуса, то получим полный набор эллиптических кривых, но уже мнимых.

Другими словами, комплексные числа всегда порождают кривые эллиптического вида.

2.3. ПАРАКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Полная квадратичная форма для случая паракомплексной алгебры выводиться следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} c_0 + i \cdot d_0 & c_1 + i \cdot d_1 & c_2 + i \cdot d_2 \end{pmatrix}^T = z,$$

$$xc_0 + i \cdot xd_0 + yc_1 + i \cdot yd_1 + c_2 + i \cdot d_2 = z,$$

$$(xc_0 + yc_1 + c_2) + i \cdot (xd_0 + yd_1 + d_2) = z,$$

(4)

$$(xc_0 + yc_1 + c_2)^2 - (xd_0 + yd_1 + d_2)^2 = |z|^2 = H.$$

$$x^2c_0^2 + 2xyc_0c_1 + y^2c_1^2 + 2xc_0c_2 + 2yc_1c_2 + c_2^2 -$$

(5)

$$-x^2d_0^2 - 2xyd_0d_1 - y^2d_1^2 - 2xd_0d_2 - 2yd_1d_2 - d_2^2 = H.$$

Рассмотрим частный и вырожденные случаи гиперболы. Если $-d_1 = d_0 = c_1 = c_0 =$ и $c_2 = d_2 = 0$, тогда получим:

$$x^2\left(A^2 - A^2\right) + y^2\left(A^2 - A^2\right) + 2xyA^2 + 2xyA^2 = H,$$

$$y = \frac{H}{4A^2x},$$

уравнение равносторонней гиперболы, ветви которой расположены в первом и третьем квадрантах координатной плоскости. Геометрический смысл параметра – расстояние от вершины конуса до секущей плоскости, которая параллельна оси конуса.

Ранее утверждалось, что мнимые эллипсы получаются перемещением секущей плоскости ниже вершины конуса (отрицательные значения), т.е., «действительная» и «мнимая» секущие параллельны. Сопряженная гипербола получится, если «мнимую» секущую провести перпендикулярно «действительной» секущей и параллельно оси конуса.

Вычислительный эксперимент показал, что на асимптотах гиперболы модуль паракомплексного числа равен нулю:

$$\sqrt{\mathrm{Re}^2 - \mathrm{Im}^2} = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}^2 = \mathrm{Im}^2, \Rightarrow |\,\mathrm{Re}\,| = |\,\mathrm{Im}\,|,$$

тогда из уравнения (4) можно вывести уравнения асимптот:

$$xc_0 + yc_1 + c_2 = xd_0 + y + d_1 + d_2,$$
$$y(c_1 - d_1) = d_2 - c_2 + x(d_0 - c_0),$$

$$y = x\frac{d_0 - c_0}{c_1 - d_1} + \frac{d_2 - c_2}{c_1 - d_1}.$$

$$y(c_1 + d_1) = -d_2 - c_2 - x(d_0 + c_0),$$

$$y = -x\frac{d_0 + c_0}{c_1 + d_1} - \frac{d_2 + c_2}{c_1 + d_1}.$$

Если $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ или $d_0 = d_1 = d_2 = 0$, то асимптоты гиперболы становятся параллельными, кроме того, если $-c_0 = c_1 = c_2 = A$ и $-d_0 = d_1 = -d_2 = B$, или $-c_0 = c_1 = A$, $-d_0 = d_1 = B$ и $c_2 = d_2 = 0$, то

$$y = x\frac{-B + A}{A - B} = x,$$

$$y = -x\frac{-B - A}{A + B} = x,$$

асимптоты ещё и совпадают. В обоих случаях гиперболы вырождаются в две параллельные прямые.

Когда значения компонент c_0, c_1, c_2, d_0, и d_1 стремятся в бесконечность, гиперболы вырождаются в две пересекающиеся прямые или параметр H равен нулю.

Другими словами, паракомплексные числа всегда порождают кривые гиперболического вида.

Таким образом, неявно задавая функцию второго порядка через дуальные числа, получить полного разнообразия параболических кривых не удается. Далее дуальные числа не рассматриваются, поскольку и комплексные и паракомплексные числа могут порождать две параллельные прямые.

3. Преобразования неявного задания функции

Переходы от неявного задания функции к её каноническому уравнению, параметрическому виду и обратно осуществляются через полную квадратичную форму.

3.1. КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПСА

Воспользуемся общим уравнением кривой второго порядка на плоскости XOY в виде [3]:

(6) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Сопоставляя коэффициенты уравнений (3) и (6), можно установить соответствие между коэффициентами уравнения, описывающего семейство эллипсов, и компонентами комплексного вектора:

(7) $$\begin{aligned} a_{11} &= c_0^2 + d_0^2, \\ a_{12} &= c_0c_1 + d_0d_1, \\ \\ a_{22} &= c_1^2 + d_1^2, \\ a_{13} &= c_0c_2 + d_0d_2, \\ a_{23} &= c_1c_2 + d_1d_2, \\ \\ a_{33} &= c_2^2 + d_2^2 - 1. \end{aligned}$$

Каноническое уравнение эллипса:

(8) $$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

где m и n – величины полуосей эллипса.

Такое уравнение описывает эллипс с центром в начале координат. Чтобы перейти от общего уравнения кривой второго порядка, описывающего произвольный эллипс, к каноническому, необходимо привести повернутую и смещенную систему координат к центральному виду. Координаты каждой точки нужно подвергнуть преобразованию согласно следующим формулам [1]:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha - x_0, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha - y_0, \end{aligned} \tag{9}$$

где α – угол поворота осей координат – определяется как угол между положительным направление оси базовой системы координат и положительным направлением оси O_1X_1 смещенной и повернутой системы;

x_0 и y_0 – координаты точки, в которую осуществляется параллельный перенос базовой системы координат, подвергнутой повороту на угол α. Т.е., $x_0' = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha$ и $y_0' = -x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha$.

Подставим в (8) формулы перехода к старым координатам (9):

$$\frac{(x\cos\alpha + y\sin\alpha - x_0)^2}{m^2} + \frac{(-x\sin\alpha + y\cos\alpha - y_0)^2}{n^2} = 1. \tag{10}$$

Далее раскроем скобки и приведем подобные. Сопоставляя результат преобразования и квадратичную форму (6), найдем выражение, позволяющее определить коэффициенты общего уравнения кривой второго порядка посредством базовых характеристик эллипса – длин полуосей, угла поворота относительно базовой системы координат и координат центра эллипса:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{m^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{n^2}\sin^2\alpha,\\
a_{12} &= \frac{1}{m^2}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{n^2}\sin\alpha\cos\alpha,\\
a_{22} &= \frac{1}{m^2}\sin^2\alpha + \frac{1}{n^2}\cos^2\alpha,\\
a_{13} &= -\frac{x_0}{m^2}\cos^2\alpha + \frac{y_0}{n^2}\sin^2\alpha,\\
a_{23} &= -\frac{x_0}{m^2}\sin^2\alpha - \frac{y_0}{n^2}\cos^2\alpha,\\
a_{33} &= \frac{x_0^2}{m^2} + \frac{y_0^2}{n^2} - 1,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где x_0 и y_0 – координаты точки, в которую осуществляется параллельный перенос базовой системы координат, подвергнутой повороту на угол α.

Далее выразим компоненты комплексного вектора через характеристики эллипса, сопоставив системы (7) и (11)

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{m}\cos\alpha, & d_0 &= -\frac{1}{n}\sin\alpha,\\
c_1 &= \frac{1}{m}\sin\alpha, & d_1 &= \frac{1}{n}\cos\alpha,\\
c_2 &= -\frac{x_0}{m}, & d_2 &= -\frac{y_0}{n}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где m и n – величины полуосей эллипса;

(x_0, y_0) – координаты центра эллипса;

α – угол между положительным направлением оси абсцисс и полуосью эллипса.

Таким образом, имея геометрические характеристики произвольного эллипса, можно получить соответствующие ему компоненты комплексного вектора.

Анализ системы (12) показывает, что если значения компонент d_0, c_1, d_1, c_2 и d_2 зафиксированы, а c_0 стремится в бесконечность, то полуось m и координата x_0 стремятся к нулю, а эллипс вырождается в отрезок – в свою удвоенную полуось, перпендикулярную оси OX. Если в бесконечность стремится компонента c_1 или d_1, то отрезок будет перпендикулярен оси OY.

Для перехода от компонент комплексного вектора к каноническому уравнению, необходимо выписать полную квадратичную форму и преобразовать её классическим образом [3].

3.2. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ЭЛЛИПСА

Сопоставляя параметрическое задание эллипса:

$$\begin{cases} x = m\cos t \\ y = n\sin t \end{cases} \tag{13}$$

и формулы преобразования координат (9), получаем

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - x_0 = m\cos t \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha - y_0 = n\cos t \end{cases} \tag{14}$$

Разделим первую строку системы (14) на $\cos\alpha$, а вторую на $\sin\alpha$, и сложим полученные результаты:

$$\begin{gathered} y\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = m\frac{\cos t}{\cos\alpha} + n\frac{\sin t}{\sin\alpha} + \frac{x_0}{\cos\alpha} + \frac{y_0}{\sin\alpha}, \\ y = \frac{m\frac{\cos t}{\cos\alpha} + n\frac{\sin t}{\sin\alpha} + \frac{x_0}{\cos\alpha} + \frac{y_0}{\sin\alpha}}{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}. \end{gathered} \tag{15}$$

Окончательный вид выражения (15) после упрощения:

(16) $$y = (m\cos t + x_0)\sin\alpha + (n\sin t + y_0)\cos\alpha.$$

Согласно описанной схеме, выразим из системы (14) x через известные характеристики эллипса и параметры поворота и переноса исходной системы координат:

(17)
$$x\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = m\frac{\cos t}{\sin\alpha} - n\frac{\sin t}{\cos\alpha} + \frac{x_0}{\sin\alpha} - \frac{y_0}{\cos\alpha},$$
$$x = \frac{m\frac{\cos t}{\sin\alpha} - n\frac{\sin t}{\cos\alpha} + \frac{x_0}{\sin\alpha} - \frac{y_0}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}.$$

Преобразуем это выражение к виду (16):

(18) $$x = (m\cos t + x_0)\sin\alpha - (n\sin t + y_0)\cos\alpha.$$

Таким образом, параметрическое задание смещенного и повернутого эллипса описывается следующей системой:

(19)
$$\begin{cases} x = (m\cos t + x_0)\sin\alpha - (n\sin t + y_0)\cos\alpha \\ y = (m\cos t + x_0)\sin\alpha + (n\sin t + y_0)\cos\alpha \end{cases}$$

Распишем уравнение (2) в виде системы уравнений:

(20)
$$\begin{cases} xc_0 + yc_1 + c_2 = \operatorname{Re} z \\ xd_0 + yd_1 + d_2 = \operatorname{Im} z \end{cases}$$

Её решение относительно x и y

(21)
$$\begin{cases} x = \dfrac{(\operatorname{Re} z - c_2)\,d_1 - (\operatorname{Im} z - d_2)\,c_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\[2ex] y = \dfrac{(\operatorname{Im} z - d_2)\,c_0 - (\operatorname{Re} z - c_0)\,d_0}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \end{cases}$$

Далее, осуществим подстановку в (21) значения коэффициентов комплексного вектора (12)

$$x = \frac{\left(\operatorname{Re} z + \frac{x_0}{m}\right) \frac{\cos\alpha}{n} - \left(\operatorname{Im} z + \frac{y_0}{n}\right) \frac{\sin\alpha}{m}}{2 \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{mn}} = \tag{22}$$

$$= (m \operatorname{Re} z + x_0) \cos\alpha - (n \operatorname{Im} z + y_0) \sin\alpha.$$

Аналогичное выражение можно получить и для y.

Сопоставляя (19) и (22) и используя основное тригонометрическое тождество, приравняем $\operatorname{Re} z = \cos t$ и $\operatorname{Im} z = \sin t$. Тогда из (21) получим

$$\begin{cases} x = \dfrac{(\cos t - c_2)\, d_1 - (\sin t - d_2)\, c_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0} = \\[2ex] \quad = \dfrac{c_1 d_2 - c_2 d_1 + d_1 \cos t - c_1 \sin t}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\[2ex] y = \dfrac{(\sin t - d_2)\, c_0 - (\cos t - c_0)\, d_0}{c_0 d_1 - c_1 d_0} = \\[2ex] \quad = \dfrac{c_2 d_0 - c_0 d_2 + c_0 \sin t - d_0 \cos t}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \end{cases} \tag{23}$$

Преобразуя эту систему с использованием соотношения

$$A \sin t \pm B \cos t = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(t \pm \phi), \tag{24}$$

где $\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ и $\sin\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, получим

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1 d_2 - c_2 d_2 + \sqrt{c_1^2 + d_1^2} \cdot \cos\left(t - \phi_1\right)}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\[2ex] y = \dfrac{c_2 d_0 - c_0 d_2 + \sqrt{c_0^2 + d_0^2} \cdot \sin\left(t - \phi_0\right)}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \end{cases} \tag{25}$$

где

$$\cos\phi_1 = \frac{d_1}{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}}, \qquad \sin\phi_1 = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}},$$

$$\cos\phi_0 = \frac{c_0}{\sqrt{c_0^2 + d_0^2}}, \qquad \sin\phi_1 = \frac{d_0}{\sqrt{c_0^2 + d_0^2}}.$$

Вычислительный эксперимент показал, что параметрическое представление эллипса через компоненты вектора весов выглядит следующим образом:
(26)

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \cos\left(t - \arccos\left(\dfrac{d_1}{c_1^2 + d_1^2}\right)\right) + \dfrac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\ x = \dfrac{\sqrt{c_0^2 + d_0^2}}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \sin\left(t - \arccos\left(\dfrac{c_0}{c_0^2 + d_0^2}\right)\right) + \dfrac{c_2 d_0 - c_0 d_2}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \end{cases}$$

Затем решим обратную задачу – получим компоненты вектора весов исходя из коэффициентов параметрического представления эллипса:

(27)
$$\begin{cases} x = b_0 \cos(t + b_1) + b_2 \\ y = b_3 \sin(t + b_4) + b_5 \end{cases}$$

Сопоставляя системы уравнений (25), (26) и (27), получим систему уравнений:

$$
\left\{
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{c_1^2 + d_1^2}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\
b_3 &= \frac{c_0^2 + d_0^2}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\
\cos b_1 &= \frac{d_1}{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}} \\
\cos b_4 &= \frac{c_0}{\sqrt{c_0^2 + d_0^2}} \\
\sin b_1 &= \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}} \\
\sin b_4 &= \frac{d_0}{\sqrt{c_0^2 + d_0^2}} \\
b_2 &= \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\
b_5 &= \frac{c_2 d_0 - c_0 d_2}{c_0 d_1 - c_1 d_0}
\end{aligned}
\right.
\tag{28}
$$

Из первых шести уравнений системы (28), упрощая и проводя замену переменных, получим линейную систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$
\left\{
\begin{aligned}
b_0 \cos b_1 &= g_0 = \frac{d_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0}\\
b_0 \sin b_1 &= g_1 = \frac{c_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0}\\
b_3 \cos b_4 &= g_2 = \frac{c_0}{c_0 d_1 - c_1 d_0}\\
b_3 \sin b_4 &= g_3 = \frac{d_0}{c_0 d_1 - c_1 d_0}
\end{aligned}
\right. \tag{29}
$$

Решением системы (29) служат соотношения:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{g_2}{g_0 g_2 - g_1 g_3}, & d_0 &= \frac{g_3}{g_0 g_2 - g_1 g_3},\\
c_1 &= \frac{g_1}{g_0 g_2 - g_1 g_3}, & d_1 &= \frac{g_0}{g_0 g_2 - g_1 g_3}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Последние два уравнения системы (28) содержат два неизвестных

$$
\left\{
\begin{aligned}
b_2 &= \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0}\\
b_5 &= \frac{c_2 d_0 - c_0 d_2}{c_0 d_1 - c_1 d_0}
\end{aligned}
\right.
\left|
\begin{aligned}
b_2(c_0 d_1 - c_1 d_0) &= c_1 d_2 - c_2 d_1\\
b_5(c_0 d_1 - c_1 d_0) &= c_2 d_0 - c_0 d_2
\end{aligned}
\right. \tag{31}
$$

Решая систему (31), получим:

$$
\begin{aligned}
c_2 &= -b_2 c_0 - b_5 c_1,\\
c_1 &= -b_2 d_0 - b_5 d_1.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Вычислительный эксперимент показал, что компоненты вектора весов зависят от коэффициентов параметрического представления следующим образом:

$$c_0 = -\frac{\cos b_4}{b_0 \cos b_1 - b_4}, \qquad d_0 = -\frac{\sin b_4}{b_0 \cos b_1 - b_4},$$

(33)

$$c_1 = -\frac{\sin b_1}{b_3 \cos b_1 - b_4}, \qquad d_1 = \frac{\cos b_1}{b_3 \cos b_1 - b_4},$$

$$c_2 = \frac{b_2 b_3 \cos b_4 + b_0 b_5 \sin b_1}{b_0 b_3 \cos b_1 - b_4}, \quad d_2 = \frac{b_2 b_3 \sin b_4 - b_0 b_5 \cos b_1}{b_0 b_3 \cos b_1 - b_4}.$$

3.3. КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ГИПЕРБОЛЫ

Повторяя последовательность преобразований (формулы (6–12), но уже для канонического уравнения гиперболы

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1, \tag{34}$$

получим зависимость компонент паракомплексного вектора от геометрических характеристик произвольной гиперболы:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{m}\cos\alpha, & d_0 &= -\frac{1}{n}\sin\alpha, \\ c_1 &= \frac{1}{m}\sin\alpha, & d_1 &= \frac{1}{n}\cos\alpha, \\ c_2 &= -\frac{x_0}{m}, & d_2 &= -\frac{y_0}{n}, \end{aligned} \tag{35}$$

где m и n – величины полуосей гиперболы;

(x_0, y_0) – координаты центра гиперболы;

α – угол поворота системы координат.

3.4. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ГИПЕРБОЛЫ

Используя параметрическое задание гиперболы

$$\begin{cases} x = m \operatorname{ch} t \\ y = n \operatorname{sh} t \end{cases} \tag{36}$$

и повторяя последовательность преобразований (формулы (13–22), получим параметрическое задание гиперболы через компоненты паракомплексного вектора весов следующего вида:

$$\begin{cases} x = \dfrac{d_1 \operatorname{ch} t}{c_0 d_1 - c_1 d_0} - \dfrac{c_1 \operatorname{sh} t}{c_0 d_1 - c_1 d_0} + \dfrac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\[2ex] y = \dfrac{c_0 \operatorname{sh} t}{c_0 d_1 - c_1 d_0} - \dfrac{d_0 \operatorname{ch} t}{c_0 d_1 - c_1 d_0} + \dfrac{c_2 d_0 - c_0 d_2}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \end{cases} \tag{37}$$

Решая обратную задачу – получение коэффциентов паракомплексного вектора из коэффициентов параметрического представления гиперболы

$$\begin{cases} x = g_0 \operatorname{ch} t - g_1 \operatorname{sh} t + g_2 \\ y = g_3 \operatorname{sh} t - g_4 \operatorname{ch} t + g_5 \end{cases} \tag{38}$$

получим систему уравнений аналогичную системе (29). Далее, повторяя последовательность преобразований (формулы (29–30), получим

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{g_3}{g_0 g_3 - g_1 g_4}, & d_0 &= \frac{g_1}{g_0 g_3 - g_1 g_4}, \\ c_1 &= \frac{g_4}{g_0 g_3 - g_1 g_4} & d_1 &= \frac{g_0}{g_0 g_3 - g_1 g_4}, \\ c_2 &= -\frac{g_2 g_3 + g_1 g_5}{g_0 g_3 - g_1 g_4}, & d_2 &= -\frac{g_2 g_4 + g_0 g_5}{g_0 g_3 - g_1 g_4}. \end{aligned} \tag{39}$$

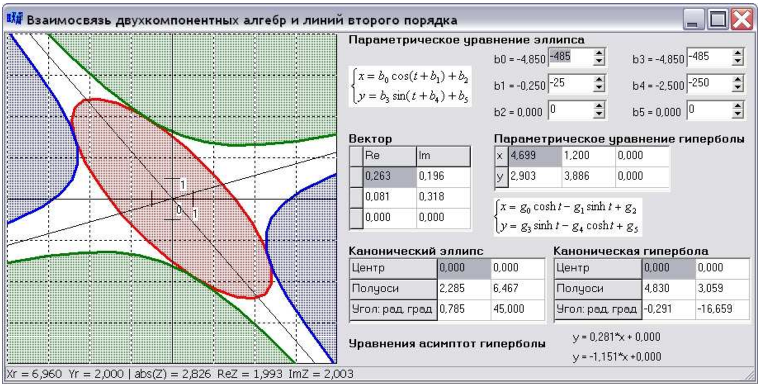

Рис. 4. Скриншот демо-программы.

4. Заключение

На рис. 4 приведено изображение окна программы, которая демонстрирует взаимосвязь различных способов описания эллиптических и гиперболических кривых и идентичность такого представления.

В графической части окна программы выводятся:

- асимптоты гипербол;
- действительная гипербола (синяя линия);
- сопряженная гипербола (зеленая линия);
- эллипс.

Эллиптическая линия рисуется исходя из параметрического представления эллипса, коэффициенты которого можно менять. Значения компонентов комплекснозначного вектора весов вычисляются по формулам (33).

Из координат каждого пикселя графической части окна формируется вещественнозначный вектор, который умножается на комплекснозначный вектор весов. Если значение модуля результата меньше единицы, то соответствующий пиксель окрашивается в красный цвет.

Из компонент комплекснозначного вектора весов вычисляются геометрические характеристики эллипса:

- координаты центра;
- значения полуосей;
- угол поворота системы координат.

Значения компонент комплекснозначного вектора весов приравниваются к компонентам паракомплекснозначного вектора. Из координат каждого пикселя графической части окна формируется вещественнозначный вектор, который умножается на паракомплекснозначный вектор весов. Если значение модуля результата меньше -1, то соответствующий пиксель окрашивается в зеленый цвет (сопряженная гипербола), если значение модуля результата больше 1, то соответствующий пиксель окрашивается в синий цвет (действительная гипербола).

Из компонент паракомплекснозначного вектора весов вычисляются характеристики гипербол:

- координаты центра;
- значения полуосей;
- угол поворота системы координат;
- уравнения асимптот;
- коэффициенты параметрического представления.

Таким образом, кривые второго порядка отображаются двумя способами: параметрически (собственно линии) и через умножение векторов (заливка областей). Результаты отображения обоих способов соответствуют друг другу, следовательно, приведенные выше математические выкладки верны.

В работе [2] показано существование мнимых дополнений к кривым второго порядка. Мнимым дополнение к эллипсу служит касательная гипербола, и наоборот мнимым дополнением гиперболы будет эллипс. Описанный выше метод можно использовать для построения мнимых дополнений к линиям второго порядка.

Литература

1. ГИНИЯТУЛЛИН В.М. *Моделирование логических функций в нейросетевом базисе* // Нефтегазовое дело. - 2008. - Т.6, № 1. - С. 35-43.
2. ГИРШ А.Г. *Теория и практика мнимых образов в геометрии* [Электронный ресурс] // URL: http://www.mai.ru/apg/Volume7/v7/n16.htm (дата обращения 11.12.2008).
3. ЕФИМОВ Н.В. *Квадратичные формы и матрицы* - М. : Наука, 1975. - 160 с.
4. КАНТОР И.Л., СОЛОДОВНИКОВ А.С. *Гиперкомплексные числа* - М. : Наука, 1973. - 144 с.
5. КАРАТАЕВ Е.А. *Гиперкомплексные числа. Классификатор.* [Электронный ресурс] // URL: http://karataev.nm.ru/hipclass.pdf (дата обращения 11.12.2008).
6. ПАВЛОВ Д.Г., ПРОСАНДЕЕВА М.С., ПАНЧЕЛЮГА В.А. *О построении аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел.* // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. - 2007. - Т 4, № 7. - С. 93-97.
7. ФРОЛОВ С.В., ШОСТАК Р.Я. *Курс высшей математики: учеб. для вузов.* - М. : Высшая школа, 1966. - 663 с.

THE ASSOCIATION OF TWO-COMPONENT ALGEBRAS AND SECOND-ORDER CURVES

Alexey Vulfin, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, postgraduate student (vulfin.alexey@gmail.com).
Vahit Giniyatullin, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Cand.Sc., assistant professor (fentazer@mail.ru).

Abstract: The association of two-component algebras, quadratic functions and second-order curves is considered in this work. An original approach for an implicit representation of functions is introduced. A compatibility of some algebra and the curve concrete form is shown. Special and degenerate cases of second-order curves are considered. An algorithm of conversion from the implicit representation of function to its canonical equation, the parametric form and conversely is proposed.

Keywords: two-component algebra, second-order curve, implicit representation of function, canonical equation, parametric form of dependence.