

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ.

Р.А. Аюкасов¹

*(Казанский государственный технический университет
им. А.Н. Туполева, Казань)*

Описывается применение метода динамического программирования для синтеза оптимального управления линейных стохастических систем с запаздыванием

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием, оптимальное управление, методы оптимизации, динамическое программирование, уравнение Беллмана.

1. Введение.

В работе описывается процедура синтеза оптимального управления системами линейных стохастических дифференциально-разностных уравнений с квадратичным целевым функционалом критерия качества управления. Используя расширение фазового пространства [4], исходный процесс, описываемый системой стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием, сводится к диффузионному Марковскому процессу [4,6]. Данный подход позволяет использовать идею принципа оптимальности сформулированного Беллманом [1], справедливого для динамических систем, характерной особенностью которых является наличие марковского свойства независимости будущего от прошлого. Суть данного принципа оптимальности заключается в том, что каковы бы ни были первоначальное

¹ Рустам Анатольевич Аюкасов, соискатель (Rustam.Aukasov@tatar.ru)

состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны быть оптимальными относительно состояния, получающегося в результате первого решения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим систему, поведение которой на отрезке времени $[t_0, t_k]$, описывается линейным векторно-матричным стохастическим дифференциальным уравнением с запаздыванием относительно компонент вектора состояний:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= \varphi(t)X(t) + \mu(t)X(t - \tau) + \xi(t) + \theta(t)u(t) + \sigma(t)\eta(t) \\ X(t) &= \phi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{aligned}$$

Здесь t – время. t_0, t_k – начальная и конечная точка рассматриваемого интервала времени $[t_0, t_k]$. τ – постоянное запаздывание. $X(t)$ – n -мерная случайная вектор-функция состояния фазовых координат системы, определенная на отрезке времени $[t_0 - \tau, t_0]$ функцией $\phi(t)$ и принимающая при каждом $t \in [t_0, t_k]$ значения $X \in \Omega = \{X: -\infty < X < +\infty\}$, $X_t = x(t)$. $\eta(t)$ – n -вектор случайных воздействий типа гаусовского стандартного белого шума с интенсивностями G_i ($i=1, \dots, n$); $u(t)$ – кусочно-непрерывная r -мерная детерминированная вектор-функция управления из $S = \{u \in L_2[t_0, t_k]: u(t) \in U \text{ для почти всех } t \in [t_0, t_k]\}$, где $L_2[t_0, t_k]$ – пространство измеримых функций с квадратичной метрикой, выпуклое в E_r . x – реализация вектора состояний $X(t)$. Размеры матриц $\varphi(t)$, $\mu(t)$, $\xi(t)$, $\theta(t)$, $\sigma(t)$ согласованы с размерностями соответствующих векторов и равны соответственно $(n \times n)$, $(n \times n)$, $(n \times 1)$, $(n \times r)$ и $(n \times n)$, элементы этих матриц – заданные непрерывные, измеримые и ограниченные функции времени [7].

В качестве критерия оптимальности управления системы (1) рассматривается минимум квадратичного функционала вида:

$$(2) \quad I(u) = M \left\{ \int_{t_0}^{t_k} [x^T(t)G(t)x(t) + u^T(t)H(t)u(t)]dt + x^T(t_k)Qx(t_k) \right\}$$

Здесь Q , $G(t)$ при всех $t \in [t_0, t_k]$ – неотрицательные матрицы размерности $n \times n$, а матрица $H(t)$ размерности $r \times r$ при всех $t \in [t_0, t_k]$ является положительно определенной.

Для синтеза оптимального управления задачи (1)–(2) расширим фазовое пространство исследуемой системы (сведя немарковский векторный процесс к марковскому). Для этого покроем отрезок времени $[t_0, t_k]$ сеткой с шагом τ и узлами $t_q = t_0 + q\tau$, $q=1, \dots, N$, где q номер интервала $[t_{q-1}, t_q]$, N – количество интервалов, $t_k = t_0 + N\tau$. Точки t_q представляют собой правильные точки в смысле [5]. Обозначим через s текущее время на интервале $[t_{q-1}, t_q] = \tau$.

Введем на интервале $[t_{q-1}, t_q]$ вектор состояния системы $X^q(s) = [X_1(t_{q-1}+s), X_2(t_{q-1}+s), \dots, X_n(t_{q-1}+s)]$, где $s \in [0, \tau]$, верхний индекс обозначает номер интервала, а нижний – номер компоненты.

Аналогично на интервале $[t_{q-1}, t_q]$ введем вектор-функцию управления $u^q(s) = [u_1(t_{q-1}+s), u_2(t_{q-1}+s), \dots, u_r(t_{q-1}+s)]$, вектор-функцию аддитивных возмущений $\eta^q(s) = [\eta_1(t_{q-1}+s), \eta_2(t_{q-1}+s), \dots, \eta_n(t_{q-1}+s)]$ и матрицы функций времени $\Phi^q(s) = \|\Phi_{ij}(t_{q-1}+s)\|_{n \times n}$, $\mu^q(s) = \|\mu_{ij}(t_{q-1}+s)\|_{n \times n}$, $\xi^q(s) = [\xi_1(t_{q-1}+s), \xi_2(t_{q-1}+s), \dots, \xi_n(t_{q-1}+s)]$, $\theta^q(s) = \|\theta_{ij}(t_{q-1}+s)\|_{n \times r}$, $\sigma^q(s) = \|\sigma_{ij}(t_{q-1}+s)\|_{n \times n}$, $G^q(s) = \|G_{ij}(t_{q-1}+s)\|_{n \times n}$, $H^q(s) = \|H_{ij}(t_{q-1}+s)\|_{r \times r}$.

Обозначим через $X_{1,2,\dots,q}(s) = [X^1(s), X^2(s), \dots, X^q(s)]$ расширенный вектор состояний с компонентами фазовых состояний системы на последовательно примыкающих интервалах $[t_{q-1}, t_q]$, $q=1, \dots, N$, а через $\eta_{1,2,\dots,q}(s) = [\eta_1(s), \eta_2(s), \dots, \eta_q(s)]$ – расширенный вектор случайных воздействий типа гаусовского стандартного белого шума.

Тогда, в соответствии с принципом оптимальности Беллмана, исходная задача (1)–(2) сводится к определению по интервалам оптимального управления $u_{1,2,\dots,q}(s) = [u^1(s), u^2(s), \dots, u^q(s)]$ с компонентами управления системы на последовательно примыкающих интервалах $[t_{q-1}, t_q]$, $q=1, \dots, N$, которое доставляет минимум функционалу

$$(3) \quad I(u^q) = M \left\{ \int_0^\tau \left[x^{qT}(s) G^q(s) x^q(s) + u^{qT}(s) H^q(s) u^q(s) \right] ds + \right. \\ \left. + x^{qT}(\tau) Q x^q(\tau) \right\} \rightarrow \min$$

характеризующему эффективность управления системы, поведение которой на отрезке времени $[t_0, t_k]$ по последовательно примыкающим участкам $[t_{q-1}, t_q]$, $q=1, \dots, N$ описывается системой линейных векторно-матричных стохастических дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{dX^1(s)}{ds} &= \varphi^1(s) X^1(s) + \mu^1(t) X^0(s) + \xi^{*1}(s) + \sigma^1(s) \eta^1(s) \\ \frac{dX^2(s)}{ds} &= \varphi^2(s) X^2(s) + \mu^2(t) X^1(s) + \xi^{*2}(s) + \sigma^2(s) \eta^2(s) \\ &\dots \\ (4) \quad \frac{dX^m(s)}{ds} &= \varphi^m(s) X^m(s) + \mu^m(t) X^{m-1}(s) + \xi^{*m}(s) + \sigma^m(s) \eta^m(s) \\ &\dots \\ \frac{dX^q(s)}{ds} &= \varphi^q(s) X^q(s) + \mu^q(t) X^{q-1}(s) + \xi^q(s) + \theta^q(s) u^q(s) + \\ &\quad + \sigma^q(s) \eta^q(s) \end{aligned}$$

$$X^0(s) = \phi(t_0 - \tau + s), \quad X^m(0) = X^{m-1}(\tau), \quad s \in [0, \tau]$$

Здесь $\xi^{*m}(s) = \xi^m(s) + \theta^m(s) u^{*m}(s)$, $m=1, \dots, q-1$, где $u^{*m}(s) = u^*(t_{m-1} + s)$ – известная функция времени, представляющая собой оптимальное управление системы (1)-(2) на отрезке времени $[t_{m-1}, t_m]$ ($m=1, \dots, q-1$).

3. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ.

Управляемый процесс, поведение которого последовательно по примыкающим участкам $[t_{q-1}, t_q]$, $q=1, \dots, N$ описывается системами линейных стохастических дифференциальных уравнений (4), является марковским, следовательно, для минимизации

ции функционала (3) целесообразно [2, 3] использовать метод динамического программирования [1].

Построим уравнение Беллмана [3] для определения оптимального управления системы (4), минимизирующего функционал качества (3), которое в данном случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \sum_{m=1}^q \left[\left[\varphi^m(s) x^m(s) + \mu^m(s) x^{m-1}(s) \right]^T \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^m(s)} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} B^m \frac{\partial^2 \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{(\partial x^m(s))^T \partial x^m(s)} \right] + \sum_{m=1}^{q-1} (\xi^{*m}(s))^T \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^m(s)} + \\
 & + (x^q(s))^T G^q(s) x^q(s) + \min_{u^q} \left\{ (\theta^q(s) u^q(s))^T \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^q(s)} + \right. \\
 & \left. + (u^q(s))^T H^q(s) u^q(s) \right\} + \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial s} = 0.
 \end{aligned}$$

Дополнительное условие на функцию $\lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})$ в момент времени $s = \tau$ представляет собой выражение вида:

$$(6) \quad \lambda_q(\tau, x_{1,2,\dots,q}) = (x^q(s))^T Q x^q(s).$$

Так как на управление u^q в исходной постановке задачи не наложено никаких ограничений, то для определения минимума выражения, заключенного в фигурные скобки в уравнении (5), необходимо его продифференцировать по u^q и приравнять нулю.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \left[(\theta^q(s) u^q(s))^T \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^q(s)} + (u^q(s))^T H^q(s) u^q(s) \right]}{\partial u^q(s)} = \\
 & (\theta^q(s))^T \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^q(s)} + 2(u^q(s))^T H^q(s) = 0
 \end{aligned}$$

Отсюда находим, что оптимальное управление u^{*q} , минимизирующее критерий качества (3), имеет вид:

$$(7) \quad u^{*q}(s) = -\frac{1}{2} (H^q(s))^{-1} (\theta^q(s))^T \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^q}.$$

Искомое оптимальное управление u^{*q} , определяемое соотношением (7), зависит таким образом от матрицы $H^q(s)$, определяющей стоимость управления в функционале качества (3), матрицы $\Theta^q(s)$ коэффициентов усиления управляющих воздействий и частных производных функции $\lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})$ по x^q . Характерной особенностью найденной формы оптимального управления является линейная зависимость от этих производных. Определив функцию $\lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})$ и соответствующие частные производные, получим окончательное решение задачи.

Подставляя найденное выражение для оптимального управления u^{*q} (7) в уравнение (6), получим следующее нелинейное параболическое уравнение в частных производных (уравнение Беллмана) для функции $\lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial s} + \sum_{m=1}^q \left[\left[\varphi^m(s) x^m(s) + \mu^m(s) x^{m-1}(s) \right]^T \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^m(s)} + \right. \\ & + \frac{1}{2} B^m \frac{\partial^2 \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{(\partial x^m(s))^T \partial x^m(s)} \left. \right] + \sum_{m=1}^{q-1} \left(\xi^{*m}(s) \right)^T \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^m(s)} + \\ & + \left(x^q(s) \right)^T G^q(s) x^q(s) + m_{u^q} \left[\left(\theta^q(s) u^q(s) \right)^T \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^q(s)} + \right. \\ & + \left. \left(u^q(s) \right)^T H^q(s) u^q(s) \right] = \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial s} + \sum_{m=1}^q \left[\frac{1}{2} B^m \frac{\partial^2 \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{(\partial x^m(s))^T \partial x^m(s)} + \right. \\ & + \left. \left[\varphi^m(s) x^m(s) + \mu^m(s) x^{m-1}(s) \right]^T \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^m(s)} \right] + \\ & + \sum_{m=1}^{q-1} \left(\xi^{*m}(s) \right)^T \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^m(s)} + \left(x^q(s) \right)^T G^q(s) x^q(s) - \\ & - \frac{1}{4} \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial (x^q(s))^T} \Theta^q(s) \left(H^q(s) \right)^{-1} \left(\Theta^q(s) \right)^T \frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^q(s)} = 0 \end{aligned}$$

Решение данного уравнения будем искать в виде квадратичной формы по фазовым переменным

$$(8) \quad \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q}) = \sum_{i,j=1}^q (x^i)^T \Gamma_{ij}^{-2}(s) x^j + 2 \sum_{i=1}^q (\Gamma_i^{-1}(s))^T x^i + \Gamma^0(s),$$

где $\Gamma_{ij}^{-2}(s)$ – некоторая симметричная матрица порядка $n \times n$, $\Gamma_i^{-1}(s)$ – вектор-столбец n -го порядка, $\Gamma^0(s)$ – некоторая функция времени.

Дифференцируя (8) по компонентам вектора состояний $x_{1,2,\dots,q}$ получим:

$$\frac{\partial \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{\partial x^i(s)} = 2 \sum_{j=1}^q \Gamma_{ij}^{-2}(s) x^j + 2 \Gamma_i^{-1}(s),$$

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})}{(\partial x^i)^T \partial x^i} = 2 \Gamma_{ii}^{-2}(s),$$

$$i = \overline{1, q}.$$

Подставив найденное значение частных производных (9) функции $\lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})$ в выражение для оптимального управления u^{*q} (7), получим

$$(10) \quad u^{*q}(s) = - \sum_{j=1}^q (H^q(s))^{-1} (\Theta^q(s))^T \Gamma_{qj}^{-2}(s) x^j - (H^q(s))^{-1} (\Theta^q(s))^T \Gamma_q^{-1}.$$

Подставим теперь (9) в уравнение Беллмана. В результате подстановки, учитывая краевые условия (6), накладываемые на функцию $\lambda_q(s, x_{1,2,\dots,q})$, получим соотношение:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^q (x^i)^T \dot{\Gamma}_{ij}^{-2}(s) x^j + 2 \sum_{i=1}^q (\dot{\Gamma}_i^{-1}(s))^T x^i + \dot{\Gamma}^0(s) + \\ & + \sum_{i,j=1}^q \left[(\varphi^i(s) x^i(s) + \mu^i(s) x^{i-1}(s))^T \right] (\Gamma_{ij}^{-2}(s) x^j) + \sum_{i,j=1}^{q-1} (\xi^{*i}(s))^T (\Gamma_{ij}^{-2}(s) x^j) \\ & + 2 \sum_{i=1}^q \left[(\varphi^i(s) x^i(s) + \mu^i(s) x^{i-1}(s))^T \right] (\Gamma_i^{-1}(s)) + 2 \sum_{i=1}^{q-1} (\xi^{*i}(s))^T (\Gamma_i^{-2}(s)) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q B^i \Gamma_{ii}^{-2} + (x^q(s))^T G^q(s) x^q(s) - \\ & - \sum_{i,j=1}^q (x^i)^T (\Gamma_{qi}^{-2})^T \Theta^q(s) (H^q(s))^{-1} (\Theta^q(s))^T \Gamma_{qj}^{-2} x^j = 0, \end{aligned}$$

которое должно быть справедливо при всех значениях $x_{1,2,\dots,q}$. Следовательно, приравнявая нулю коэффициенты при квадратичных членах (по $x_{1,2,\dots,q}$) и свободный коэффициент, получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $\Gamma_{ij}^2(s)$, $\Gamma_i^1(s)$ и $\Gamma^0(s)$:

$$(11) \quad \begin{aligned} & \dot{\Gamma}_{ij}^2(s) + (\varphi^i(s) + \mu^{i+1}(s))^T \Gamma_{ij}^2(s) - \\ & - (\Gamma_{qi}^2(s))^T \theta^q(s) (H^q(s))^{-1} (\theta^q(s))^T \Gamma_{qj}^2(s) = 0 \end{aligned};$$

$$(12) \quad \begin{aligned} & \dot{\Gamma}_i^1(s) + (\mu^1(s) \phi(t_0 - \tau + s))^T \Gamma_{1i}^2 + \\ & + \sum_{j=1}^{q-1} (\xi^{*j}(s))^T \Gamma_{ij}^2 + (\varphi^i(s) + \mu^{i+1}(s))^T \Gamma_i^1(s) = 0 \end{aligned};$$

$$(13) \quad \begin{aligned} & \dot{\Gamma}_{qq}^2(s) + (\varphi^q(s))^T \Gamma_{qq}^2(s) + G^q(s) - \\ & - (\Gamma_{qq}^2(s))^T \theta^q(s) (H^q(s))^{-1} (\theta^q(s))^T \Gamma_{qq}^2(s) = 0 \end{aligned};$$

$$(14) \quad \begin{aligned} & \dot{\Gamma}^0(s) + 2 \sum_{i=1}^{q-1} (\xi^{*i}(s))^T \Gamma_i^1 + \\ & + (\mu^1(s) \phi(t_0 - \tau + s))^T \Gamma_1^1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q [B^i \Gamma_{ii}^2] = 0 \end{aligned}.$$

Граничные условия для системы дифференциальных уравнений (11)-(14) очевидным образом определяются из условия (6) и имеют вид:

$$(15) \quad \Gamma_{ij}^2(\tau) = 0, \Gamma_{qq}^2(\tau) = Q, \Gamma_i^1(\tau) = 0, \Gamma_q^1(\tau) = Qx^q(\tau), \Gamma^0(\tau) = 0.$$

4. Пример синтеза оптимального управления.

Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации системы первого порядка, возмущаемой гауссовским белым шумом. Поведение объекта управления на участке времени $[0, 4\tau]$ описывается скалярным уравнением вида:

$$(16) \quad \begin{aligned} & \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) + cx(t - \tau) + \sqrt{v}\xi(t) \\ & x(t) = \frac{t^2}{2}, t \in [-\tau, 0] \end{aligned}.$$

Качество работы системы оценивается минимумом интегрального функционала вида:

$$(17) \quad I(u) = M \int_0^{4\tau} [gx^2(t) + hu^2(t)] dt.$$

Здесь a, b, c, v – заданные числа, $v > 0$, $\xi(t)$ – стандартный белый шум, а g и h – заданные положительные константы.

Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$s \in [0; \tau]$$

$$x^1(s) = x(s); x^2(s) = x(\tau + s); x^3(s) = x(2\tau + s);$$

$$u^1(s) = u(s); u^2(s) = u(\tau + s); u^3(s) = u(2\tau + s);$$

$$\xi^1(s) = \xi(s); \xi^2(s) = \xi(\tau + s); \xi^3(s) = \xi(2\tau + s);$$

в соответствии с которыми можно свести исходную задачу оптимизации (16)-(17) к эквивалентной последовательности задач:

$$(18) \quad I(u) = M \int_0^{\tau} [g(x^1(s))^2 + h(u^1(s))^2] ds \rightarrow \min$$

$$\dot{x}^1 = ax^1 + bu^1 + \frac{c(s-\tau)^2}{2} + \sqrt{v}\xi^1(s)$$

$$I(u) = M \int_0^{\tau} [g(x^2(s))^2 + h(u^2(s))^2] ds \rightarrow \min$$

$$(19) \quad \begin{cases} \dot{x}^1 = ax^1 + bu^{*1} + \frac{c(s-\tau)^2}{2} + \sqrt{v}\xi^1(s) \\ \dot{x}^2 = ax^2 + bu^2 + cx^1 + \sqrt{v}\xi^2(s) \end{cases}.$$

$$I(u) = M \int_0^{\tau} [g(x^3(s))^2 + h(u^3(s))^2] ds \rightarrow \min$$

$$(20) \quad \begin{cases} \dot{x}^1 = ax^1 + bu^{*1} + \frac{c(s-\tau)^2}{2} + \sqrt{v}\xi^1(s) \\ \dot{x}^2 = ax^2 + bu^{*2} + cx^1 + \sqrt{v}\xi^2(s) \\ \dot{x}^3 = ax^3 + bu^3 + cx^2 + \sqrt{v}\xi^3(s) \end{cases}.$$

Оптимальное управление u^{*1} в соответствии с (10) будет иметь вид:

$$(21) \quad u^{*1}(s) = -\frac{b}{h} [\Gamma_{11}^2(s)x + \Gamma_1^1(s)],$$

где функции времени в квадратных скобках в соответствии с (11)-(15) удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\Gamma}_{11}^2 + a\Gamma_{11}^2 + g - \frac{b^2}{h} (\Gamma_{11}^2)^2 = 0$$

$$\dot{\Gamma}_1^1 + \frac{c(s-\tau)^2}{2} \Gamma_{11}^2 + a\Gamma_1^1 = 0$$

$$\dot{\Gamma}^0 + \frac{c(s-\tau)^2}{2} \Gamma_1^1 + \Gamma_{11}^2 = 0$$

$$\Gamma^1(\tau) = 0, \Gamma_{11}^2(\tau) = 0, \Gamma^0(\tau) = 0.$$

Выражение для вычисления оптимальное управление u^{*2} в соответствии с (10) примет вид:

$$u^{*2}(s) = -\frac{b}{h} [\Gamma_{12}^2(s)x^1 + \Gamma_{22}^2(s)x^2 + \Gamma_2^1(s)],$$

а функции $\Gamma_{22}^2(s)$, $\Gamma_{12}^2(s)$, $\Gamma_2^1(s)$ будут удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{\Gamma}_{11}^2 + (a+c)\Gamma_{11}^2 - \frac{b^2}{h} (\Gamma_{12}^2)^2 = 0$$

$$\dot{\Gamma}_{12}^2 + (a+c)\Gamma_{12}^2 - \frac{b^2}{h} \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\dot{\Gamma}_{22}^2 + a\Gamma_{22}^2 + g - \frac{b^2}{h} (\Gamma_{22}^2)^2 = 0$$

$$\dot{\Gamma}_1^1 + \left(\frac{c(s-\tau)^2}{2} + bu^{*1}(s) \right) \Gamma_{11}^2 + (a+c)\Gamma_1^1 = 0$$

$$\dot{\Gamma}_2^1 + \left(\frac{c(s-\tau)^2}{2} + bu^{*1}(s) \right) \Gamma_{12}^2 + a\Gamma_2^1 = 0$$

$$\dot{\Gamma}^0 + \left(\frac{c(s-\tau)^2}{2} + bu^{*1}(s) \right) \Gamma_1^1 + \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\Gamma_1^1(\tau) = \Gamma_2^1(\tau) = 0, \Gamma_{11}^2(\tau) = \Gamma_{12}^2(\tau) = \Gamma_{22}^2(\tau) = 0, \Gamma^0(\tau) = 0.$$

Аналогично, оптимальное управление u^{*3} на отрезке времени $[2\tau, 3\tau]$ будет определяться следующим выражением:

$$u^{*3}(s) = -\frac{b}{h} \left[\Gamma_{13}^2(s)x^1 + \Gamma_{23}^2(s)x^2 + \Gamma_{33}^2(s)x^3 + \Gamma_3^1(s) \right].$$

Здесь функции $\Gamma_{13}^2(s)$, $\Gamma_{23}^2(s)$, $\Gamma_{33}^2(s)$, $\Gamma_3^1(s)$ удовлетворяют системе уравнений вида:

$$\dot{\Gamma}_{11}^2 + (a+c)\Gamma_{11}^2 - \frac{b^2}{h}(\Gamma_{13}^2)^2 = 0$$

$$\dot{\Gamma}_{12}^2 + (a+c)\Gamma_{12}^2 - \frac{b^2}{h}\Gamma_{13}^2\Gamma_{23}^2 = 0$$

$$\dot{\Gamma}_{13}^2 + (a+c)\Gamma_{13}^2 - \frac{b^2}{h}\Gamma_{13}^2\Gamma_{33}^2 = 0$$

$$\dot{\Gamma}_{23}^2 + (a+c)\Gamma_{23}^2 - \frac{b^2}{h}\Gamma_{23}^2\Gamma_{33}^2 = 0$$

$$\dot{\Gamma}_{33}^2 + a\Gamma_{33}^2 + g - \frac{b^2}{h}(\Gamma_{33}^2)^2 = 0$$

$$\dot{\Gamma}_1^1 + \left(\frac{c(s-\tau)^2}{2} + bu^{*1}(s) \right) \Gamma_{11}^2 + bu^{*2}(s)\Gamma_{12}^2 + (a+c)\Gamma_1^1 = 0$$

$$\dot{\Gamma}_2^1 + \left(\frac{c(s-\tau)^2}{2} + bu^{*1}(s) \right) \Gamma_{12}^2 + bu^{*2}(s)\Gamma_{22}^2 + (a+c)\Gamma_2^1 = 0$$

$$\dot{\Gamma}_3^1 + \left(\frac{c(s-\tau)^2}{2} + bu^{*1}(s) \right) \Gamma_{13}^2 + bu^{*2}(s)\Gamma_{23}^2 + a\Gamma_3^1 = 0$$

$$\dot{\Gamma}^0 + \left(\frac{c(s-\tau)^2}{2} + bu^{*1}(s) \right) \Gamma_1^1 + bu^{*2}(s)\Gamma_2^1 + \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{33}^2 = 0$$

$$\Gamma_{ij}^2(\tau) = 0, \Gamma_i^1(\tau) = 0, \Gamma^0(\tau) = 0; (i, j = \overline{1,3}).$$

5. Заключение.

Расширение фазового пространства позволяет применить к поиску оптимального управления линейных стохастических систем с запаздыванием метод динамического программирования. Данный подход позволяет свести решение стохастической задачи оптимизации управления системы (1) в смысле функционала качества (2) к последовательному решению на каждом интервале $[t_{q-1}, t_q]$, $q=1, \dots, N$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11)-(14) при граничном условии (15). При этом оптимальное управление u^{*q} (10) является линейной функцией выходного сигнала системы (4) и представляет собой комбинацию программного управления и управления обратной связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. БЕЛЛИМАН Р. *Динамическое программирование*. М.: ИЛ, 1960 – 400 с.
2. ЕВЛАНОВ Л.Г., КОНСТАНТИНОВ В.М. *Системы со случайными параметрами*. М.: Наука, 1976 – 568 с.
3. КОЛОСОВ Г.Е. *Синтез оптимальных автоматических систем при случайных возмущениях*. М.: Наука, 1984 – 256 с.
4. ПОЛОСКОВ И.Е. *Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом* // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 9. – С. 58-73.
5. ПОНТРЯГИН Л.С., БОЛТЯНСКИЙ В.Г., ГАМКРЕЛИДЗЕ Р.В., МИЩЕНКО Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. – М.: Наука, 1969 – 384 с.
6. ЦАРЬКОВ Е.Ф. *Системы стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием* // Известия АН Латвийской ССР. – 1968. – №1. – С. 57-64
7. WONHAM W.M. *Random differential equations in control theory*. // Probabilistic Method in Applied Mathematics, ed. By

A.T. Bharucha-Reid, v. 2, New York-London: Academic Press, 1970.

ARTICLE TITLE (THE SYNTHESIS OPTIMAL CONTROL OF LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS WITH DELAY)

Rustam Aukasov, Kazan State Technical University, Kazan, graduate student (Rustam.Aukasov@tatar.ru)

Abstract: Using the method of dynamic programming for synthesis optimal control of linear stochastic systems with delay are being investigated.

Keywords: stochastic differential equations with delay, optimal control, dynamic programming, Bellman equation.