УДК 519.7
ББК Ж 50

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИИ НАСЫЩЕНИЯ СИГНАЛА УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО ПРОИЗВОДНЫХ

Фуртат И. Б.[1]
(*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*)

В статье приведен синтез системы управления объектами в условиях параметрической неопределенности, внешних ограниченных возмущений, насыщения регулируемой переменной и ее производных по времени. Предложен способ формирования закона управления, который позволяет обеспечить нахождение функции управления и ее производных в заданных множествах. Получены условия на параметры объекта, внешнего возмущения, эталонной модели и регулятора при выполнении которых система управления будет работоспособной. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность приведенной схемы.

Ключевые слова: управление в условии неопределенности, насыщение сигнала управления и его производных, компенсация возмущений.

1. Введение

Насыщение в регулирующих сигналах одна из типичных проблем управления техническими системами. В ряде технических задач дополнительно насыщению (magnitude saturation) регулирующей переменной рассматривается насыщение ее производной по времени (rate saturation). Например, в [9, 21] изучались катастрофические последствия, возникающие в системе управления полетом летательного аппарата из-за насыщения регулируемой переменной и ее

---

[1] *Фуртат Игорь Борисович, доктор технических наук, доцент* (*cainenash@mail.ru*).

производной. Другими примерами являются управление компрессорами реактивных двигателей [14, 17, 24] и исследование поведения объекта управления с медленным приводом [10].

В настоящее время для решения задачи в условии насыщения регулируемой переменной и ее первой производной по времени предложено достаточно большое количество методов и алгоритмов. В [11, 18, 20, 23] построение системы управления базируется на современных методах исследования нелинейных систем. В [6, 7, 8, 14, 15] синтез алгоритмов управления основан на использовании выпуклых вычислительных методов таких, как линейных матричных неравенств. Достаточно много решений, например, [6, 19, 22], предложено на базе метода anti-windup. Проблема заключается в том, что из-за насыщения управляющего сигнала переменные интегрирующего звена в ПИ и ПИД-регуляторах могут быть неограниченными (windup), что приводит к невыполнению поставленной цели или потери устойчивости замкнутой системы. В таких случаях работоспособность системы управления с ПИ и ПИД-регулятором может достигаться введением контура, предотвращающего рост параметров в регуляторе (anti-windup).

Все вышеописанные работы посвящены решению задачи управления в условиях насыщения регулируемой переменной и ее производной для объекта с известными параметрами. В отличие от работ [6, 7, 8, 11, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23], данная статья посвящена синтезу алгоритма слежения выхода объекта за эталонным сигналом в условиях параметрической неопределенности, внешних неконтролируемых возмущений, насыщения сигнала управления и его производных.

В данной статье решена задача управления линейными объектами в условии насыщения регулируемой переменной и ее производных по времени. Рассматривается модель объекта с неизвестными параметрами, которая подвержена действию внешних ограниченных возмущений. Синтез алгоритма управления условно разбивается на два этапа. На первом этапе формируется закон управления, учитывающий ограничения на входной сигнал и его производные; на втором этапе осуществляется синтез алгоритма компенсации параметрических и внешних возмущений. Получены условия на параметры объекта, эталонной модели и регулятора при выполнении которых система управления обеспечивает слежение выхода объекта за эталонным сигналом с заданной точностью. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность приведенной схемы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого описывается уравнением

(1) $$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bg_0(u_0) + Df(t), \quad y(t) = Lx(t), \quad x(0) = x_0,$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния, $u_0(t) \in R$ и $y(t) \in R$ – входной и выходной сигналы соответственно, $f(t) \in R$ – гладкое неконтролируемое внешнее возмущение, причем $\left| f^{(i)}(t) \right| \le \bar{f}_i$, $\bar{f}_i$ – известные величины, $i = 0, 1, ..., k$, элементы матрицы $A \in R^{n\times n}$ и коэффициенты векторов $B \in R^n$, $D \in R^n$ – неизвестные числа, $L = [1, 0, ..., 0]$ – матрица соответствующей размерности, x_0 – неизвестные начальные условия, функция $g_0(u_0) \in R$ определена выражением

(2) $$g_0(u_0) = \bar{u}_0 \mathrm{sat}\left(\frac{u_0(t)}{\bar{u}_0} \right) = \begin{cases} u_0(t), & |u_0(t)| \le \bar{u}_0, \\ \bar{u}_0 \,\mathrm{sgn}(u_0(t)), & |u_0(t)| > \bar{u}_0, \end{cases}$$

где $\bar{u}_0 > 0$ – величина насыщения. Кроме того, на входной сигнал объекта (1) наложены ограничения следующего вида

$$u_0(t) = \int_0^t g_1(u_1(z))dz,$$

$$g_1(u_1) = \bar{u}_1 \mathrm{sat}\left(\frac{u_1(t)}{\bar{u}_1}\right) = \begin{cases} u_1(t), & |u_1(t)| \le \bar{u}_1, \\ \bar{u}_1 \,\mathrm{sgn}(u_1(t)), & |u_1(t)| > \bar{u}_1, \end{cases}$$

$$u_1(t) = \int_0^t g_2(u_2(z))dz,$$

(3) $$g_2(u_2) = \bar{u}_2 \mathrm{sat}\left(\frac{u_2(t)}{\bar{u}_2}\right) = \begin{cases} u_2(t), & |u_2(t)| \le \bar{u}_2, \\ \bar{u}_2 \,\mathrm{sgn}(u_2(t)), & |u_2(t)| > \bar{u}_2, \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$u_{k-1}(t) = \int_0^t g_k(u_k(z))dz,$$

$$g_k(u_k) = \bar{u}_k \mathrm{sat}\left(\frac{u_k(t)}{\bar{u}_k}\right) = \begin{cases} u_k(t), & |u_k(t)| \le \bar{u}_k, \\ \bar{u}_k \,\mathrm{sgn}(u_k(t)), & |u_k(t)| > \bar{u}_k. \end{cases}$$

Зададим уравнение эталонной модели в виде

(4) $$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t), \quad y_m(t) = L x_m(t), \quad x_m(0) = x_{m0},$$

где $x_m(t) \in R^n$ – вектор состояния, $r(t) \in R$ – гладкое задающее воздействие, причем $\left|r^{(i)}(t)\right| \le \bar{r}_i$, $i = 0, 1, ..., k$, $y_m(t) \in R$ – выход эталонной модели, матрица $A_m \in R^{n \times n}$ и вектор $B_m \in R^n$ – известны, причем матрица A_m – гурвицева, x_{m0} – известные начальные условия.

Требуется разработать алгоритм, обеспечивающий выполнение целевого условия

(5) $$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t > T,$$

где величина $\delta > 0$ характеризует точность слежения, $T > 0$ – время переходного процесса. Также, необходимо чтобы все переменные в замкнутой системе были ограниченными.

Предположения.

1. Неизвестные элементы матрицы A и коэффициенты векторов B и D принадлежат известному ограниченному

множеству Ξ. Пары (A, B) и (A, C) управляема и наблюдаема соответственно.

2. Выполнены условия: $A = A_m + B_m c_{01}^{\mathrm{T}}$, $B = B_m + B_m c_{02}$, $D = B_m c_{03}$, где $c_{01} \in R^n$, $c_{02} \in R$, $c_{03} \in R$ – неизвестные вектор и числа.

3. Числитель передаточной функции $L(\lambda I - A)^{-1} B$ – гурвицев, где λ – комплексная переменная, I – единичная матрица соответствующего порядка.

3. Структура основного закона управления

Принимая во внимание Предположение 2, перепишем уравнение (1) в виде

(6) $$\dot{x}(t) = A_m x(t) + B_m \hat{u}_0(t) + B_m \psi(t), \qquad y(t) = Lx(t),$$

где $\hat{u}_0(t)$ – новый сигнал управления, $\psi(t) = c_{01}^{\mathrm{T}} x(t) + (1 + c_{02}) g_0(u_0) - \hat{u}_0(t) + c_{03} f(t)$. В условиях ограничений (2) и (3), зададим функцию $\hat{u}_0(t)$ в виде

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&\hat{u}_0(t) = \frac{1}{1+\sigma_0}\left(g_1(t) + \sigma_0 \tilde{u}_0 \mathrm{sat}\left(\frac{g_1(t)}{\tilde{u}_0}\right)\right),\\
&\dot{g}_1(t) = \hat{u}_1(t) - \mu g_1(t),\\
&\hat{u}_1(t) = \frac{1}{1+\sigma_1}\left(g_2(t) + \sigma_1 \tilde{u}_1 \mathrm{sat}\left(\frac{g_2(t)}{\tilde{u}_1}\right)\right),\\
&\dot{g}_2(t) = \hat{u}_2(t) - \mu g_2(t),\\
&\vdots\\
&\dot{g}_{k-1}(t) = \hat{u}_{k-1}(t) - \mu g_{k-1}(t),\\
&\hat{u}_{k-1}(t) = \frac{1}{1+\sigma_{k-1}}\left(g_k(t) + \sigma_{k-1} \tilde{u}_{k-1} \mathrm{sat}\left(\frac{g_k(t)}{\tilde{u}_{k-1}}\right)\right),\\
&\dot{g}_k(t) = \hat{u}_k(t) - \mu g_k(t),\\
&\hat{u}_k(t) = \frac{1}{1+\sigma_k}\left(u_c(t) + \sigma_k \tilde{u}_k \mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}_k}\right)\right),
\end{aligned}
$$

где $\sigma_i > 0$ – коэффициенты, выбираемые разработчиком из условия нахождения сигналов $\hat{u}_i(t)$ в соответствующих множествах $[-\bar{u}_i, \bar{u}_i]$, $0 < \tilde{u}_i < \bar{u}_i$, $i = 0, \ldots, k$, $\mu > 0$ – достаточно малое число, $u_c(t)$ – функция, необходимая для компенсации параметрической неопределенности и внешнего возмущения в (1). В (7) слагаемые $\mu g_i(t)$ необходимы для предотвращения возможного неограниченного роста функции $g_i(t)$ при насыщении сигналов $\hat{u}_i(t)$.

Из (7) видно, что при $\sigma_i < \infty$ функция $|\hat{u}_i(t)|$ может принимать значения, больше, чем $\tilde{u}_i$. Однако при $\sigma_i \to \infty$ следует, что $\hat{u}_k(t) \to \tilde{u}_k \mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}_k}\right)$ и $\hat{u}_{i-1}(t) \to \tilde{u}_{i-1} \mathrm{sat}\left(\frac{g_i(t)}{\tilde{u}_{i-1}}\right)$. Значит, при достаточно больших σ_i величину $\tilde{u}_i$ можно выбирать достаточно близкой к $\bar{u}_i$. Так при $\tilde{u}_i = \bar{u}_i$ и $\sigma_i \to \infty$

следует, что $\hat{u}_k(t) \to \bar{u}_k \mathrm{sat}\left(\dfrac{u_c(t)}{\bar{u}_k}\right)$ и $\hat{u}_{i-1}(t) \to \bar{u}_{i-1} \mathrm{sat}\left(\dfrac{g_i(t)}{\bar{u}_{i-1}}\right)$. В дальнейшем будут получены условия выбора величин σ_i для обеспечения $\left|\hat{u}_i(t)\right| \le \bar{u}_i$.

Дополнительно отметим, что в (7) коэффициенты σ_i можно выбирать из условия $\sigma_i \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. Однако, ради простоты синтеза системы управления положим в (7) $\sigma_i > 0$.

4. Алгоритм компенсации возмущений

Перепишем (7) в виде

(8)
$$\begin{aligned}
&\hat{u}_0(t) = g_1(t) + \sigma_0\left(\tilde{u}_0 \mathrm{sat}\left(\frac{g_1(t)}{\tilde{u}_0}\right) - \hat{u}_0(t)\right),\\
&\dot{g}_1(t) = \hat{u}_1(t) - \mu g_1(t),\\
&\hat{u}_1(t) = g_2(t) + \sigma_1\left(\tilde{u}_1 \mathrm{sat}\left(\frac{g_2(t)}{\tilde{u}_1}\right) - \hat{u}_1(t)\right),\\
&\dot{g}_2(t) = \hat{u}_2(t) - \mu g_2(t),\\
&\vdots\\
&\dot{g}_{k-1}(t) = \hat{u}_{k-1}(t) - \mu g_{k-1}(t),\\
&\hat{u}_{k-1}(t) = g_k(z) + \sigma_{k-1}\left(\tilde{u}_{k-1} \mathrm{sat}\left(\frac{g_k(t)}{\tilde{u}_{k-1}}\right) - \hat{u}_{k-1}(t)\right),\\
&\dot{g}_k(t) = \hat{u}_k(t) - \mu g_k(t),\\
&\hat{u}_k(t) = u_c(t) + \sigma_k\left(\tilde{u}_k \mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}_k}\right) - \hat{u}_k(t)\right).
\end{aligned}$$

Выразим в (8) функцию $\hat{u}_0(t)$ через $u_c(t)$ в виде

(9)
$$\hat{u}_0(t) = v(t) + w(t),$$

где

$$v(t)=\int_0^t\ldots\int_0^t u_c(z_1)dz_1\ldots dz_k,$$

$$w(t)=\sigma_0\left(\tilde{u}_0\operatorname{sat}\left(\frac{g_1(t)}{\tilde{u}_0}\right)-\hat{u}_0(t)\right)+$$

(10) $$+\sigma_k\int_0^t\ldots\int_0^t\left(\tilde{u}_k\operatorname{sat}\left(\frac{u_c(z_1)}{\tilde{u}_k}\right)-\hat{u}_k(z_1)\right)dz_1\ldots dz_k+$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\sigma_i\int_0^t\ldots\int_0^t\left(\tilde{u}_i\operatorname{sat}\left(\frac{g_{i+1}(z_1)}{\tilde{u}_i}\right)-\hat{u}_i(z_1)\right)dz_1\ldots dz_i-$$

$$-\mu\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^t\ldots\int_0^t g_i(z_1)dz_1\ldots dz_i.$$

Принимая во внимание (4), (6), (9) и (10), составим уравнение для ошибки $\varepsilon(t)=x(t)-x_m(t)$ в виде

(11) $$\dot{\varepsilon}(t)=A_m\varepsilon(t)+B_m v(t)+B_m\varphi(t),\quad e(t)=L\varepsilon(t),$$

где $\varphi(t)=\psi(t)-r(t)+w(t)$. Для компенсации возмущений воспользуемся подходом [3, 4]. Согласно [3, 4], введем вспомогательный контур

(12) $$\dot{\varepsilon}_a(t)=A_m\varepsilon_a(t)+B_m v(t),\quad e_a(t)=L\varepsilon_a(t),\quad \varepsilon_a(0)=0,$$

где $\varepsilon_a(t)\in R^n$. С учетом (11) и (12), составим уравнение для рассогласования $\zeta(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon_a(t)$ в виде

(13) $$\dot{\zeta}(t)=A_m\zeta(t)+B_m\varphi(t),\quad z(t)=L\zeta(t).$$

Преобразуем уравнение (13) к форме вход-выход

(14) $$Q_m(p)z(t)=R_m(p)\varphi(t),$$

где $Q_m(p)$, $R_m(p)$ – линейные дифференциальные операторы, полученные при переходе от (13) к (14), $p=d/dt$. Выразив в (14) функцию $\varphi(t)$ и подставив ее в (11), получим

(15) $$\dot{\varepsilon}(t)=A_m\varepsilon(t)+B_m\left[v(t)+\frac{Q_m(p)}{R_m(p)}z(t)\right].$$

Если бы $(\gamma+k)$-производных сигнала $y(t)$ были бы доступны измерению, то, принимая во внимание (15) и первое выражение (10), закон компенсации возмущений формировался бы в виде

$u_c(t) = -\dfrac{p^k Q_m(p)}{R_m(p)} z(t)$. Однако из постановки задачи производные сигнала $y(t)$ недоступны измерению. Перепишем $\lambda^k Q_m(\lambda) / R_m(\lambda)$ в виде $\lambda^k Q_m(\lambda)/R_m(\lambda) = F(\lambda) + \tilde{Q}_m(\lambda)/R_m(\lambda)$, где $F(\lambda)$ и $\tilde{Q}_m(\lambda)$ получены при выделении целой части в дробно-рациональной функции $\lambda^k Q_m(\lambda) / R_m(\lambda)$, $\deg F(\lambda) = \gamma + k$, $\deg \tilde{Q}_m(\lambda) \le m-1$. Тогда, принимая во внимание первое выражение (10), закон компенсации возмущений $u_c(t)$ зададим в виде

(16) $$u_c(t) = -q^{\mathrm{T}} \xi(t) - \frac{\tilde{Q}_m(p)}{R_m(p)} z(t).$$

где q – вектор, составленный из коэффициентов оператора $F(p)$, которые записаны в обратном порядке, $\xi(t) = \left[\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t), \dots, \bar{z}^{(\gamma+k)}(t)\right]^{\mathrm{T}}$, $\bar{z}^{(i)}(t)$ – оценка i-й производной сигнала $z(t)$. Вектор $\xi(t)$ получен с помощью наблюдателя [5], который записан в форме

(17) $$\dot{\xi}(t) = G_0 \xi(t) + D_0\left(\bar{z}(t) - z(t)\right), \quad \bar{z}(t) = L\xi(t), \quad \xi(0) = 0.$$

где $\xi(t) \in R^{\gamma+k+1}$, $G_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{\gamma+k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I_{\gamma+k}$ – единичная матрица порядка $\gamma + k$, $D_0 = -\left[d_1\mu^{-1}, d_2\mu^{-2}, \dots, d_{\gamma+k+1}\mu^{-\gamma-1}\right]^{\mathrm{T}}$, $d_1, \dots, d_{\gamma+k+1}$ выбираются из условия гурвицевости матрицы $G = G_0 - \left[d_1, \dots, d_{\gamma+k+1}\right]^{\mathrm{T}} L$.

Перед формулировкой утверждения введем следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \max_{\Xi}\left(|c_{01}|\right)\max_{\Xi}\left(\left\|A^k\right\|\right),$$

$$\alpha_2 = \max_{\Xi}\left(|c_{01}|\right)\max_{\Xi}\left|\sum_{i=0}^{k-1} A^i B\right| + \max_{\Xi}\left(c_{01}\right),$$

$$\alpha_3 = \max_{\Xi}\left(|c_{01}|\right)\max_{\Xi}\left|\sum_{i=0}^{k-1} A^i D\right| + \max_{\Xi}\left(c_{03}\right),$$

$$\bar{x}_m = \sup_t \left(\left| x_m(t) \right| \right), \ \tilde{f} = \left\| \left[\bar{f}_0, \ \bar{f}_1, \ldots, \ \bar{f}_k \right] \right\|.$$

Утверждение. Пусть выполнены условия Предположений 1-3. Тогда существуют $\mu > 0$ и $\sigma_i > 0$, $i = 0, \ldots, k$ такие, что при $\mu \le \mu_0$ и

(18) $$\alpha_1 \bar{x}_m + \alpha_3 \tilde{f} + \bar{r} < (1 - \alpha_2 k) \tilde{u} \ \text{и} \ \alpha_2 k > 1,$$

(19) $$\left| \varepsilon(0) \right| \le \alpha_1^{-1} \left((1 - \alpha_2 k) \tilde{u} - \alpha_1 \bar{x}_m - \alpha_3 \tilde{f} - \bar{r}_k \right),$$

система управления (7), (12), (16), (17) обеспечит выполнение целевого условия (5) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Замечание. Из доказательства утверждения следует, что система управления (7), (12), (16), (17) обеспечит выполнение условия (5) в момент времени T с точностью

(20)
$$\delta = \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P) \left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}}(0) P \varepsilon(0) - \mu_0 \alpha^{-1} \rho \right) e^{-\alpha T} + \mu_0 \alpha^{-1} \rho \right]},$$

где $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ – решение уравнения $A_m^{\mathrm{T}} P + P A_m = -Q_1$, $Q_1 = Q_1^{\mathrm{T}} > 0$, $\alpha = \min \left\{ \dfrac{\lambda_{\min}(R_1)}{\lambda_{\max}(P)}, \dfrac{\lambda_{\min}(R_2)}{\mu_0 \lambda_{\max}(H)} \right\}$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ $(\lambda_{\min}(\cdot))$ – наибольшее (наименьшее) собственное число соответствующей матрицы, $H = H^{\mathrm{T}} > 0$ – решение уравнения $G^{\mathrm{T}} H + HG = -Q_2$, $Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}} > 0$, $R_1 = Q_1 - 2\mu_0 P B_m q^{\mathrm{T}} T \left(P B_m q^{\mathrm{T}} T \right)^{\mathrm{T}}$, $T = \mathrm{diag}\,\{\mu^{\gamma}, \ldots, \mu, 1\}$, $R_2 = Q_2 - 2Hbb^{\mathrm{T}} H$, $\rho = 2 \sup_t \left\{ z^{(\gamma + k + 1)}(t) \right\}$.

Оценки для коэффициентов σ_i рассчитываются с помощью следующих условий

(21) $$\sigma_i \ge \frac{(2 + \mu_0) \bar{u}}{\mu_0 (\bar{u} - \tilde{u})}, \quad i = 0, 1, \ldots, k - 1,$$

$$\sigma_k \ge \frac{\bar{u} + |q| \pi + \kappa \bar{c}_{01} \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P) \left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}}(0) P \varepsilon(0) + \dfrac{\mu_0 \rho}{\alpha} \right) + \dfrac{\mu_0 \rho}{\alpha} \right]} + \kappa \left(\bar{c}_{01} \bar{x}_m + (2 + \bar{c}_{02}) \bar{u} + \bar{c}_{03} \bar{f} + \bar{r} \right)}{\bar{u} - \tilde{u}}.$$

где $\pi = \sup_t \left(\left| \xi(t) \right| \right)$, $\kappa = \sup_\omega \left| \dfrac{\tilde{Q}_m(j\omega)}{Q_m(j\omega)} \right|$, j – мнимая единица.

Стоит отметить, что оценки (18)-(21) достаточно грубые из-за использования грубых оценок в доказательстве. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим пример.

5. Пример

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого имеет вид

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} g_0(u_0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} f(t), \tag{22}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Множество возможных значений Ξ задано следующими неравенствами: $-1 \le a_0 \le 0{,}5$; $-2{,}5 \le a_1 \le -2$; $-0{,}5 \le a_2 \le 1$; $1 \le b \le 1{,}9$; $-1 \le d \le 1$. На возмущение и его первую производную наложены следующие ограничения: $\bar{f}_0 = 1$, $\bar{f}_1 = 1$. Дополнительно, на входной сигнал объекта (22) наложены ограничения:

$$g_0(u_0) = 1{,}1\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_0(t)}{1{,}1} \right) = \begin{cases} u_0(t), & \left| u_0(t) \right| \le 1{,}1, \\ 1{,}1\,\mathrm{sgn}\left(u_0(t) \right), & \left| u_0(t) \right| > 1{,}1, \end{cases}$$

$$u_1(t) = \int_0^t g_2\left(u_2(z) \right) dz,$$

$$g_1\left(u_1 \right) = 1{,}21\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_1(t)}{1{,}21} \right) = \begin{cases} u_1(t), & \left| u_1(t) \right| \le 1{,}21, \\ 1{,}21\,\mathrm{sgn}\left(u_1(t) \right), & \left| u_1(t) \right| > 1{,}21. \end{cases}$$

Выберем в (3) $A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$, $B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_{m0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{r}_0 = 1$ и $\bar{r}_1 = 1$. Цель управления состоит в синтезе алгоритма, обеспечивающего выполнение целевого условия (5).

Зададим $\sigma_0 = \sigma_1 = 10^{10}$, $\tilde{u}_0 = 1$, $\tilde{u}_1 = 1{,}2$, $\mu = 0{,}01$ и сформируем закон управления (7) в виде

$$\begin{aligned} &\hat{u}_0(t) = \left(1 + 10^{10}\right)^{-1}\left(g_1(t) + 10^{10}\operatorname{sat}\left(g_1(t)\right)\right), \\ &\dot{g}_1(t) = \hat{u}_1(t) - 0{,}01 g_1(t), \\ &\hat{u}_1(t) = \left(1 + 10^{10}\right)^{-1}\left(u_c(t) + 10^{10} \cdot 1{,}2\operatorname{sat}\left(5u_c(t)/6\right)\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Согласно (12), вспомогательный контур определим уравнением

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_a(t) = A_m \varepsilon_a(t) + B_m \int_0^t u_c(z)dz, \quad e_a(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \varepsilon_a(t), \\ &\varepsilon_a(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Выберем $d_1 = 3$, $d_2 = 3$, $d_3 = 1$ и сформируем уравнения наблюдателя (17) в виде

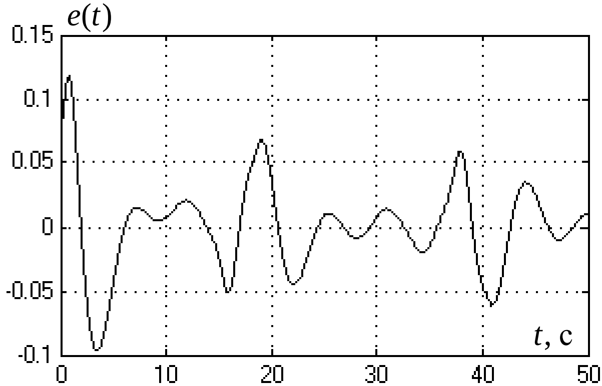
$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t) - 4 \cdot 100\left(\xi_1(t) - z(t)\right), \\ &\dot{\xi}_2(t) = \xi_3(t) - 6 \cdot 100^2\left(\xi_1(t) - z(t)\right), \\ &\dot{\xi}_3(t) = \xi_4(t) - 6 \cdot 100^2\left(\xi_1(t) - z(t)\right), \\ &\dot{\xi}_4(t) = -100^3\left(\xi_1(t) - z(t)\right), \\ &\xi(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{25}$$

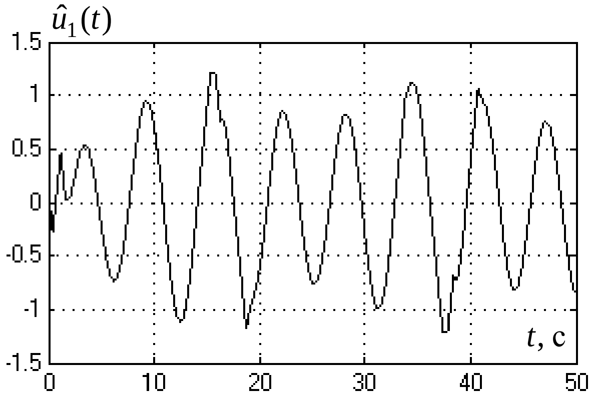
Принимая во внимание уравнения (25) и структуры A_m, B_m и L, сформируем закон компенсации возмущений $u_c(t)$ в виде

$$u_c(t) = -\dot{\xi}_4(t) - 3\xi_4(t) - 3\xi_3(t) - \xi_2(t). \tag{26}$$

Теперь воспользуемся условиями (18) и (19) для задания остальных параметров в замкнутой системе. Принимая во внимание множество Ξ и параметры эталонной модели (3), перепишем условия (14) и (15) в виде: $\tilde{f} + \bar{r} + 2\sqrt{6}\bar{x}_m < 0{,}1$ и

$\left|x(0)\right| \le 0{,}5 \cdot 6^{-0{,}5}\left(0{,}1 - \bar{f} - \bar{r} - 2\sqrt{6}\bar{x}_m\right)$. Отметим, что для выбранных значений σ_0 и σ_1 оценки (21) выполнены. Как отмечалось, полученные оценки достаточно грубые. Результаты моделирования показали, что система управления будет работоспособной, например, при $\bar{r} = 1{,}2$, $\bar{x}_m = 0{,}6$, $\bar{f} = 0{,}4$, $\left|x(0)\right| \le 0{,}07\sqrt{3}$. Покажем работоспособность системы управления (23)-(26) для следующих параметров объекта (22) и эталонной модели (4): $a_0 = -1$, $a_1 = -3$, $a_2 = 1$, $b = 1$, $d = 1$, $f(t) = 0{,}2 + 0{,}2\sin 0{,}7t$, $x(0) = 0{,}07\cdot[1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$ и $r(t) = 0{,}2 + \sin t$. На рис. 1 представлены результаты моделирования по ошибке $e(t)$ и сигналам управления $\hat{u}_1(t)$ и $\hat{u}_0(t)$.





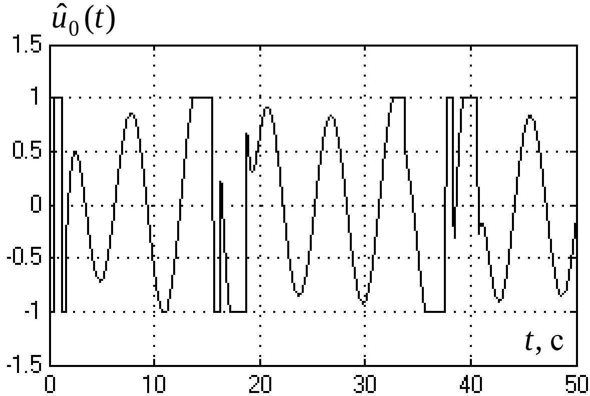


Рис. 1. Переходные процессы по $e(t)$, $\hat{u}_1(t)$ и $\hat{u}_0(t)$.

Анализ результатов моделирования показал, что замкнутая система робастна по отношению к внешним возмущениям и параметрической неопределенности из заданного класса Ξ. Так, из рис. 1 следует, что в системе управления динамическая ошибка не превышает значения 0,65 начиная с момента времени 5 с. Из рис. 2, 3 видно, что сигналы $\hat{u}_1(t)$ и $\hat{u}_0(t)$ находятся в отрезках [–1,2; 1,2] и [–1; 1] соответственно. Без использования алгоритма (23) (то есть как и в [4] при $\hat{u}_0(t) = \int_0^t u_c(s)ds$) сигналы $\hat{u}_0(t)$ и $u_c(t)$ в начальный момент времени достигают значений – $1.5 \cdot 10^4$ и $-8 \cdot 10^6$ соответственно, а начиная с 10 с функции $\hat{u}_0(t)$ и $u_c(t)$ находятся в отрезке [–1,3; 1,3] соответственно, что недопустимо по условию задачи.

6. Заключение

В статье приведен синтез системы управления для линейного объекта в условиях параметрической неопределенности, внешних ограниченных возмущений, насыщения регулируемой переменной и ее производных. Предложен способ формирования сигнала управления, обеспечивающего нахождение функции управления и ее производных в заданных множествах. Получены условия на параметры объекта управления, внешнего возмущения, эталонной модели и регулятора при выполнении которых система управления будет работоспособной. Отметим, что алгоритм, учитывающий насыщение сигнала управления и его производных, является независимым, то есть им можно дополнить любой из существующих алгоритмов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. Введем вектор $\theta(t)=\left[z(t),\,\dot z(t),\,...,\,z^{(\gamma+k)}(t)\right]^{\mathrm T}$. Как и в [4], принимая во внимание (17), составим уравнение для ошибки оценки производных $\eta(t)=T^{-1}(\xi(t)-\theta(t))$ в виде

$$\dot\eta(t)=\mu^{-1}G\eta(t)+bz^{(\gamma+k+1)}(t),\quad \bar z(t)-z(t)=\mu^{\gamma+k}L\eta(t), \tag{П.1}$$

где $b=[0,\,\ldots,\,0,\,1]^{\mathrm T}$. С учетом (16), преобразуем (15) к виду

$$\dot\varepsilon(t)=A_m\varepsilon(t)-B_mq^{\mathrm T}T\eta(t). \tag{П.2}$$

Перепишем уравнения (8), (П.1) и (П.2) в виде системы

$$\begin{aligned}
&\dot\varepsilon(t)=A_m\varepsilon(t)-B_mq^{\mathrm T}T\eta(t),\\
&\mu_1\dot\eta(t)=G\eta(t)+\mu_2bz^{(\gamma+k+1)}(t),\\
&\hat u_0(t)=g_1(t)+\sigma_0\left(\tilde u_0\mathrm{sat}\left(\frac{g_1(t)}{\tilde u_0}\right)-\hat u_0(t)\right),\\
&\dot g_1(t)=\hat u_1(t)-\mu_2g_1(t),\\
&\vdots\\
&\dot g_{k-1}(t)=\hat u_{k-1}(t)-\mu_2g_{k-1}(t),\\
&\hat u_{k-1}(t)=g_k(z)+\sigma_{k-1}\left(\tilde u_{k-1}\mathrm{sat}\left(\frac{g_k(t)}{\tilde u_{k-1}}\right)-\hat u_{k-1}(t)\right),\\
&\dot g_k(t)=\hat u_k(t)-\mu_2g_k(t),\\
&\hat u_k(t)=u_c(t)+\sigma_k\left(\tilde u_k\mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde u_k}\right)-\hat u_k(t)\right),
\end{aligned} \tag{П.3}$$

где $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Воспользуемся вспомогательной леммой [2, 12].

Лемма. Если динамическая система описывается уравнением

(П.4) $\quad \dot{x}(t) = f(x(t), t, \mu_1, \mu_2)\,,\ x(t) \in R^n\,,\ \mu_1 > 0\,,\ \mu_2 > 0\,,$

где $f(x, t, \mu_1, \mu_2)$ – непрерывная функция, липшицева по x, и при $\mu_2 = 0$ имеет ограниченную замкнутую область диссипативности

(П.5) $\quad \Omega_x = \{x : P(x) \le C\},$

где $P(x)$ – непрерывная, кусочно-гладкая, положительно определенная функция в R^n, такая, что при некоторых $C_1 > 0$ и $\mu_0 > 0$ выполнено условие

$$\sup_{\mu_1,\, \mu_2 \le \mu_0} \left\langle \left[\frac{\partial P(x)}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}},\ f(x, t, \mu_1, 0) \right\rangle \le -C_1, \text{ при } P(x) = C\,.$$

Тогда для всех достаточно малых $\mu_1 \le \mu_0$ и $\mu_2 \le \mu_0$ множество (П.5) остается областью диссипативности системы (П.4).

Лемма является обобщение первой леммы В.А. Брусина [1] для неавтономных систем. Доказательство леммы приведено в [12]. Проверим условия леммы для системы (П.3). Для этого рассмотрим (П.3) при $\mu_2 = 0$:

$$\text{(П.6)}\quad \begin{aligned}
&\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) - B_m q^{\mathrm{T}} T \eta(t),\\
&\dot{\eta}(t) = \mu_1^{-1} G \eta(t),\\
&\hat{u}_0(t) = g_1(t) + \sigma_0 \left(\tilde{u}_0 \mathrm{sat}\left(\frac{g_1(t)}{\tilde{u}_0} \right) - \hat{u}_0(t) \right),\\
&\dot{g}_1(t) = \hat{u}_1(t),\\
&\vdots\\
&\dot{g}_{k-1}(t) = \hat{u}_{k-1}(t),\\
&\hat{u}_{k-1}(t) = g_k(z) + \sigma_{k-1} \left(\tilde{u}_{k-1} \mathrm{sat}\left(\frac{g_k(t)}{\tilde{u}_{k-1}} \right) - \hat{u}_{k-1}(t) \right),\\
&\dot{g}_k(t) = \hat{u}_k(t),\\
&\hat{u}_k(t) = u_c(t) + \sigma_k \left(\tilde{u}_k \mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}_k} \right) - \hat{u}_k(t) \right).
\end{aligned}$$

Так как компенсация неопределенностей осуществляется в последнем уравнении (П.6), то рассмотрим случай, когда $\left|p^k\varphi(t)\right| \le \tilde{u}$ и $|u_c(t)| \le \tilde{u}$, где $\tilde{u} = \min\{\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, ..., \tilde{u}_k\}$. В этом случае насыщения в сигналах управления $\hat{u}_i(t)$ не будет, следовательно, $w(t) = 0$. Тогда из (П.6) имеем $\hat{u}_0(t) = \int\limits_0^t ... \int\limits_0^t u_c(z_1)dz_1...dz_k$. Первые два уравнения (П.6) асимптотически устойчивы в силу гурвицевости матриц A_m и G. Из (4) и ограниченности $\varepsilon(t)$ следует ограниченность $|x(t)|$, а из ограниченности $\eta(t)$ и уравнения (17) следует ограниченность $\xi(t)$. Тогда из (16) следует ограниченность функции $u_c(t)$, а из (15) следует ограниченность $v(t)$, а, следовательно, и ограниченность $\hat{u}_0(t)$. Тогда из (П.6) следует ограниченность функций $\hat{u}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Найдем теперь множество притяжения для системы (П.6). Принимая во внимание структуру функции $\varphi(t)$ и уравнение (1), найдем $p^k\varphi(t)$ в виде

$$p^k\varphi(t) = c_{01}^T\left[A^k x(t) + \sum_{i=0}^{k-1}\left(A^i B\hat{u}_0^{(k-1-i)}(t) + A^i D f^{(k-1-i)}(t)\right)\right] + \\ + c_{02}\hat{u}_0^{(k)}(t) + c_{03} f^{(k)}(t) - r^{(k)}(t). \tag{П.7}$$

Подставив (П.7) в условие $\left|p^k\varphi(t)\right| \le \tilde{u}$, получим

$$\left|c_{01}^T\left[A^k x(t) + \sum_{i=0}^{k-1}\left(A^i B\hat{u}_0^{(k-1-i)}(t) + A^i D f^{(k-1-i)}(t)\right)\right] + \right. \\ \left. c_{02}\hat{u}_0^{(k)}(t) + c_{03} f^{(k)}(t) - r^{(k)}(t)\right| \le \tilde{u}. \tag{П.8}$$

Найдем верхнюю оценку для левой части (П.8) в виде

$$\left|c_{01}^T\left[A^k x(t) + \sum_{i=0}^{k-1}\left(A^i B\hat{u}_0^{(k-1-i)}(t) + A^i D f^{(k-1-i)}(t)\right)\right] + c_{02}\hat{u}_0^{(k)}(t) + \right. \\ \left. + c_{03} f^{(k)}(t) - r^{(k)}(t)\right| \le \alpha_1|\varepsilon(t)| + \alpha_1\bar{x}_m + \alpha_2 k\tilde{u} + \alpha_3\tilde{f} + \bar{r}_k. \tag{П.9}$$

Подставив оценку (П.9) в левую часть (П.8), потребуем выполнение условий (18) и (19). Тогда, при выполнении (18) и

(19) следует, что $\dot{V}(t) \le 0$ и цель управления (5) будет достигнута и условия Леммы будут выполнены. Однако из асимптотической устойчивости (П.6) при $\mu_2 = 0$ не следует асимптотическая устойчивость (П.3) при $\mu_2 \neq 0$. Поэтому рассмотрим случай, когда $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Для системы (П.3) рассмотрим функцию Ляпунова $V(t) = V(\varepsilon(t),\ \eta(t))$ в виде

$$V(t) = \varepsilon^{\mathrm{T}}(t)P\varepsilon(t) + \eta^{\mathrm{T}}(t)H\eta(t)\,. \tag{П.10}$$

Возьмем производную от (П.10) вдоль траекторий первых двух уравнений (П.3):

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q_1\varepsilon(t) - 2\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_m q^T T\eta(t) - \\ &- \mu_0^{-1}\eta^{\mathrm{T}}(t)Q_2\eta(t) + 2\eta^{\mathrm{T}}(t)Hbz^{(\gamma+k+1)}.\end{aligned} \tag{П.11}$$

Воспользуемся оценками:

$$\begin{aligned}&2\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_m q^T T\eta(t) \le \\ &\le 2\mu_0\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_m q^T T\left(PB_m q^T T\right)^{\mathrm{T}}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t) + \mu_0^{-1}\eta(t), \\ &2\eta^{\mathrm{T}}(t)Hbz^{(\gamma+k+1)}(t) \le 2\mu_0^{-1}\eta^{\mathrm{T}}(t)Hbb^T H\eta^{\mathrm{T}}(t) + 2\mu_0\rho.\end{aligned} \tag{П.12}$$

С учетом (П.12), оценим (П.11) в виде

$$\dot{V}(t) = -\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)R_1\varepsilon(t) - \mu_0^{-1}\eta^{\mathrm{T}}(t)R_2\eta(t) + \mu_0\rho. \tag{П.13}$$

Переписав (П.13) в виде $\dot{V}(t) \le -\alpha V(t) + \mu_0\rho$ и решив его относительно $V(t)$, получим

$$V(t) \le \left(V(0) - \mu_0\alpha^{-1}\rho\right)e^{-\alpha t} + \mu_0\alpha^{-1}\rho. \tag{П.14}$$

Тогда

$$\begin{aligned}&|e(t)| \le |\varepsilon(t)| \le \\ &\le \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P)\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}}(0)P\varepsilon(0) - \mu_0\alpha^{-1}\rho\right)e^{-\alpha t} + \mu_0\alpha^{-1}\rho\right]}.\end{aligned} \tag{П.15}$$

Из (5) и (П.15) следует (20).

Теперь определим оценку для коэффициентов σ_i, при которых $|\hat{u}_i(t)| \le \bar{u}$, где $\bar{u} = \min\{\bar{u}_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Оценим последнее выражение (7) в виде неравенства $|u_c(t)| + \sigma_k\tilde{u} \le (1+\sigma_k)\bar{u}$ и разрешим его относительно σ_k :

$\sigma_k \geq \dfrac{\bar{u} - |u_c(t)|}{\bar{u} - \tilde{u}}$. Оценим сверху числитель правой части последнего неравенства в виде

$$\begin{aligned}
&\bar{u} - |u_c(t)| \leq \bar{u} + |u_c(t)| \leq \bar{u} + |q|\pi + \kappa|\varphi(t)| \leq \\
&\leq \bar{u} + |q|\pi + \\
&+ \kappa\left(\left|c_{01}^{\mathrm{T}}\varepsilon(t) + c_{01}^{\mathrm{T}}x_m(t) + (1 + c_{02})g_0(u_0) - \hat{u}_0(t) + c_{03}f(t)\right| + |r(t)|\right) \leq \\
&\leq \bar{u} + |q|\pi + \kappa\bar{c}_{01}|\varepsilon(t)| + \kappa\left(\bar{c}_{01}\bar{x}_m + (2 + \bar{c}_{02})\bar{u} + \bar{c}_{03}\bar{f} + \bar{r}\right).
\end{aligned} \tag{П.16}$$

Принимая во внимание (П.15) и (П.16), получим вторую оценку (21). С учетом того, что $|\hat{u}_i(t)| \leq \bar{u}$ оценим σ_i в (7) в виде $\sigma_i \geq \dfrac{g_{i+1}(t) - \bar{u}}{\bar{u} - \tilde{u}}$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Найдем оценки решений неравенств $\dot{g}_{i+1}(t) \leq \bar{u} - \mu_0 g_{i+1}(t)$, полученных из (7), в виде $g_{i+1}(t) \leq 2\bar{u} / \mu_0$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Объединив полученные результаты получим первую оценку в (21).

Очевидно, что оценки (18)-(21) достаточно грубые, но из них видно, что существуют определенные значения параметров объекта, эталонной модели и регулятора, при которых в условиях ограничений можно обеспечить выполнение условия (5).

Литература

1. БРУСИН В.А. *Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. 1* // Автоматика и телемеханика. 1995. № 4. С. 119-127.
2. ФУРТАТ И.Б. *Робастное управление определенным классом неминимально-фазовых динамических сетей* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 1. С. 35-48.
3. ФУРТАТ И.Б. *Динамическая компенсация возмущений в условии насыщения сигнала управления* // Управление большими системами. Выпуск 65. М.: ИПУ РАН, 2017. С.24-40.

4. ЦЫКУНОВ А.М. *Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений* // Автоматика и телемеханика. 2007. № 7. С. 103-115.
5. ATASSI A.N., KHALIL H.K. *A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems* // IEEE Trans. on Automatic Control. 1999. V. 44. No. 9. P. 1672-1687.
6. BARBU C., GALEANI S., TEEL A., ZACCARIAN L. *Nonlinear anti-windup for manual flight control* // Int. J. of Control. 2005. V. 78. No.14. P. 1111–1129.
7. BATEMAN A., LIN Z. *An analysis and design method for discrete-time linear systems under nested saturation* // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. V. 47. P. 1305–1310.
8. BATEMAN A., LIN Z. *An analysis and design method for linear systems under nested saturation* // Systems Control Lett. 2003. V. 48. P. 41–52.
9. BERG J., HAMMETT K., SCHWARTZ C., BANDA S. *An analysis of the destabilizing effect of daisy chained rate-limited actuators* // IEEE Trans. Control Systems Technology. 1996. V. 4. P. 171–176.
10. CHEN P., SHAMMA J.S. *Gain-scheduled l1-optimal control for boiler- turbine dynamics with actuator saturation* // J. Process Control. 2004. V. 14. P. 263–277.
11. FREEMAN R., PRALY L. *Integrator backstepping for bounded controls and control rates* // IEEE Trans. Automat. Control. 1998. V. 43. No. 2. P. 258–262.
12. FURTAT I., FRADKOV A., TSYKUNOV A. *Robust synchronization of linear dynamical systems with compensation of disturbances* // Int J Robust and Nonlinear Control. 2014. V. 24. N. 17. P. 2774-2784.
13. FURTAT I.B. *Robust Control for a Specific Class of Non-Minimum Phase Dynamical Networks* // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2014. V. 53. N. 1. P. 33-46.
14. HARDT M., HELTON W., KREUTZ-DELGADO W. *Numerical solution of nonlinear H2 and H∞ control problems with application to jet engine compressors* // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V. 8. No. 1. P. 98–111.
15. JABBARI F., KOSË I. *Rate and magnitude-bounded actuators:*

scheduled output feedback design // Int. J. of Robust and Nonlinear Control. 2004. V. 14. P. 1169–1184.
16. KAPILA V., PAN H., M. DE QUEIROZ. *LMI-based control of linear systems with actuator amplitude and rate nonlinearities* // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control. 1999. P. 1413–1418.
17. KRSTIC M., KRUPADANAM A., JACOBSON C. *Self-tuning control of a nonlinear model of combustion instabilities* // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 7. P. 424–436.
18. MEGRETSKI A. *New IQC for quasi-concave nonlinearities* // Proc. of American Control Conf. 1999. P. 2380–2385.
19. MILLER R., PACHTER M. Manual flight control with saturating actuators // *IEEE Control Systems*. 1998. V. 18. No. 1. P. 10–19.
20. SABERI A., STOORVOGEL A., SANNUTI P. *Control of Linear Systems with Regulation and Input Constraints*. London: Springer, 2000.
21. SHIFRIN C.A. *Sweden seeks cause of gripen crash* // Aviation Week and Space Tech. 1993. V. 139 P. 78–79.
22. TEEL A., BUFFINGTON J. *Anti-windup for an F-16's daisy chain control allocator* // Proc. AIAA GNC Conf., New Orleans, LA, USA. 1997. P. 748–754.
23. TYAN F., BERNSTEIN D. *Dynamics output feedback compensation for linear systems with independent amplitude and rate saturations* // Int. J. of Control. 1997. V. 67. P. 89–116.
24. WANG Y., YEUNG S., MURRAY R. *Bifurcation control of rotating stall with actuator magnitude and rate limits: part II—control synthesis and comparison with experiments* // Automatica. 2002. V. 38. P. 611–625.