

УДК 517.15 + 330.42

ББК 22.1

МОДЕЛИ АНАЛИЗА ОПТИМАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСА

Степанова Н.В.¹ Фархадов М.П.²

*(Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова
Российской академии наук, Москва)*

В статье рассматривается имитационное моделирование и численные расчеты для случайного процесса использования ресурса. Проводится оценка входных параметров модели. Приведено сравнение полученных ранее асимптотических результатов с данными, полученными на основе имитационного моделирования. А также дается оценка границ применимости полученных асимптотических соотношений.

Ключевые слова: имитационное моделирование, асимптотические результаты, оптимальные характеристики процесса использования ресурса, вероятность порчи ресурса, математическая модель управления ресурсам.

Введение

Построению и исследованию различных моделей управления ресурсами уделяется большое внимание, и публикационная активность по этой тематике чрезвычайно высока. Спектр рассматриваемых моделей и используемых для

1 Наталья Викторовна Степанова, старший научный сотрудник, кандидат технических наук (natalia0410@rambler.ru), (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-87-10).

2 Маис Паша-Оглы Фархадов, заведующий лабораторией, доктор технических наук (mais@ipu.ru), (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-87-10).

их анализа и оптимизации подходов очень широк. Однако многие исследователи обращают внимание на чрезмерную сложность моделей и получаемых математических выражений, тормозящую их практическое использование.

В работах [1,2,10] рассматриваются, в основном, приближенные вероятностные (со случайным спросом) модели использования ресурса с коротким жизненным циклом на основе диффузионной аппроксимации случайного процесса, описывающего количество имеющегося ресурса. Модели содержат небольшое количество параметров, которые, как правило, либо известны, либо могут быть легко статистически оценены [3,4,5,6,7]. Например, случайная величина одного запроса на ресурс представлена только первым и вторым начальными моментами, т.е. для применения этих моделей нет необходимости знать функцию распределения запросов. При исследовании применяются различные эвристические оригинальные приближенные методы, позволяющие получить обозримые результаты которые можно рекомендовать для практического применения [11,12].

Целью работы является определение оптимальных характеристик и имитационное моделирование процесса использования ресурса для повышения эффективности процессов использования ресурсов с коротким жизненным циклом.

1. Математическая модель

Предприятие закупает партию ресурса объема Q_0 , которая должна быть использована в течение производственного цикла длительности T . Рассматривается стационарный случайный процесс $x(t)$ – объем запросов на ресурс за время t .

При построении математической модели были использованы следующие величины и предположения

- запросы на ресурс поступают независимо, и величина запроса ξ является случайной величиной с $M(\xi) = a_1$ и $M(\xi^2) = a_2$;

- количество запросов n ($n \gg 1$) за время T является случайной величиной с $M(n) = m_T$ и $D(n) = \sigma_T^2$; если поток запросов на ресурс является стационарным пуассоновским потоком с интенсивностью λ , то $m_T = \lambda T$, $\sigma_T^2 = \lambda T$).

При этих условиях процесс $x(t)$ может быть приближенно описан диффузионным уравнением

$$dx(t) = m_0 dt + \sigma_0 dw_t; x(0)=0,$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс,

$$m_0 \sim \frac{a_1 m_T}{T} \sim a_1 \lambda, \quad \sigma_0^2 \sim \frac{m_T(a_2 - a_1^2) + \sigma_T^2 a_1^2}{T} \sim a_2 \lambda \quad \text{при}$$

больших значениях T .

Пусть X – общий объем запросов на ресурс за время T ; t – длительность времени использования всей партии ресурса объема Q_0 .

Были получены следующие результаты:

1) Случайная величина X имеет асимптотически нормальное распределение: $X \sim N(m_x; \sigma_x^2)$, где

$$m_x = a_1 m_T = a_1 \lambda T, \quad \sigma_x^2 = m_T(a_2 - a_1^2) + \sigma_T^2 a_1^2 = a_2 \lambda T.$$

2) Случайная величина t имеет асимптотически нормальное распределение: $t \sim N(m_t; \sigma_t^2)$, где

$$m_t = Q_0 T / m_x, \quad \sigma_t^2 = (\sigma_x^2 Q_0 T^2) / m_x^3.$$

3) Оценки величин m_x и σ_x^2 могут быть определены по выборке вида: $x_1, \dots, x_i, \dots, x_K; t_1, \dots, t_j, \dots, t_{N-K}$, способ получения, который описан в п. 3.

В п. 2 имитационным моделированием процесса $x(t)$ получены реализации этого процесса $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$, которые в дальнейшем используются для проверки полученных ранее результатов.

2. Имитационная модель

Рассматривается случайный процесс $x(t)$ – объем запросов на продукт за время t [8,9]. Для имитационного моделирования этого процесса на основе дискретно-событийного подхода, необходимо следующее:

1. Сгенерировать поток запросов на продукт.
2. Сгенерировать величину каждого запроса на продукт.

Моделирование потока запросов на продукт сводится к построению последовательности случайных моментов времени поступления запросов t_j . Для пуассоновского потока событий интенсивности λ , длины интервалов времени между событиями потока $\tau_1 = t_1 - t_0, \tau_2 = t_2 - t_1, \dots, \tau_j = t_j - t_{j-1}, \dots$, являются независимыми случайными величинами с экспоненциальным распределением: $p(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} (\tau \geq 0)$. Имитация значений экспоненциальной случайной величины τ

получена с помощью метода обратной функции: $\tau = -\frac{\ln \alpha}{\lambda}$,

где α – случайная величина, имеющая равномерное распределение в $(0; 1]$. Таким образом, $t_j = t_{j-1} - \frac{\ln \alpha}{\lambda}$,

$t_0 = 0$.

Для каждого момента t_j генерируется случайное значение величины запроса – реализация ξ_j случайной

величины ξ с математическим ожиданием $M(\xi) = a_1$, и дисперсией $D(\xi) = a_2 - a_1^2$.

Условием терминции процесса моделирования служит условие $x \geq Q_0$ or $t \geq T$.

Графическое изображение реализаций процесса $x(t)$ показано на Рис.1.

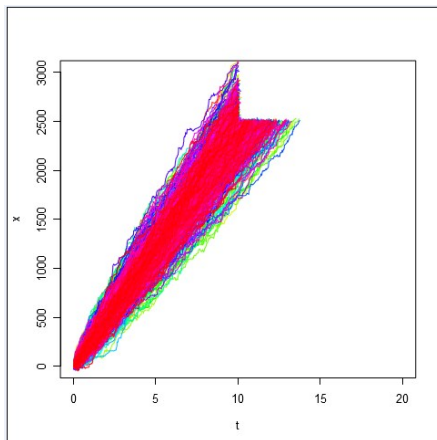


Рис.1. Реализации процесса $x(t)$, полученные в результате имитационного моделирования, $N = 1000$, $a_1 = 8$, $a_2 = 75$, $\lambda = 30$, $Q_0 = 2400$, $T = 10$.

3. Получение выборочных данных

Пусть в результате имитационного моделирования получено N реализаций случайного процесса $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$. Для каждой реализации возможны два случая:

1) В момент окончания производственного цикла был использован ресурс в количестве $X < Q_0$, то есть остался неиспользованный ресурс.

2) Использование ресурса окончилось в момент времени $t < T$, то есть ресурса не хватило.

Для получения выборочных данных, в соответствии с предложенной моделью, будем рассматривать «фиктивное» время в 1-м случае, и «фиктивные» запросы на ресурс во 2-м случае. Это означает следующее:

1) «Фиктивное» время – это промежуток времени, после момента окончания производственного цикла до момента использования всей партии ресурса.

2) «Фиктивные» запросы на ресурс – это запросы, поступившие после момента времени, когда ресурс закончился, до конца производственного цикла.

Пусть для некоторой реализации $x_i(t)$ процесса $x(t)$ выполняется условие 1). В этом случае обозначим через $x_i = x_i(T)$ – количество ресурса, использованного в течение производственного цикла, t_i – длина промежутка времени, за которое будет полностью использована вся партия ресурса (с учетом «фиктивного» времени). Если для некоторой реализации $x_j(t)$ выполняется условие 2), то t_j – момент окончания использования ресурса, $x_j = x_j(T)$ – общий объем запросов за время T (с учетом «фиктивных» запросов).

Получаем выборочные данные, которые будут использоваться следующим образом:

1) выборка $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ – для оценки числовых характеристик и проверки гипотезы о нормальном виде распределения для случайной величины X – общего объема запросов на ресурс за время T .

2) выборка $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ – для оценки числовых характеристик и проверки гипотезы о нормальном виде распределения для случайной величины t – длительности времени использования всей партии ресурса.

3) выборка $x_1, \dots, x_i, \dots, x_K; t_1, \dots, t_j, \dots, t_{N-K}$, (после изменения нумерации данных), в которой выбираются значения x_i в первом случае, и t_j – во втором случае. Эта выборка будет использована для оценки входных характеристик модели методом максимального правдоподобия.

4. Проверка гипотезы о виде распределения

Пусть $\bar{m}_x, \bar{\sigma}_x^2$ – оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X ; $\bar{m}_t, \bar{\sigma}_t^2$ – случайной величины t . Для оценки математического ожидания случайных величин X и t используются выборочные средние:

$$\bar{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \bar{m}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$$
; дисперсии X и t оцениваются с помощью несмещенных выборочных дисперсий:

$$\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2, \quad \bar{\sigma}_t^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - m_t)^2$$

Проверка статистических гипотез о виде распределения проведена с помощью критерия согласия χ^2 Пирсона.

Проверяется основная гипотеза $H_0: X \in N(\bar{m}_x; \bar{\sigma}_x^2)$ против

альтернативной гипотезы $H_1: X \notin N(\bar{m}_x; \bar{\sigma}_x^2)$ с уровнем

значимости α . Вычисление параметров распределения, наблюдаемого значения критерия и вероятности производится с

помощью программы «StatSoft Statistica v6.0» по выборочным значениям $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Аналогичным образом реализуется проверка гипотезы $H_0: t \in N(\bar{m}_t; \bar{\sigma}_t^2)$ против альтернативной гипотезы $H_1: t \notin N(\bar{m}_t; \bar{\sigma}_t^2)$ по выборочным данным $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$.

Далее при описании результатов используется обозначение p (P – value) – достигаемый уровень значимости.

Рассмотрим оценку параметров распределения и проверку гипотезы о нормальном виде распределения случайной величины X .

1. В результате вычислений по выборке $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, ($N = 1000$), при значениях исходных данных $a_1 = 0,5$, $a_2 = 1$, $\lambda = 400$, $Q_0 = 2400$, $T = 12$, получены следующие результаты: $\bar{m}_x = 2401,19$; $\bar{\sigma}_x^2 = 3335,06$; $\chi_s^2 = 2,78690$; $p = 0,7328$.

На Рис.2. изображены гистограмма и теоретическая кривая распределения случайной величины X .

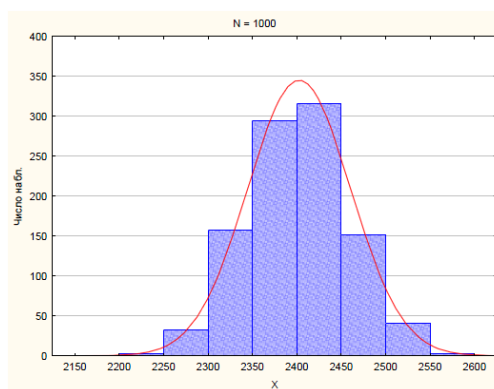


Рис.2.

2. В результате вычислений по выборке $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, ($N = 1000$), при значениях исходных данных $a_1 = 8$, $a_2 = 75$, $\lambda = 30$, $Q_0 = 2500$, $T = 10$, получены следующие результаты: $\bar{m}_x = 2405,05$; $\bar{\sigma}_x^2 = 58165,0$; $\chi_7^2 = 6,26575$; $p = 0,50908$.

На Рис.3. изображены гистограмма и теоретическая кривая распределения случайной величины X .

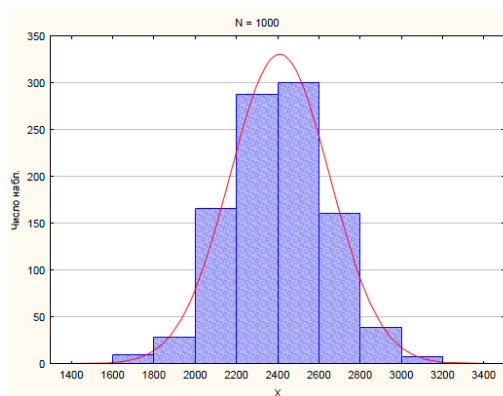


Рис.3.

3. В результате вычислений по выборке $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ ($N = 400$), при значениях исходных данных $a_1 = 3$; $a_2 = 10$; $\lambda = 40$; $Q_0 = 1000$; $T = 9$ получены следующие результаты: $\bar{m}_x = 1086,482$; $\bar{\sigma}_x^2 = 3649,51$; $\chi_7^2 = 1,60261$; $p = 0,97854$.

На Рис.4. изображены гистограмма и теоретическая кривая распределения случайной величины X .

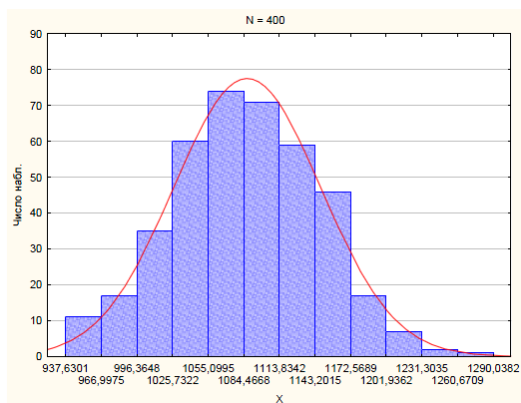


Рис.4.

4. В результате вычислений по выборке $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ ($N = 1000$), при значениях исходных данных $a_1 = 4$; $a_2 = 25$; $\lambda = 25$; $Q_0 = 900$; $T = 9$ получены следующие результаты: $\bar{m}_x = 909,96$; $\bar{\sigma}_x^2 = 21999,56$; $\chi^2_5 = 5,44$; $p = 0,36428$.

На Рис.5. изображены гистограмма и теоретическая кривая распределения случайной величины X .

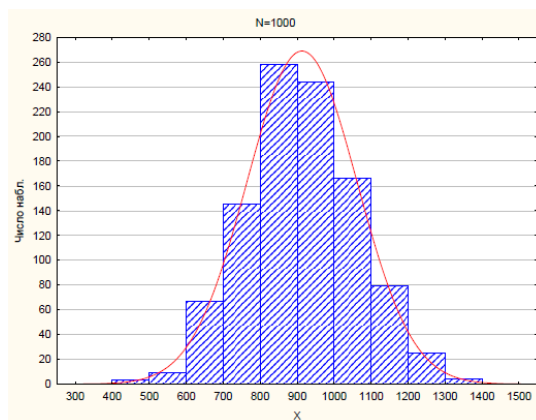


Рис.5.

Рассмотрим оценку параметров распределения и проверку гипотезы о нормальном виде распределения случайной величины t .

5. В результате вычислений по выборке $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ ($N = 1000$), при значениях исходных данных $a_1 = 0,5$, $a_2 = 1$, $\lambda = 400$, $Q_0 = 2400$, $T = 12$, получены следующие результаты: $\bar{m}_t = 11,9998$; $\bar{\sigma}_t^2 = 0,0844$; $\chi_7^2 = 2,60614$; $p = 0,91889$

На Рис.6. изображены гистограмма и теоретическая кривая распределения случайной величины t .

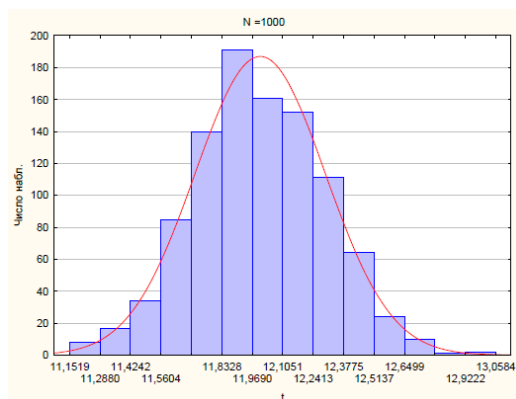


Рис.6.

6. В результате вычислений по выборке $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ ($N = 1000$), при значениях исходных данных: $a_1 = 8$; $a_2 = 75$; $\lambda = 30$; $Q_0 = 2500$; $T = 10$, получены следующие результаты: $\bar{m}_t = 10,46379$; $\bar{\sigma}_t^2 = 1,02464$; $\chi_9^2 = 18,57382$; $p = 0,02907$.

На Рис.7. изображены гистограмма и теоретическая кривая распределения случайной величины t .

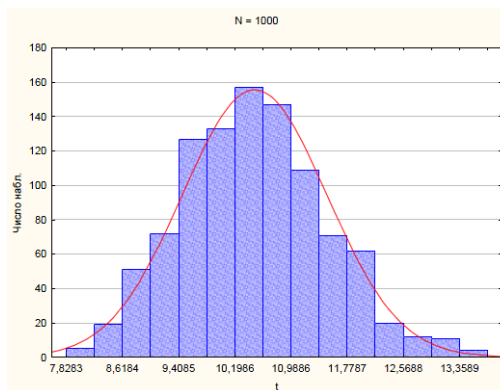


Рис.7.

7. В результате вычислений по выборке $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ ($N = 400$), при значениях исходных данных: $a_1 = 3$; $a_2 = 10$; $\lambda = 40$; $Q_0 = 1000$; $T = 9$ получены следующие результаты: $\bar{m}_t = 8,32754$; $\bar{\sigma}_t^2 = 0,24304$; $\chi^2_7 = 4,82323$; $p = 0,68152$.

На Рис.8. изображены гистограмма и теоретическая кривая распределения случайной величины t .

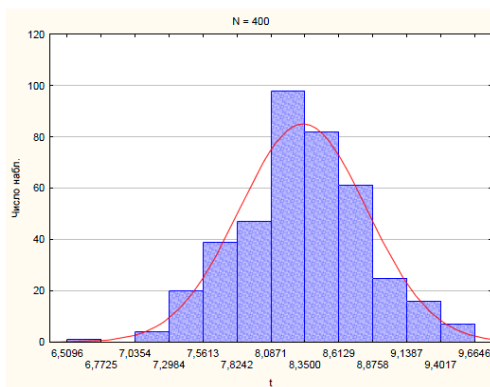


Рис.8.

8. В результате вычислений по выборке $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ ($N = 1000$), при значениях исходных данных $a_1 = 4$; $a_2 = 25$; $\lambda = 25$; $Q_0 = 900$; $T = 9$ получены следующие результаты: $\bar{m}_t = 9,044$; $\bar{\sigma}_t^2 = 2,2707$; $\chi^2_5 = 27,79$; $p = 0,00004$.

На Рис.9. изображены гистограмма и теоретическая кривая распределения случайной величины t .

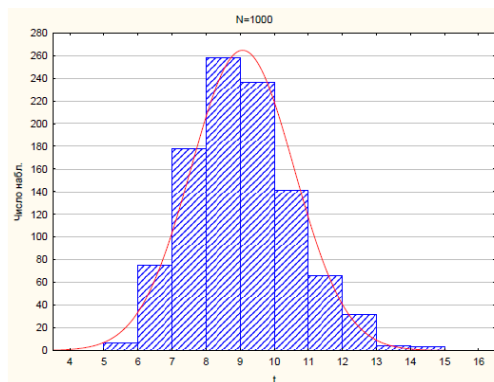


Рис.9.

В случаях 1 – 4, 5, 7 величина достигаемого уровня значимости $p > 0,05$, поэтому можно считать, что результаты моделирования статистически подтверждают теоретические выводы при уровне значимости $\alpha = 0,05$. В случаях 6 и 8 при $\alpha = 0,05$ гипотеза о нормальном виде распределения не подтверждается.

5. Оценивание параметров модели использования ресурса с ограниченным сроком годности

Функция правдоподобия строится для совместной плотности вероятностей выборочных значений случайных

величин X и t , в предположении о нормальном виде распределения этих случайных величин:

$$L = \prod_{i=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \prod_{j=1}^{N-K} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2 Q_0 T^2 / m_x^3}} \exp\left(-\frac{(t_j - Q_0 T / m_x)^2}{2\sigma_x^2 Q_0 T^2 / m_x^3}\right),$$

где m_x, σ_x^2 – соответственно, математическое ожидание и дисперсия X .

Для нахождения оценок численно решается система уравнений

$$\frac{\partial(-2 \ln L)}{\partial(\sigma_x^2)} = 0 \quad \frac{\partial(-2 \ln L)}{\partial m_x} = 0$$

Система имеет вид

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^K \frac{(m_x - x_i)^2}{(\sigma_x^2)^2} - \sum_{j=1}^{N-K} \frac{(t_j - Q_0 T / m_x)^2}{(\sigma_x^2)^2 Q_0 T^2 / m_x^3} + \frac{N}{\sigma_x^2} &= 0, \\ 2 \sum_{i=1}^K \frac{m_x - x_i}{\sigma_x^2} + 2 \frac{Q_0 T}{m_x^2} \sum_{j=1}^{N-K} \frac{t_j - Q_0 T / m_x}{\sigma_x^2 Q_0 T^2 / m_x^3} + 3 m_x^2 \sum_{j=1}^{N-K} \frac{(t_j - Q_0 T / m_x)^2}{\sigma_x^2 Q_0 T^2} - \frac{3(N-K)}{m_x} &= 0, \end{aligned}$$

где значения $x_i (1 \leq i \leq K)$ и $t_j (1 \leq j \leq N-K)$ –

выборочные данные $x_1, \dots, x_i, \dots, x_K; t_1, \dots, t_j, \dots, t_{N-K}$.

Способ получения выборки описан в п.3. данного параграфа.

После преобразования системы получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{N Q_0 T^2} \left(m_x^3 \sum_{j=1}^{N-K} t_j^2 + m_x^2 \left(K Q_0 T^2 - 2 Q_0 T \sum_{j=1}^{N-K} t_j \right) + \right. \\ &\quad \left. + m_x Q_0 T^2 \left((N-K) Q_0 - 2 \sum_{i=1}^K x_i \right) + Q_0 T^2 \sum_{i=1}^K x_i^2 \right), \end{aligned}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{3(N-K)Q_0T^2} \left(3m_x^3 \sum_{j=1}^{N-K} t_j^2 + m_x^2 \left(2KQ_0T^2 - 4Q_0T \sum_{j=1}^{N-K} t_j \right) + m_x Q_0T^2 \left((N-K)Q_0 - 2 \sum_{i=1}^K x_i \right) \right)$$

Полученная система эквивалентна алгебраическому уравнению третьей степени (относительно m_x), решение которого позволяет потом найти σ_x^2 .

Сравним оценки параметров $\bar{m}_x$, $\bar{\sigma}_x$, полученные по выборке $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, и $\hat{m}_x$, $\hat{\sigma}_x$, полученные по выборке $x_1, \dots, x_i, \dots, x_K; t_1, \dots, t_j, \dots, t_{N-K}$ методом максимального правдоподобия.

В результате вычислений по выборке $x_1, \dots, x_i, \dots, x_K; t_1, \dots, t_j, \dots, t_{N-K}$, ($N = 1000$), при значениях исходных данных (случаи 1 и 5): $a_1 = 0,5$, $a_2 = 1$, $\lambda = 400$, $Q_0 = 2400$, $T = 12$, получены следующие результаты: $\hat{m}_x = 2400,78$; $\hat{\sigma}_x = 59,43$.

В результате вычислений по выборке $x_1, \dots, x_i, \dots, x_K; t_1, \dots, t_j, \dots, t_{N-K}$, ($N = 1000$), при значениях исходных данных (случаи 4 и 8): $a_1 = 4$, $a_2 = 25$, $\lambda = 25$, $Q_0 = 900$, $T = 9$, получены следующие результаты: $\hat{m}_x = 867,12$; $\hat{\sigma}_x = 131,80$.

Абсолютные и относительные расхождения оценок отражены в таблице 1.

Таблица 1.

N	1000	1000
T	12	9
Q_0	2400	900
$\bar{m}_x$	2401,19	909,96
$\hat{m}_x$	2400,78	867,12
$ \hat{m}_x - \bar{m}_x $	0,41	42,84
$ \hat{m}_x - \bar{m}_x / \bar{m}_x (\%)$	0,015%	4,71%
$\bar{\sigma}_x$	57,75	148,32
$\hat{\sigma}_x$	59,43	131,80
$ \hat{\sigma}_x - \bar{\sigma}_x $	1,68	16,52
$ \hat{\sigma}_x - \bar{\sigma}_x / \bar{\sigma}_x (\%)$	2,91%	11,13%

Сравним оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины t , вычисленные двумя способами:

- по результатам моделирования случайной величины t в случаях 5, 6, 7 и 8;
- по результатам моделирования случайной величины X в случаях 1, 2, 3 и 4 с использованием теоретических соотношений

$$\hat{m}_t = Q_0 T / \bar{m}_x, \quad \hat{\sigma}_t^2 = (\sigma_x^2 Q_0 T^2) / \bar{m}_x^3.$$

Данные для сравнения приведены в таблице 2.

Таблица 2.

	1	2	3	4
N	1000	1000	400	1000
T	12	10	9	9
Q_0	2400	2500	1000	900
$\bar{m}_x$	2401,19	2405,05	1086,48	909,96
$\bar{\sigma}_x$	57,74	241,17	60,41	148,32
$\bar{m}_t$	12,0	10,46	8,33	9,044
$\hat{m}_t$	11,99	10,39	8,28	8,90
$ \hat{m}_t - \bar{m}_t $	0,01	0,07	0,05	0,144
$ \hat{m}_t - \bar{m}_t / \bar{m}_t (\%)$	0,1%	0,7%	0,6%	1,6%
$\bar{\sigma}_t^2$	0,084	1,025	0,243	2,271
$\hat{\sigma}_t^2$	0,083	1,045	0,230	2,128
$ \hat{\sigma}_t^2 - \bar{\sigma}_t^2 $	0,001	0,02	0,013	0,143
$ \hat{\sigma}_t^2 - \bar{\sigma}_t^2 / \bar{\sigma}_t^2 (\%)$	1,3%	2,0%	5,4%	6,3%

6. Имитационное моделирование процесса использования непрерывно портящегося ресурса

Предложена модель, где моделируется среднее время жизни ресурса (время, в течение которого весь ресурс будет использован с учетом порчи партии по схеме Бернулли). Приближенное аналитическое выражение задается формулой:

$$T(Q) \approx \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{2\kappa Q}{2m_0 + \sigma^2} \right), \quad (1)$$

где $k\Delta t$ – вероятность порчи единицы ресурса за время Δt , Q – величина партии ресурса, $m_0 = a_1\lambda$ – средняя количество ресурса, использованного в единицу времени.

Для моделирования взяты следующие значения параметров: интенсивность пуассоновского потока запросов $\lambda = 0.1$, среднее количество одного запроса на ресурс $a_1 = 100$, дисперсия величины запроса на ресурс $\sigma_z^2 = 100$. Число реализаций случайного процесса для каждого расчетного значения равно 1000. Величины запросов моделируются реализациями нормально распределенной случайной величины.

На рис.10, 12, 14, 16, 18 построены графики зависимости среднего времени, рассчитанного по реализациям и по формуле (1), от параметра K при значениях начального объема партии ресурса соответственно $Q = 1000, 5000, 10000, 30000, 50000$. На рис.11, 13, 15, 17, 19 приведены соответствующие относительные погрешности, которые уменьшаются с ростом начальной партии ресурса и уменьшением скорости порчи ресурса.

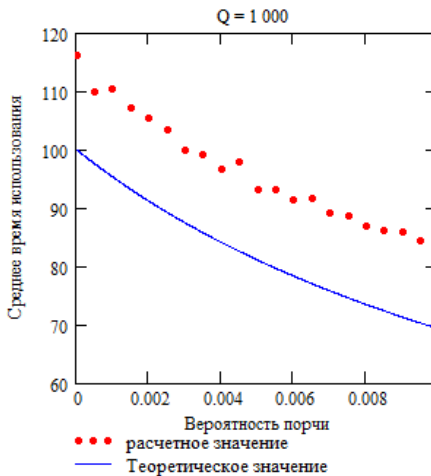


Рис. 10.

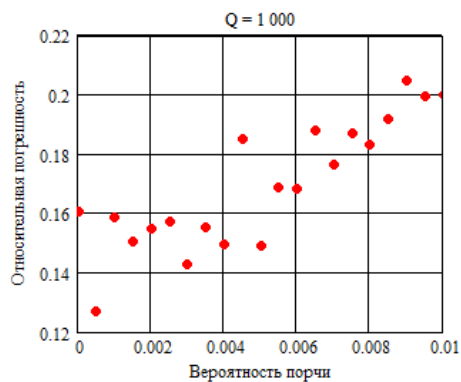


Рис. 11.

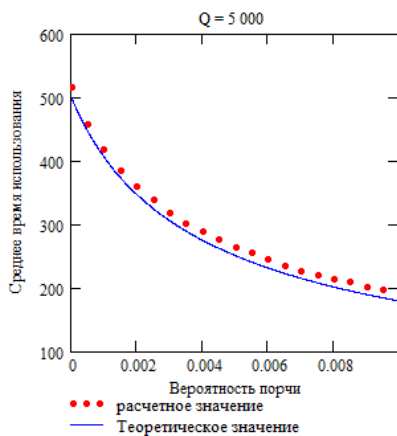


Рис. 12.

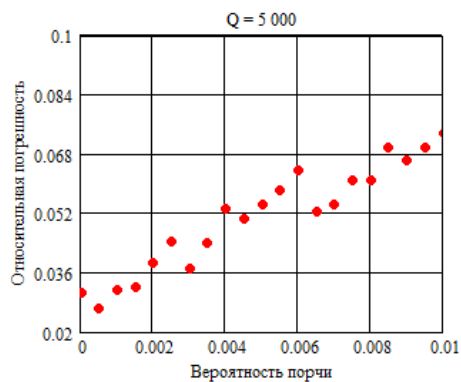


Рис. 13.

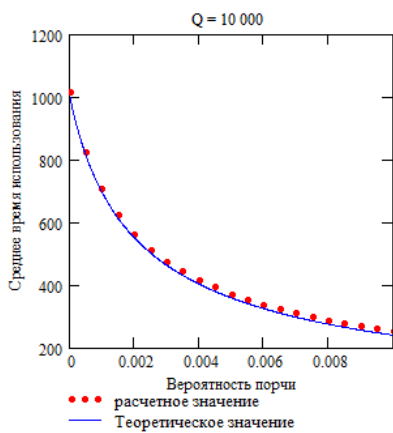


Рис. 14.

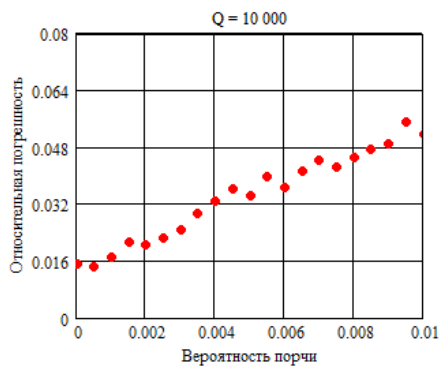


Рис. 15.

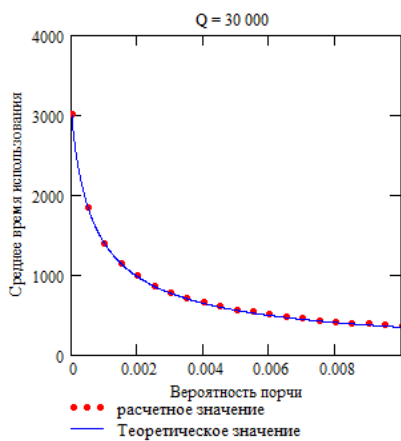


Рис. 16.

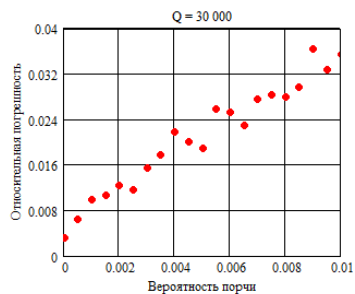


Рис. 17.

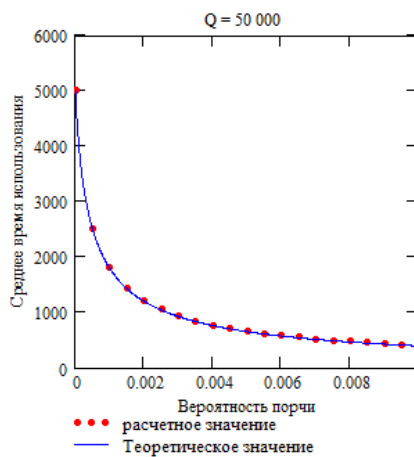


Рис. 18.

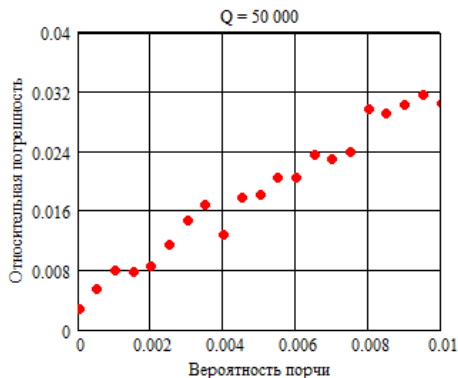


Рис. 19.

7. Заключение

В статье показано, что результаты численного эксперимента

- 1) статистически подтверждают теоретические выкладки, полученные касательно нормальности распределения процесса запросов на ресурс;
- 2) показывают хорошее совпадение оценок, полученных по наблюдаемой в процессе использования ресурса комбинированной выборке $x_1, \dots, x_i, \dots, x_K; t_1, \dots, t_j, \dots, t_{N-K}$ предложенным методом максимального правдоподобия, со стандартными выборочными оценками среднего и дисперсии, полученными по выборкам с добавлением “фиктивных” наблюдений, которые на практике нам не доступны.
- 3) дают неплохое совпадение с теоретической приближенной формулой для среднего времени использования непрерывно портящегося ресурса при небольших вероятностях порчи и большой начальной партии ресурса.

Литература

1. КИТАЕВА А.В., СТЕПАНОВА Н.В. *Управление опционными ресурсами* // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322, № 5. – С. 23-28.
2. КИТАЕВА А.В., СТЕПАНОВА Н.В., ТЕРПУГОВ А.Ф. *Управление опционными ресурсами: полное использование ресурса в производственном цикле* // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323, № 5. – С. 5-10.
3. AVINADAV T. *Continuous accounting of inventory costs with Brownian-motion and Poisson demand processes.* // Annals of Operations Research. – 2015. – Vol. 229, – P. 85–102.
4. BAKKER M., RIEZEBOS J., TEUNTER R. *Review of inventory systems with deterioration since 2001.* // European Journal of Operational Research. – 2012. – Vol. 2. – P. 275–284.
5. BATHER J.A. *A Continuous Time Inventory Model.* //Journal of Applied Probability. – 1966. – Vol. 3, – P. 538–549.
6. BAUM L.E. An inequality and associated maximization technique in statistical estimation of probabilistic functions of a Markov process // Inequalities. – 1972. – Vol. 3. – P. 1–8.
7. BENKHEROUF L., BOUMENIR A., AGGOUN L. *A diffusion inventory model for deteriorating items.* // Applied Mathematics and Computation. – 2003. – Vol. 138. – P. 21–39.
8. FARKHADOV M., PAUL S., STEPANOVA N. *Mathematical model of a type $M/M/1/\infty$ queuing system with request rejection: a retail facility case study* // Information technologies and mathematical modelling. Queueing Theory and Application. 14 th Int. Scientific Conf. ITMM 2015. Anzhero - Sudzhensk. Russia, November 18-22, 2015, Proceedings. Communications in Computer and Information Science № 564. – P. 314-329.
9. FARKHADOV M., STEPANOVA N. *Simulation of a type $M/M/1/\infty$ Queuing System with Request Rejection* // Book of Abstracts, Eighth International Workshop on Simulation, Vienna, 21-25 September 2015. – P. 81-85.

10. KITAEVA A.V., STEPANOVA N.V. *Linear On/Off Inventory Control* // Proceedings, 15th Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA2013) International Conference, Mataro (Barcelona), Spain 25 - 28 June 2013. – P. 497-504.
11. KITAEVA A.V., STEPANOVA N.V., ZHUKOVSKAYA A.O. *Demand estimation for fast moving items and unobservable lost sales.* // The 8th IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management and Control, 2016, 49(12), France, Troyes, 28-30 June 2016. – P. 598–603.
12. KITAEVA A., SUBBOTINA V., STEPANOVA N. *Estimating the compound Poisson demand's parameters for single period problem for large lot size* // Proc. 15th IFAC Symp. on Information Control Problems in Manufacturing (INCOM 2015), Elsevier (IFAC-PapersOnLine), May 2015. – Vol. 48, – P. 1357–1361.

MODELS FOR ANALYSIS OF OPTIMUM PERFORMANCE OF THE USE OF RESOURCES

Natalia Stepanova, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Senior Researcher, Candidate of Technical Sciences, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495) 334-87-10), (natalia0410@rambler.ru).

Mais Farkhadov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Head of Lab., Doctor of Science, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495) 334-87-10), (mais@ipu.ru).

Abstract: The article deals with simulation and numerical calculations for the random process of resource utilization. The input parameters of the model are estimated. The comparison asymptotic results previously obtained with the data obtained on the basis of simulation. We also estimate the applicability limits of the asymptotic relations obtained.

Keywords: simulation modeling, asymptotic results, optimal characteristics of the resource use process, probability of resource spoilage, mathematical model of resource management.