УДК 519.685
ББК 22.18

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ РИСКОВЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ДЛЯ CC-VAR[1]

Агасандян Г. А.[2]
(*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва*)

В работе исследуются теоретические и качественные свойства параметрических семейств функций рисковых предпочтений инвестора, придерживающегося континуального критерия VaR (CC-VaR). Вводится важное для применения CC-VaR понятие корректности семейств, связанное с их доходностью. Приводится и доказывается необходимое и достаточное условие корректности. Рассматривается пример двухпараметрического надсемейства кусочно-линейных функций, порождающего корректные однопараметрические семейства, обладающие специальным свойством симметрии. Пример подтверждает гипотезу качественного характера, что более «доходная» в сравнении с конкурентной функция рисковых предпочтений порождает более низкие доходы в окрестности нуля аргумента и более высокие – в окрестности единицы. Изложение сопровождается аналитическими исследованиями, иллюстративными примерами, расчетами и графиками.

Ключевые слова: континуальный критерий VaR (CC-VaR), функции рисковых предпочтений (ф. р. п.), семейства ф. р. п., процедура Неймана-Пирсона, доход, инвестиционная сумма, доходность, корректные и некорректные семейства.

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект 17-01-00816*).

[2] *Геннадий Аршавирович Агасандян, доктор физико-математических наук* (*Москва, ул. Чертановская, д. 34, тел.* (*495*) *313-44-94*).

1. Основные формальные конструкции и их первичные свойства

В работе исследуются параметрические семейства функций рисковых предпочтений инвестора, используемые в задачах инвестирования с континуальным критерием VaR (CC-VaR), фактически означающим выдерживание в задаче инвестирования континуального множества вероятностных ограничений на реализуемые случайные доходы [1-5, 7]. Выбор инвестором своей функции рисковых предпочтений (ф. р. п.) является одним из основных элементов постановки задачи оптимизации рыночного портфеля. При решении разных задач, но с единым сроком инвестирования, ф. р. п. конкретного инвестора характеризует его отношение к риску и должна быть единой.

В связи с этим последующее исследование может показаться избыточным, поскольку имеет дело с семействами функций. Однако, как представляется, знание свойств семейств ф. р. п. позволяет инвестору лучше формализовать свои рисковые предпочтения. Основным свойством, изучаемым в работе, служит *корректность* однопараметрических семейств. Напомним вкратце необходимые для нас сведения из упомянутых работ.

Заданы $p(x)$ и $c(x)$ – соответственно прогнозная (на конец периода) и стоимостная (на начало периода) плотности цены базового актива, $\mathsf{X}\ (\subset \mathfrak{R})$ – произвольный интервал на вещественной прямой. Здесь, как часто делалось и ранее, решается для простоты *задача CB*, в которой инвестиционная сумма $S\ (> 0)$ не задается, но ищется портфель, доставляющий $\min S$ при выполнении требований CC-VaR, состоящих в выполнении неравенств $\mathsf{P}\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1-\varepsilon$ для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$, где q – доход, $\phi(\varepsilon)$ – *функция рисковых предпочтений* (ф. р. п.) инвестора (P – вероятностная мера). Эта задача является базовой для решения прочих родственных задач. Ее решение основывается на переупорядочении по величине функции относительных доходов $\rho(x) = p(x)/c(x)$, $x \in \mathsf{X}$, посредством процедуры Неймана-Пирсона из математической статистики [6].

Рассматриваются семейства ф. р. п. $\phi(\varepsilon; \lambda)$ по параметру $\lambda \in \Lambda \subset \mathfrak{R}$, который отражает степень толерантности инвестора к риску (и не является параметром масштабирования). Например, можно принять за правило считать, что с ростом этого параметра степень расположенности к риску инвестора возрастает, и именно такими семействами рекомендовать инвестору руководствоваться. На функции семейства обычно налагаются ограничения, связанные с возможностью их интегрирования и дифференцирования по параметру λ. Функции из семейств подчиняются ограничению $\phi(0;\lambda)\equiv 0$ и нормируются условием $\phi(1;\lambda)\equiv 1$. Они целиком располагаются в квадрате $Q=[0,1]\times[0,1]$. Некоторые особенности функций (бесконечность производных по ε) разрешаются для $\varepsilon=0$ и $\varepsilon=1$, где производные по ε могут быть неограниченными, а также при стремлении λ к (условному) нулю.

Средний доход $R(\lambda)$, инвестиционная сумма $A(\lambda)$ и средний относительный доход $r(\lambda)$ определяются формулами

$$R(\lambda)=\int_0^1\phi(\varepsilon;\lambda)\,d\varepsilon, \qquad A(\lambda)=\int_0^1\phi(\varepsilon;\lambda)\,d\gamma(\varepsilon),$$

$r(\lambda)=R(\lambda)/A(\lambda)$.

Здесь $\gamma(\varepsilon)$, $\varepsilon\in[0,1]$, – *диссонанта* оптимального портфеля. Как показывается в [2, 3], функция $\gamma(\varepsilon)$ выпукла вверх (вогнута), ее производная – неотрицательная и невозрастающая функция ε (возможно, разрывная), $\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=1$. Функции $g(\varepsilon)$ с такими свойствами и не зависящие от λ называются *допустимыми*.

В качестве типичного примера допустимых функций, используемых в иллюстративных целях и при проверке корректности семейств функций, можно применять функции

(1) $\quad g(\varepsilon)=1-(1-\varepsilon)^{\tau}, \quad g'(\varepsilon)=\tau(1-\varepsilon)^{\tau-1}, \quad \tau>1.$

(2) $\quad g(\varepsilon)=\begin{cases}\tau\varepsilon, & 0\le\varepsilon\le 1/\tau,\\ 1, & 1/\tau<\varepsilon\le 1,\end{cases} \quad g'(\varepsilon)=\begin{cases}\tau, & 0\le\varepsilon\le 1/\tau,\\ 0, & 1/\tau<\varepsilon\le 1,\end{cases} \quad \tau>1.$

Изучение семейств ф. р. п. проводится на основе *нормированных ф. р. п.* $\phi_n(\varepsilon;\lambda)=\phi(\varepsilon;\lambda)/R(\lambda)$. Наряду с их производными по λ (например, в случае разрыва) рассматриваются и разности

(3) $\quad \partial\phi_n(\varepsilon;\lambda)/\partial\lambda, \qquad \Delta\phi_n(\varepsilon;\lambda',\lambda'')=\phi_n(\varepsilon;\lambda')-\phi_n(\varepsilon;\lambda''),$

при этом, очевидно,

$$\int_0^1 \phi_n(\varepsilon;\lambda)\,d\varepsilon \equiv 1, \quad \int_0^1 \frac{\partial\phi_n(\varepsilon;\lambda)}{\partial\lambda}\,d\varepsilon \equiv 0, \quad \int_0^1 \Delta\phi_n(\varepsilon;\lambda',\lambda'')\,d\varepsilon \equiv 0,$$

$$r(\lambda) = R(\lambda)/A(\lambda) = \left(\int_0^1 \phi_n(\varepsilon;\lambda)\,d\gamma(\varepsilon)\right)^{-1}.$$

Корректным называется семейство ф. р. п., для которого при *любой допустимой* функции $g(\varepsilon)$ оптимальный относительный доход $r(\lambda)$ является монотонной функцией λ. Остальные семейства – некорректные. Для *некорректного* семейства можно указать такие две пары вида $\{\lambda', \lambda''\}$, $\lambda' < \lambda''$, что при некоторой *допустимой* функции $g(\varepsilon)$ для одной из пар выполняется, например, неравенство $r(\lambda') > r(\lambda'')$, а для другой – обратное неравенство. Как правило, мы строим семейства, для которых $r(\lambda)$ является монотонно *возрастающей* функцией λ, а убывающая функция становится возрастающей при замене $\lambda \to 1/\lambda$.

Далее приводится и доказывается *необходимое и достаточное условие* корректности семейства ф. р. п. с полезными дополнительными утверждениями, на нем основанными.

Некоторые примеры корректных и некорректных семейств рассматриваются в [2]. Уже по этим примерам создается впечатление, что повышенный риск, на который готов идти инвестор, в большей мере обусловлен поведением выбираемой им ф. р. п. в окрестности $\varepsilon = 0$, а не $\varepsilon = 1$. Именно при таком поведении инвестора средний доход будет больше.

Для более обоснованного подтверждения этой гипотезы подходящими представляются примеры с ф. р. п., симметричными относительно биссектрисы угла квадрата Q пар значений (ε, ϕ) с координатами $(1, 0)$. Пример такого типа с семейством линейных функций с одним изломом и рассматривается далее.

2. Необходимое и достаточное условие корректности семейств

Для анализа корректности семейств удобно рассмотреть упрощенную модель семейств, ограничиваясь *α-наборами* $\{\alpha_i, i = 1..k\}$ – *знакопеременными* наборами чисел, для которых

$$\alpha_i \neq 0,\ i = 1..k; \quad \mathrm{sign}\left[\alpha_i\alpha_{i+1}\right] = -1,\ i = 1..k-1; \quad \sum_{i=1..k} \alpha_i = 0.$$

Набор (*не* α-*набор*!) k чисел $\{\pi_i, i = 1..k\}$ называется *допустимым*, если $\pi_1 > 0$, $0 \le \pi_i \le \pi_{i-1}$, $i = 2..k$. Называем α-набор *корректным*, если для *любого допустимого* набора $\{\pi_i, i = 1..k\}$

(4) $\sum_{i=1..k} \pi_i \alpha_i \le 0$.

В противном случае, если *существует допустимый* набор $\{\pi_i, i = 1..k\}$, для которого выполняется противоположное неравенство, α-набор называем *некорректным*. Имеет место

Теорема 1. Для корректности α-набора $\{\alpha_i, i = 1..k\}$ *необходимо и достаточно*, чтобы число k было четным и выполнялась совокупность неравенств

(5) $\alpha_1 < 0$ и $\sum_{i=1..m} \alpha_i \le 0$ для всех четных $m \le k-2$

(при $k = 2$ требуется выполнение лишь первого неравенства).

Доказательство. Достаточность условия устанавливается индукцией по четным числам k. Сначала проверяется *корректность* α-набора $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ для $k = 2$. В этом случае условие теоремы сводится к единственному неравенству $\alpha_1 < 0$. Пусть $\{\pi_1, \pi_2\}$ – произвольный допустимый набор, при этом $\pi_1 > 0$, $0 \le \pi_2 \le \pi_1$. Поскольку $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, для левой части (4) имеем

(6) $\pi_1\alpha_1 + \pi_2\alpha_2 \le \pi_2\alpha_1 + \pi_2\alpha_2 = \pi_2(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$,

что означает корректность набора для $k = 2$.

Пусть теперь для произвольного *четного* числа $k > 2$ имеет место

(7) $\sum_{i=1..k} \pi_i \alpha_i \le \pi_k \sum_{i=1..k} \alpha_i = 0$.

Тогда из формулы (5), если придать в ней параметру k значение k+2, с учетом (6) и предположения индукции (7) получим для левой части формулы (4)

$$\le \pi_k \sum_{i=1..k} \alpha_i + \pi_{k+2}\left(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}\right) \le$$

$$\sum_{i=1..k+2} \pi_i \alpha_i = \sum_{i=1..k} \pi_i \alpha_i + \pi_{k+1}\alpha_{k+1} + \pi_{k+2}\alpha_{k+2} \le$$

$$\le \pi_{k+2} \sum_{i=1..k} \alpha_i + \pi_{k+2}\left(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}\right) = \pi_{k+2} \sum_{i=1..k+2} \alpha_i = 0.$$

Тем самым достаточность условия (5) установлена.

Доказательство необходимости проводится от противного. Пусть для *некоторого* $m \in \{1, 2, \ldots, k-2\}$

$$\sum_{i=1..m} \alpha_i > 0.$$

Очевидно, набор $\{\pi_i, i = 1..k\}$, $\pi_i = \{1, i = 1..m; 0, i = m + 1..k\}$ является *допустимым*, и мы имеем

$$\sum\nolimits_{i=1..k} \pi_i \alpha_i = \sum\nolimits_{i=1..m} \alpha_i > 0\,,$$

что противоречит формуле (4). Теорема полностью доказана. □

Из этой теоремы вытекают

***Следствия* 1**:

(i) условие $\alpha_1 < 0$ *необходимо* для *корректности* α-набора; в случае $k = 2$ оно также *и достаточно*;

(ii) при $k = 3$ любой α-набор *некорректен*;

(iii) при $k = 4$ α-набор *корректен* тогда и только тогда, когда $\alpha_1 < 0 < \alpha_2 \le -\alpha_1$; из этих неравенств непосредственно вытекает, что также $\alpha_3 < 0$, $\alpha_4 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 0$. □

Вернемся к исходной задаче и обозначим через k количество интервалов постоянства знака, на которые разбивается интервал $(0, 1)$ точками $\varepsilon_i(\lambda',\lambda'')\in(0, 1)$ (или $\varepsilon_i(\lambda)\in(0, 1)$), $i = 1..k-1$, являющимися нулями функции $\Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'')$ (или $\partial\phi_n(\varepsilon; \lambda)/\partial\lambda$), но лишь такими, в которых происходит изменение знака функции. Введем еще для удобства $\varepsilon_0(\lambda', \lambda'') = 0$ ($\varepsilon_0(\lambda) = 0$) и $\varepsilon_k(\lambda', \lambda'') = 1$ ($\varepsilon_k(\lambda) = 1$), но только на величину $\varepsilon_k(\lambda', \lambda'')$ требование быть нулем функции не распространяется. Вводя параметры α_i, $i = 1..k$, получаем знакопеременную последовательность

$$(8)\quad \alpha_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} \Delta\phi_n\left(\varepsilon;\lambda',\lambda''\right)d\varepsilon\,,\ \left(\alpha_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} \tfrac{\partial\phi_n(\varepsilon;\lambda)}{\partial\lambda}d\varepsilon\right),\ \sum\nolimits_{i=1..k}\alpha_i = 0\,.$$

Переход от допустимых функций исходной задачи к допустимым наборам модельной задачи будем осуществлять образованием взвешенных средних по правилу

$$(9)\quad \pi_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} g'\left(\varepsilon\right)\Delta\phi_n\left(\varepsilon;\lambda',\lambda''\right)d\varepsilon \Big/ \alpha_i$$

$$\left(\text{или } \pi_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} g'\left(\varepsilon\right)\tfrac{\partial\phi_n(\varepsilon;\lambda)}{\partial\lambda}d\varepsilon \Big/ \alpha_i\ \right),\quad i = 1..k.$$

Тем самым набор $\{\alpha_i, i = 1..k\}$ становится *α-набором*, и к нему можно применять *теорему* 1. Однако еще необходимо провести согласование двух понятий допустимости. Для исходной задачи мы имели дело с *допустимыми* функциями $g(\varepsilon)$ и их производными $g'(\varepsilon)$, для модельной – с *допустимыми* наборами $\{\pi_i, i = 1..k\}$. Переход от допустимых функций исходной задачи к допустимым наборам модельной задачи будем осуществлять посредством образования взвешенных средних по правилу

(10) $\pi_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} g'(\varepsilon)\Delta\phi_n(\varepsilon;\lambda',\lambda'')d\varepsilon \Big/ \alpha_i$, $i = 1..k$.

При наличии частной производной по λ имеем

(11) $\pi_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} g'(\varepsilon)\frac{\partial\phi_n(\varepsilon;\lambda)}{\partial\lambda}d\varepsilon \Big/ \alpha_i$, $i = 1..k$.

Поскольку функция $g(\varepsilon)$ допустима, то верны неравенства

$$g'_+(\varepsilon_{i-1}) \ge g'(\varepsilon) \ge g'_-(\varepsilon_i),\quad \varepsilon \in (\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i],\quad i = 1..k,$$

где в левой и правой частях неравенства суть производные справа и слева соответственно, при этом $g'(0) > g'(1) \ge 0$. Поэтому с учетом определения (8) имеем

(12) $g'_+(\varepsilon_{i-1}) \ge \pi_i \ge g'_-(\varepsilon_i)$, $g'_-(\varepsilon_i) \ge g'_+(\varepsilon_i)$, $i = 1..k$,

$$g'_+(\varepsilon_0) = g'(\varepsilon_0).$$

Очевидно также, что

$$\pi_i \ge \pi_{i+1} \ge 0 \quad \text{для всех } i = 1..k-1,\quad \pi_1 > 0.$$

Таким образом, правила (10), (11) преобразуют допустимую функцию в допустимый набор.

В результате устанавливается

Теорема 2. Для корректности семейства *необходимо и достаточно*, чтобы для α-набора $\{\alpha_i, i = 1..k\}$, определяемого по *любой* паре $\{\lambda', \lambda''\}$, $\lambda' < \lambda''$ (или по λ), формулой (8), число k было четным и выполнялась совокупность неравенств

(13) $\alpha_1 < 0$ и $\sum_{i=1..m}\alpha_i \le 0$ для всех четных $m \le k-2$

(при $k = 2$ требуется выполнение лишь первого неравенства).

Доказательство. Обоснование достаточности условия корректности для исходной задачи после введения параметров α_i и π_i, $i = 1..k$, почти буквально повторяет доказательство *теоремы* 1. И лишь при доказательстве необходимости остается убедиться в том, что контрпример, предложенный в *теореме* 1, реализуем и в исходной задаче в терминах функции $g(\varepsilon)$.

Действительно, если для *некоторого* $m \in \{1, 2,\ldots, k-1\}$ выполняется противоположное неравенство $\sum_{i=1..m}\alpha_i > 0$, где набор $\{\alpha_i, i = 1..k\}$ определяется уже соотношением (8), то допустимый набор $\{\pi_i, i = 1..k\}$ с $\pi_i = \{1, i = 1..m;\ 0, i = m+1..k\}$ из доказательства необходимости в *теореме* 1 с очевидностью трансформируется в допустимую функцию $g(\varepsilon)$ ступенчатого типа по правилу $g'(\varepsilon) = \{1, \varepsilon \le \varepsilon_m; 0, \varepsilon > \varepsilon_m\}$, что согласуется с (9). И мы получаем тот же результат:

$$\sum_{i=1..k} \pi_i \alpha_i = \sum_{i=1..m} \alpha_i > 0 \,. \quad \square$$

Из этой теоремы также вытекают простые, но и полезные

***Следствия* 2**. Если производная по ε от $\Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'')$ (или от $\partial\phi_n(\varepsilon; \lambda)/\partial\lambda$)

(i) при $\varepsilon = 0$ положительна хотя бы для одной пары $\{\lambda', \lambda''\}$, $\lambda' < \lambda''$, (одного значения λ), то семейство некорректно;

(ii) при $\varepsilon = 0$ для любой пары $\{\lambda', \lambda''\}$, $\lambda' < \lambda''$, (для всех $\lambda \ge 0$) отрицательна, то при $k = 2$ семейство корректно;

(iii) при $\varepsilon = 1$ хотя бы для одной пары $\{\lambda', \lambda''\}$, $\lambda' < \lambda''$, (одного значения $\lambda \ge 0$) положительна, то семейство некорректно;

(iv) при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$ одного знака, то семейство некорректно. □

Замечание. В связи с теоремами 1, 2 и следствиями из них отметим, что все предложенные конструкции допускают зеркальные формулировки: в формулах (4), (5), (13) и следствиях 1 знаки всех неравенств можно поменять на противоположные, а в следствиях 2 – слово «положительный» на «отрицательный» и наоборот. □

Мы будем писать λ'' λ' (также $\phi(\varepsilon; \lambda'')$ $\phi(\varepsilon; \lambda')$) и говорить (условно), что λ'' «*доходнее*» λ' (или $\lambda' \rightleftarrows \lambda''$, а λ' «*консервативнее*» λ''), если при *любой допустимой* функции $r(\lambda'') > r(\lambda')$.

Заметим, что отношение   (или $\rightleftarrows$) может быть установлено далеко не для любой пары: при некоторых допустимых функциях разность инвестиционных сумм будет положительной, а при других – отрицательной. Такой случай будет свидетельствовать лишь о *некорректности* семейства, содержащего такую пару.

Напротив, если, например, отношение   установлено для всех упорядоченных по величине параметра семейства пар ф. р. п., то оно корректно. Аналогично корректно семейство, для всех пар которого установлено отношение $\rightleftarrows$. В таком случае при желании сохранить унификацию в обозначениях, следует произвести, например, замену $\lambda \to 1/\lambda$.

Кроме того, мы обычно принимаем в качестве области изменения параметра риска всю бесконечную положительную полуось $(0, \infty)$. И потому также в целях унификации обозначений можно трансформировать произвольный (возможно, конечный) интервал (a,b) значений некоторого параметра ν в бесконечную полуось $\lambda > 0$. В зависимости от того, растет риск и доходность с ростом параметра или убывает, такое преобразование, например, обеспечивается соответственно правилами

(14) $\lambda = \ln\big((b-a)/(\nu-a)\big), \quad \lambda = \ln\big((b-a)/(b-\nu)\big), \quad \nu \in (a, b).$

(Второе из правил меняет характер зависимости λ от ν с прямой на обратную.) Вместо логарифма можно взять любую другую растущую до бесконечности функцию, принимающую при $\nu = a$ (или соответственно $\nu = b$) нулевое значение.

При аналитическом задании семейства иногда возникают трудности в зоне доходов с небольшим риском, условно при $\lambda < 1$, а $\phi(\varepsilon; 1) \equiv \varepsilon$. В таком случае наиболее простым способом продолжения семейства на область $\lambda < 1$ можно считать применение центрально-симметричного отображения, как правило, сохраняющего непрерывность самой функции $\phi(\varepsilon; \lambda)$ по λ:

(15) $\phi_{\mathrm{cs}}(\varepsilon;\lambda) = 1 - \phi(1-\varepsilon; 1/\lambda), \quad \lambda < 1.$

Можно воспользоваться и образованием обратной функции

(16) $\phi_{\mathrm{inv}}(\varepsilon;\lambda) = \phi^{\leftarrow}(\varepsilon; 1/\lambda), \quad \lambda < 1,$

однако это правило не всегда может быть реализовано.

3. Типовой пример корректного семейства

В качестве типового примера рассматривается семейство ф. р. п. инвестора вида $\phi(\varepsilon,\lambda) = \varepsilon^{\lambda}$, $\varepsilon \in [0, 1]$, $\lambda > 0$. Справедливы соотношения (см. также, например, [3]) $\lambda' \; \lambda''$

$R(\lambda) = (1 + \lambda)^{-1}, \quad \phi_n(\varepsilon; \lambda) = \phi(\varepsilon; \lambda)/R(\lambda) = (1 + \lambda)\varepsilon^{\lambda}, \quad \lambda > 0,$
$\Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'') = (1 + \lambda'')\varepsilon^{\lambda''} - (1 + \lambda'')\varepsilon^{\lambda'}, \quad 0 < \lambda' < \lambda'',$
$\partial\phi_n(\varepsilon; \lambda)/\partial\lambda = \varepsilon^{\lambda}\,(1 + (1 + \lambda)\ln(\varepsilon)), \quad \lambda > 0.$

Функция $\Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'')$ помимо $\varepsilon = 0$ принимает нулевое значение лишь в точке ε_1, являющейся корнем уравнения $(1 + \lambda'')\varepsilon^{\lambda''} = (1 + \lambda')\varepsilon^{\lambda'}$,

$\varepsilon_1 = ((1 + \lambda')/(1 + \lambda''))^{1/(\lambda'' - \lambda')}$.

Поскольку $0 < \lambda' < \lambda''$, то $\varepsilon_1 \in (0, 1)$. При этом производная функции $\Delta\phi_n(\varepsilon)$ по ε при $\varepsilon = \varepsilon_1$ равна

$$\left(1+\lambda'\right)\varepsilon_1^{\lambda'-1}\left(\lambda''-\lambda'\right)>0 .$$

К тому же и $\Delta\phi_n(1; \lambda', \lambda'') = \lambda'' - \lambda' > 0$. Все это с очевидностью говорит о том, что функция $\Delta\phi_n(\varepsilon)$ при $\varepsilon < \varepsilon_1$ отрицательна (не считая $\varepsilon = 0$), а при $\varepsilon > \varepsilon_1$ положительна. Поэтому в терминах *теорем* 1, 2 параметр $k = 2$, $\alpha_1 < 0$ и в α-наборе смена знаков происходит единожды. Корректность семейства обеспечивается *следствиями* (ii) (обеих теорем).

На прилагаемом рис. 1 слева представлены графики функций данного семейства при λ = 0.125, 0.25, 1.0, 4.0, 8.0. На том же рисунке справа изображаются графики функций среднего дохода $R(\lambda)$ (верхняя штриховая линия), инвестиционной суммы $A(\lambda)$ для типичной допустимой функции (нижняя штриховая линия) и среднего относительного дохода $r(\lambda)$ для той же допустимой функции (сплошная линия) на интервале [0, 3] по λ.

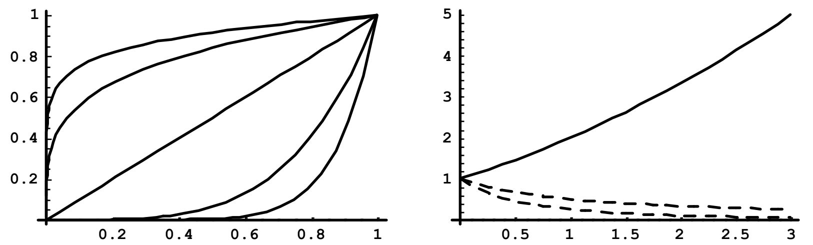

Рис. 1. Функции семейства $\phi(\varepsilon,\lambda) = \varepsilon^{\lambda}$ (слева); функции $R(\lambda)$, $A(\lambda)$ и $r(\lambda)$ (справа)

Данный пример косвенно оправдывает применение общего правила экстраполяции (15), так как справедливо тождество

$$\phi^{\leftarrow}\left(\varepsilon;1/\lambda\right)=\varepsilon^{\lambda}, \quad \lambda>0 .$$

4. Линейные функции с одним изломом

Рассматривается двухпараметрическое надсемейство кусочно-линейных функций от $\varepsilon \in [0, 1]$ с одним изломом вида

(17) $\phi(\varepsilon;\varsigma,\upsilon) = \left\{\upsilon\varepsilon/\theta, \varepsilon \le \theta;\ \upsilon + (1-\upsilon)\frac{\varepsilon-\theta}{1-\theta}, \varepsilon > \theta\right\}$,

где $\theta = 1 + \upsilon - 2\varsigma$, $\varepsilon = \theta$ – абсцисса точки излома функций, υ – ее ордината. При $\varsigma = 0.5$ имеет место $\phi(\varepsilon;\ \varsigma,\ \upsilon) \equiv \varepsilon$ (независимо от υ).

Естественным образом возникают два случая: $\varsigma < 0.5$ и $\varsigma > 0.5$. Вследствие того, что надсемейство располагается целиком в пределах квадрата Q, появляются очевидные ограничения на υ: в первом случае должно быть $0 < \upsilon < 2\varsigma$, во втором – $2\varsigma - 1 < \upsilon < 1$.

Легко проверяется, что площадь под графиком функций (17) не зависит от υ и равна

$$R(\varsigma,\upsilon) = \int_0^1 \phi(\varepsilon;\varsigma,\upsilon)\,d\varepsilon = \varsigma\ .$$

Графики функций данного надсемейства для $I = 11$ значений ς_i параметра ς и $J = 9$ значений υ_{ij} параметра υ для каждого значения ς_i изображены на рис. 2 слева.

При этом вводится вектор $\boldsymbol{s} = \{s_i = (i - ½)/I,\ i = 1..I\}$ тестируемых значений параметра ς, а также для каждого $i = 1..I$ векторы $\boldsymbol{\upsilon}_i = \{\upsilon_{i,j},\ j = 1..J\}$ ординат точек излома функций, где $\upsilon_{i,j} = \{(2j - 1)/J,\ i \le i_c;\ 2s_i - 1 + (1 - s_i)(2j - 1)/J,\ i > i_c\}$, $i_c = 6$.

На рисунке очевидно группирование функций с единым значением параметра ς, также выделяется одна прямая (без излома), образованная совпадающими J функциями с $\varsigma = 0.5$.

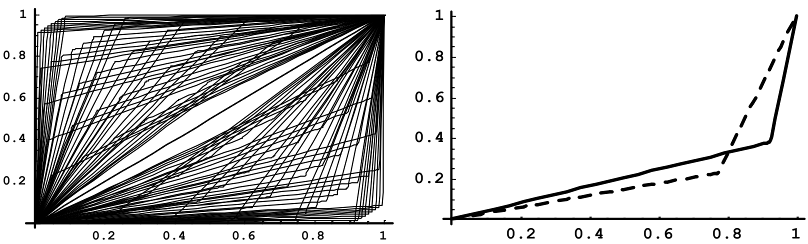

Рис. 2. Графики функций надсемейства $\phi(\varepsilon;\ \varsigma,\upsilon)$ и пары функций семейства $\phi(\varepsilon;\ \varsigma,\upsilon)$ при фиксации $\varsigma < 0.5$

Отметим, что при фиксированном значении $\varsigma \in [0, 1]$ семейство $\{\phi(\varepsilon; \varsigma, \upsilon)\}$ по параметру υ удовлетворяет свойству симметрии относительно биссектрисы угла с вершиной в (1, 0). Действительно, нетрудно видеть, что функции семейства (17) с точкой излома (θ, υ) при такой симметрии соответствует функция этого же семейства с точкой излома $(1 - \upsilon, 1 - \theta)$.

Как показывает несложный анализ, геометрическим местом точек излома функций надсемейства при фиксированном значении параметра ς является отрезок прямой в пределах квадрата Q, проходящей при $0 < \varsigma < ½$ через точку $1 - 2\varsigma$ на оси абсцисс под углом $\pi/4$ к ней, при $½ < \varsigma < 1$ – через точку $2\varsigma - 1$ на оси ординат под тем же углом; его назовем ς-*отрезком*. Формально ς-*отрезок* имеет вид уравнения прямой $\upsilon = \varepsilon - (1 - 2\varsigma)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, при этом ограничения на υ сохраняются прежние: если $\varsigma < 0.5$, то $0 < \upsilon < 2\varsigma$, если $\varsigma > 0.5$, то $2\varsigma - 1 < \upsilon < 1$.

При этом

(18) $\Delta\phi_n(\varepsilon;\varsigma;\upsilon',\upsilon'') = \left(\phi(\varepsilon;\varsigma;\upsilon'') - \phi(\varepsilon;\varsigma;\upsilon')\right)/\varsigma$, $\quad \upsilon'' > \upsilon'$, и

$$\int_0^1 \Delta\phi_n(\varepsilon;\varsigma;\upsilon',\upsilon'')\,d\varepsilon \equiv 0 .$$

Разность $\Delta\phi_n(\varepsilon; \varsigma; \upsilon', \upsilon'')$ состоит из трех линейных участков, равна нулю на концах отрезка [0, 1] и нулю равен интеграл от нее. Поэтому нуль функции образован средним участком и он единствен. В терминах теорем и следствий разд. 2 в нашем случае $k = 2$. В связи с этим существенным для корректности становится знак разности на первом участке.

Из определения (17) наклон разности (коэффициент при ε) в окрестности $\varepsilon = 0$ равен $\upsilon''/(1 + \upsilon'' - 2\varsigma) - \upsilon'/(1 + \upsilon' - 2\varsigma)$. После упрощений получаем, что знак наклона совпадает со знаком выражения $\upsilon'(1 - 2\varsigma) - \upsilon''(1 - 2\varsigma)$. Легко видеть, что этот результат сводится к правилу: при $\upsilon'' > \upsilon'$ наклон в точке $\varepsilon = 0$ отрицателен при $\varsigma < ½$, положителен при $\varsigma > ½$ и обращается в нуль при $\varsigma = ½$. Причем этот наклон не меняется при замене допустимой функции, участвующей в проверке корректности.

Очевидно, что разность, отрицательная при $\varsigma < ½$ вблизи $\varepsilon = 0$, становится положительной в окрестности $\varepsilon = 1$, и наоборот – при $\varsigma > ½$. Напомним, что в соответствии со *следствия-*

ми 1(i) и 2(ii) при $k = 2$ соотношение $\upsilon'' \quad \upsilon'$ («*доходнее*») выполняется тогда и только тогда, когда функция $\Delta\phi_n(\varepsilon; \varsigma; \upsilon', \upsilon'')$ в окрестности $\varepsilon = 0$ отрицательна (например, когда производная по ε при $\varepsilon = 0$ отрицательна).

Таким образом, при фиксации параметра ς для семейства (17) по параметру υ, уже однопараметрического, мы получаем, что для любой пары (υ', υ''), $\upsilon'' > \upsilon'$, мы имеем $\upsilon' \quad \upsilon''$ при $\varsigma < ½$ и $\upsilon'' \quad \upsilon'$ при $\varsigma > ½$. $\upsilon'' > \upsilon'$. Иными словами, при $\varsigma < ½$ с ростом υ доходность оптимального портфеля снижается, а при $\varsigma > ½$ – возрастает. А потому и семейство оказывается корректным.

На рис. 2 справа изображены две функции надсемейства (17) с единым значением ς, но с разными υ: для индексов $i = 3$, $j = 5$ (штриховая линия) и $i = 3$, $j = 8$ (сплошная линия). Характер этих линий и их взаимное расположение типичны для зоны $i < i_c$ ($\varsigma_i < 0.5$). На рис. 3 слева изображены две функции того же надсемейства для $i = 8$, $j = 5$ (штриховая линия) и $i = 8$, $j = 8$ (сплошная линия), а это типично для зоны $i > i_c$, ($\varsigma_i > 0.5$).

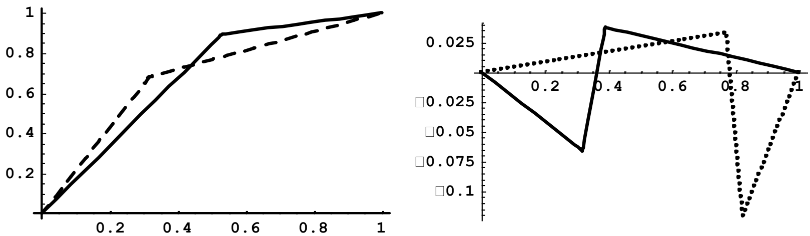

Рис. 3. Графики пары функций семейства $\phi(\varepsilon; \varsigma,\upsilon)$ при фиксации $\varsigma > 0.5$ и пары функций $\Delta\phi_n(\varepsilon)$ для двух значений ς

Сравнение двух рисунков одновременно демонстрирует и суть их различий: на рис. 2 сплошная линия выходит из нуля под бо́льшим углом, чем штриховая линия, а на рис. 3 – под меньшим. Это непосредственно сказывается на характере поведения функции $\Delta\phi_n(\varepsilon) = (\phi_n(\varepsilon; \varsigma_i, \upsilon_{j+1}) - \phi_n(\varepsilon; \varsigma_i, \upsilon_j))/\varsigma$ в нуле и единице. Суть различий с очевидностью демонстрируется на рис. 3 справа. На нем изображены две ломаные линии $\Delta\phi_n(\varepsilon)$, образованные из функций надсемейства с индексами $i = 3$, $j = 5$ (пунктирная линия), $i = 8$, $j = 5$ (сплошная линия).

При желании (вновь для унификации обозначений) использовать трансформации (14) в соответствии с определением (17) при $\varsigma < ½$ следует принять второе соотношение в (14) с $a = 0$, $b = 2\varsigma$, а при $\varsigma > ½$ – первое с $a = 2\varsigma - 1$, $b = 1$.

Данный пример позволяет весьма наглядно продемонстрировать возможности проведения аналитического исследования посредством доказанного необходимого и достаточного условия корректности семейства функций.

Благодаря свойству симметрии семейства из примера подтверждается также гипотеза, что более «*доходная*» в сравнении с конкурентной ф. р. п. порождает более низкие доходы в окрестности $\varepsilon = 0$ и более высокие – в окрестности $\varepsilon = 1$.

Тем не менее отметим, что пример не является, на наш взгляд, идеальным генератором семейств ф. р. п. для инвестора. Во-первых, фиксация параметра ς сильно ограничивает спектр возможностей для выбора инвестора. Во-вторых, трудно оправдать наличие излома у ф. р. п.. Хотя, по-видимому, от этих недостатков можно избавляться, если допускать выход за рамки аналитического исследования и не фиксировать параметр ς. Но это предмет дополнительного исследования.

В этом отношении удачным для инвестора выглядит пример семейства ф. р. п. из разд. 3. Хотя оно не обладает важным для адекватной проверки гипотезы свойством симметрии.

5. Заключение

В работе дается определение корректности семейств, приводится и доказывается необходимое и достаточное условие корректности параметрических семейств функций рисковых предпочтений инвестора, придерживающегося континуального критерия VaR. В качестве следствий устанавливаются также полезные дополнительные утверждения, помогающие по некоторым простым свойствам нормированной ф .р. п. определять или опровергать корректность семейств.

С их помощью аналитически исследуется семейство непрерывных кусочно-линейных функций с одним изломом в качестве ф .р. п. и доказывается его корректность в случае, когда для всех функций семейства интеграл на отрезке [0, 1] одинаков.

При этом наличие у семейства ф .р. п. свойства симметрии относительно биссектрисы прямого угла с вершиной в точке (1, 0) подтверждает гипотезу качественного характера, что более *«доходная»* (т. е. приносящая инвестору более высокую доходность) в сравнении с конкурентной ф. р. п. порождает более низкие доходы в окрестности $\varepsilon = 0$ и более высокие – в окрестности $\varepsilon = 1$.

В случае более сложного задания семейств ф .р. п. рассчитывать на возможность полного аналитического исследования не приходится. Поэтому следует развивать и применять вычислительные алгоритмы, которые могли бы дать аналогичные результаты, пусть и устанавливаемые приближенно.

Литература

1. АГАСАНДЯН Г.А. *Финансовая инженерия и континуальный критерий VaR на рынке опционов* // Экономика и математические методы, – 2005. – Т. 41, №4. – С. 88-98.
2. АГАСАНДЯН Г.А. *Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках*. – М.: ВЦ РАН, 2011. – 299 с.
3. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов*. – М.: ВЦ РАН, 2015. – 297 с.
4. АГАСАНДЯН Г.А. *О признаках корректности семейств функций рисковых предпочтений в CC-VaR* / Материалы X международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2017) (Москва, 2 октября – 4 октября, 2017). М.: ИПУ РАН, 2017. С. 184-187.
5. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора* // Управление большими системами. М.: ИПУ РАН (в печати).
6. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики*. – М.: Наука, 1975. –750 с. (Перевод с англ.: Cramer H. *Mathematical methods of statistics*. – Princeton University Press, 1946.)

7. AGASANDYAN G.A. *Optimal Behavior of an Investor in Option Market* // Int. Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). – P. 1859-1864.

ON PECULIARITIES OF FAMILIES OF RISK-PREFERENCE FUNCTIONS FOR CC-VAR

Gennady A. Agasandyan, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Doctor of Science, leading fellow (Moscow, Chertanovskaya st., 34, (495) 313-44-94).

Abstract. The work investigates parametric families of risk-preference functions (r. p. f.) of an investor, which are used in the problems of investment with continuous VaR-criterion (CC-VaR). The conception of families' correctness that is connected with their yield and important for applying CC-VaR is introduced. The necessary and sufficient condition of families' correctness is formulated and proved. An example of two-parametric superfamily of continuous piecewise linear r. p. f. that generates many one-parametric correct families with special property of symmetry is considered. The example substantiates the hypothesis of quality type that more «profitable» r. p. f. as compared with a rival one generates lower incomes near zero and higher incomes near one. Exposition is accompanied by analytical investigations, numerical examples, calculations and diagrams.

Keywords: continuous VaR-criterion (CC-VaR), risk preferences function (r. p. f.), families of r. p. f., income, investment amount, yield, correct and incorrect families.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии

Поступила в редакцию
Опубликована