

УДК 517.958
ББК 22.161.5

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ПРИЧИННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (ОСОБЫЕ СЛУЧАИ). I

Солнечный Э.М.¹, Черёмушкина Л.А.²

(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)

Для двух особых видов граничных условий устойчивого одномерного объекта теплопроводности конечной длины получаются оценки норм операторов, определяющих зависимость температуры объекта от граничных воздействий. Эти оценки используются для получения достаточного условия причинности и устойчивости системы управления объектом с помощью нелинейной обратной связи.

Ключевые слова: система управления, причинность, устойчивость, линейный объект теплопроводности, теория функций комплексного переменного.

1. Введение

В работе [1] было получено достаточное условие причинности и устойчивости замкнутой системы управления линейным распределённым объектом, охваченного обратной связью от выходной внешней величины у объекта к воздействию *и* на объект.

¹ *Энгель Михайлович Солнечный, доктор физико-математических наук (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495)334-92-29).*

² *Людмила Александровна Черёмушкина (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495)334-92-29).*

Динамические свойства объекта и обратной связи считаются считываемыми соотношениями вида

$$(1.1) \quad y = Yu + Y_n \mathcal{G}, \quad u = F(y, f).$$

Здесь f – внешнее (возмущающее или задающее) воздействие; Y – оператор $u \rightarrow y$, описывающий поведение y при заданном управлении u и нулевом начальном состоянии объекта; Y_n – оператор $\mathcal{G} \rightarrow y$, описывающий реакцию на начальное состояние \mathcal{G} объекта.

Объект без обратной связи предполагается причинным и устойчивым. Охватывающая его обратная связь может иметь смысл либо регулятора (и тогда вопрос о причинности и устойчивости замкнутой системы должен предшествовать постановке задачи достижения какой-либо цели синтеза), либо воздействия некоторой внешней среды (и тогда нужно выяснить ту степень интенсивности этой связи, которая еще не может нарушить причинность и устойчивость объекта).

Как показано в [1], достаточное условие сохранения причинности и устойчивости замкнутой системы «объект + обратная связь» состоит в том, что обратная связь должна удовлетворять условию Липшица

$$(1.2) \quad \| F(y_1, f) - F(y_2, f) \|_U \leq L_F \| y_1 - y_2 \|_X,$$

и соотношению

$$(1.3) \quad L_F \| Y \| < 1,$$

где y_1, y_2 – два возможных входа обратной связи (т. е. две функции – воздействия на входе обратной связи, $F(y_i, f)$ – выход обратной связи при соответствующем входе y_i ($i = 1, 2$) и внешнем воздействии f , X и U – пространства соответствен-

но входов и выходов обратной связи, L_F – константа, входящая в условие Липшица (1.2).

Нужно отметить, что, конечно, условие (1.3) является лишь достаточным, но не необходимым, так как учитывает не направление действия обратной связи, а лишь его интенсивность. Но это условие применимо к широкому классу обратных связей (к линейным и нелинейным, к статическим и динамическим) и накладывает ограничения лишь на интенсивность обратной связи и ее крутизну. В работах [1,2] это условие уже использовалось для исследования вопроса причинности и устойчивости линейного одномерного объекта теплопроводности, охваченного обратной связью от отклонения ΔT температуры объекта к граничным воздействиям u_i ($i = 1, 2$) на объект.

Обозначим через **DO** пространство обобщенных производных всех порядков от функций-оригиналов [3], заданных на множестве действительных чисел \mathbf{R} ; \mathbf{Q} – пространство равномерно ограниченных функций из пространства **DO**; $\mathbf{Q}_{(-i,j)}$ – пространство всех функций $\varphi \in \mathbf{Q}$, имеющих i первообразных в **DO**, входящих в \mathbf{Q} , и j обобщенных производных $\varphi^{(n)}$ ($n = 0, \dots, j$), входящих в \mathbf{Q} . Норма в пространстве $\mathbf{Q}_{(-i,j)}$ равна

$$\|\varphi\| = \max_{r=0+i, s=0+j} \left(\text{vrai} \max_{t \geq 0} |\varphi^{(-r)}(t)| \theta^{-r}, \text{vrai} \max_{t \geq 0} |\varphi^{(s)}(t)| \theta^s \right),$$

где θ – фиксированная константа, имеющая размерность времени.

Для объекта теплопроводности обратная связь предполагается имеющей вид (см. второе из соотношений (1.1))

$$(1.4) \quad u = F(\Delta T, f),$$

где ΔT – отклонение температуры T теплопередающей среды, расположенной на отрезке $\mathbf{L}=[0, l]$, от некоторого установивше-

гося значения (регулируемая величина объекта управления), u – двумерный вектор управляющих воздействий на объект:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

f – внешнее (возмущающее или задающее) воздействие, являющееся элементом некоторого банахова пространства Φ , а F – причинный (в смысле [2]) оператор обратной связи:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

компоненты которого $F_k : \Delta T \rightarrow F_k(\Delta T, f)$ ($k = 1, 2$) являются липшицевыми отображениями пространства X равномерно ограниченных на отрезке L функций в пространство $Q_{(-i,j)}$ с константами Липшица $L_{F_k,(i,j)}$, не зависящими от $f \in \Phi$. Как показано в [1], для устойчивости замкнутой системы управления по отношению к паре (f, ϑ) и для причинности оператора $A: f \rightarrow \Delta T$, реализуемого замкнутой системой, достаточно, чтобы для некоторой пары (i, j) (где $i, j \geq 0$) константа Липшица L_X оператора $X = Y \circ F$ разомкнутой системы (при фиксированном внешнем воздействии f) была строго меньше 1.

Оператор $Y: u \rightarrow \Delta T$ объекта управления определяется математической моделью системы передачи тепла за счет теплопроводности; эта модель принимается в виде [1]

$$(1.5) \quad c \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = - \frac{\partial \Delta q}{\partial \xi}, \quad \Delta q = -\lambda \frac{\partial \Delta T}{\partial \xi}$$

$$C_0 y|_{\xi=0} + C_l y|_{\xi=l} = u, \quad \Delta T|_{t=-0} = \vartheta,$$

где

$$y = \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta q \end{pmatrix},$$

t – время ($t \in \mathbf{R}$), ξ – координата вдоль длины объекта ($\xi \in \mathbf{L}$), Δq – отклонение потока тепла q (в направлении возрастания ξ) от установившегося значения, c – теплоемкость теплопередающей среды на единицу длины, λ – коэффициент теплопроводности среды; $\mathbf{C}_0 = (c_{0rs})$ и $\mathbf{C}_l = (c_{lrs})$, где $r, s = 1, 2$, – заданные числовые квадратные матрицы 2-го порядка.

Как указано в [1], необходимое и достаточное условие невырожденности краевой задачи (1.5) (т. е. существования и единственности ее решения при любом $(u, \vartheta) \in \mathbf{DO} \times \mathbf{X}_n$) состоит в отличии от тождественного нуля функции $D(p) = \det(\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_l \Phi_l)$, где $\Phi_l = \Phi(x)|_{x=l}$, $\Phi(x)$ – интегральная матрица системы (1.5), преобразованной по Лапласу в краевую задачу для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений с независимым переменным $x \in \mathbf{L}$ и комплексным параметром $p \in \mathbf{C}$, \mathbf{C} – комплексная плоскость.

Решение краевой задачи (1.5) дает следующее выражение для изображения по Лапласу реакции ΔT на воздействие u [1]:

$$\overline{Yu}(x) = w_2(x)\overline{u_1} - w_1(x)\overline{u_2},$$

где верхнее подчеркивание используется для обозначения изображений соответствующих переменных;

$$w_j(x) = c_{0j2}R_{H_x D} + c_{lj2}R_{H_{l-x} D} + (1/k)(c_{0j1}R_{S_x D} - c_{lj1}R_{S_{l-x} D}), \quad j = 1, 2;$$

$$\xi \in \mathbf{L}, \quad \alpha = \sqrt{c/\lambda};$$

$$R_{H_x D} = \frac{H_x}{D}, \quad R_{S_x D} = \frac{S_x}{D}, \quad H_x = \operatorname{ch}\left(\frac{\xi}{l}\hat{\xi}\right), \quad S_x = \frac{\alpha l}{\sqrt{\theta}\hat{\xi}} \operatorname{sh}\left(\frac{\xi}{l}\hat{\xi}\right),$$

θ – фиксированная константа, имеющая размерность времени;
 p – комплексное число, \mathbb{C} – комплексная плоскость;

$\hat{\zeta}(p) = \alpha l \sqrt{p}$ – однозначная ветвь функции $\zeta(p) = \alpha l \sqrt{p}$, которая выбрана так, что $\operatorname{Re} \hat{\zeta} = \alpha l \operatorname{Re} \sqrt{p} > 0$ для всех p , не лежащих на мнимой оси, и $\operatorname{Im} \hat{\zeta} > 0$ для мнимых p ;

D – функция аргумента p , равная знаменателю выражений для передаточных вектор-функций объекта от граничных воздействий u_j ($j = 1, 2$) к \bar{Y} [1]:

$$(1.6) \quad D(p) = a_0 + a_{12} H_l + k a_2 Q_l - \frac{a_1}{k} S_l,$$

$$\text{где } k = \sqrt{c\lambda/\theta}, \quad Q_l = \frac{\hat{\zeta} \sqrt{\theta}}{\alpha l} \operatorname{sh} \hat{\zeta}, \quad H_l = \operatorname{ch}(\hat{\zeta}), \quad S_l = \frac{\alpha l}{\theta \hat{\zeta}} \operatorname{sh}(\hat{\zeta}).$$

Коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 и a_{12} определяются через элементы матриц $\mathbf{C}_0 = (c_{0rs})$, $\mathbf{C}_l = (c_{lrs})$ [1]:

$$a_0 = c_{011} c_{022} - c_{012} c_{021} + c_{l11} c_{l22} - c_{l12} c_{l21}, \quad a_1 = c_{011} c_{l21} - c_{l11} c_{021},$$

$$a_2 = c_{012} c_{l22} - c_{l12} c_{022}, \quad a_{12} = c_{011} c_{l22} - c_{l12} c_{021} - c_{012} c_{l21} + c_{l11} c_{022}.$$

Как показано в [1], константа Липшица L_X вычисляется следующим образом:

$$(1.7) \quad L_X = m_2 L_{F_1, (i,j)} + m_1 L_{F_2, (i,j)},$$

где $m_r = (|c_{0r2}| + |c_{lr2}|) N_{H, (i,j)} + (|c_{0r1}| + |c_{lr1}|) N_{S, (i,j)} / k$, а $N_{H, (i,j)}$ и $N_{S, (i,j)}$ определяются следующими соотношениями:

$$(1.8) \quad N_{H,(i,j)} = \sup_{\xi \in \mathbf{L}} \| \underline{R_{H_\xi D}} \|_{\mathbf{B}_{(i,j)}}, \quad N_{S,(i,j)} = \sup_{\xi \in \mathbf{L}} \| \underline{R_{S_\xi D}} \|_{\mathbf{B}_{(i,j)}},$$

где через $\mathbf{B}_{(-i,j)}$ обозначено пространство всех ограниченных операторов, отображающих $\mathbf{Q}_{(-i,j)}$ в \mathbf{Q} , а через $\underline{R_{H_\xi D}}$, $\underline{R_{S_\xi D}}$ обозначены операторы, действующие в $\mathbf{D}\mathbf{O}$ и имеющие соответственно передаточные функции $R_{H_\xi D} = H_\xi / D$, $R_{S_\xi D} = S_\xi / D$.

Условие $L_X < 1$, где L_X определяется согласно (1.7), выделяет некоторый класс \mathbf{FB} обратных связей, для которых гарантированы существование оператора $A: (f, \vartheta) \rightarrow \Delta T$, описывающего поведение замкнутой системы, ограниченность оператора, а также причинность оператора $A_\vartheta: f \rightarrow A(f, \vartheta)$. Для выявления возможно более широкого класса \mathbf{FB} обратных связей необходимо определить такую пару (i, j) с возможно меньшими значениями i, j ($i, j \geq 0$), для которой операторы $\underline{R_{H_\xi D}}$, $\underline{R_{S_\xi D}}$ являются ограниченными, а также возможно точнее оценить нормы этих операторов в пространстве $\mathbf{B}_{(-i,j)}$. Как показали исследования, возможность выбора такой пары (i, j) и оценки норм операторов существенно зависят от предположений относительно коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_{12} , входящих в выражение для функции D .

В [1,2] получены оценки норм операторов с передаточными функциями $\underline{R_{H_\xi D}}$, $\underline{R_{S_\xi D}}$ в пространствах $\mathbf{B}_{(-i,j)}$ для всех таких вариантов предположений о коэффициентах a_j , в которых $a_0 = 0$, а также для одного из вариантов, для которых $a_0 \neq 0$; эти оценки вместе с условием $L_X < 1$ позволяют определить класс обратных связей, для которых гарантированы существование и ограниченность оператора A , а также причинность оператора A_ϑ .

В настоящей работе такое исследование проводится ещё для

двух вариантов, в которых $a_0 \neq 0$. Для этих случаев характерна взаимозависимость граничных условий, относящихся к сечениям $\xi = 0$ и $\xi = l$, а также возможность наличия у объекта конечного или счётного числа частот собственных колебаний.

В настоящей части I работы рассматривается случай $a_1 = 0$, $a_{12} = 0$, $a_0 \neq 0$, $a_2 \neq 0$.

В этом случае

$$D(p) = \frac{a_2 \lambda}{l} (\beta + \alpha l \sqrt{p} \operatorname{sh}(\alpha l \sqrt{p})) = \frac{a_2 \lambda}{l} P(p) = \frac{a_2 \lambda}{l} \hat{P}(\hat{\zeta}(p))$$

где $\beta = \frac{a_0 \alpha l}{k a_2 \sqrt{\theta}} = \frac{a_0}{a_2} \frac{l}{\lambda}$,

$$P(p) = \beta + \alpha l \sqrt{p} \sin(\alpha l \sqrt{p}), \quad \hat{P}(\zeta) = \beta + \zeta \operatorname{sh} \zeta, \quad \zeta = \sigma + i\tau \in \mathbf{C},$$

$$\sigma, \tau \in \mathbf{R}, \quad \hat{\zeta} = \alpha l \sqrt{p} \in \hat{\mathbf{C}} = \{\sigma + i\tau : \sigma > 0\} \cup \{i\tau : \tau \geq 0\}.$$

Исходя из необходимого условия устойчивости объекта, которое состоит в отсутствии у функции D нулей с неотрицательной вещественной частью, далее будем считать β строго положительным числом. Один из простейших примеров граничных условий, удовлетворяющих предположениям этого случая:

$$(1.9) \quad \begin{cases} \Delta q|_{\xi=0} = u_1, \\ b\Delta T|_{\xi=0} + \Delta q|_{\xi=l} = u_2, \end{cases}$$

где $b \neq 0$.

2. Исследование нулей функции $\hat{P}(\zeta) = \beta + \zeta \operatorname{sh} \zeta$

Согласно изложенной в [1] процедуре исследования условий устойчивости объекта первый этап состоит в нахождении нулей функции $\hat{P}(\hat{\zeta}(p))$, так как они определяют полюсы пере-

даточных функций данного объекта управления, где $\hat{\zeta}(p)$ – однозначная ветвь функции $\zeta = \alpha l \sqrt{p}$ с областью значений $\hat{C} = \{\sigma + i\tau : \sigma > 0, -\infty < \tau < \infty\} \cup \{\sigma + i\tau : \sigma = 0, \tau \in (0, \infty)\} \subset \mathbb{C}$.

Чтобы найти нули $\hat{P}(\zeta)$ в области $\hat{C} \subset \mathbb{C}$, используем вспомогательную функцию $h = \tau \sin \tau$ действительного аргумента τ . Введем обозначения: \bar{h}_n – максимум функции $h = \tau \sin \tau$ на отрезке $L_n = [2\pi(n-1), 2\pi n]$ (n – натуральное число); $\bar{\tau}_n$ – то значение τ , при котором h достигает максимума на отрезке L_n ; N_β – минимальное из тех n , для которых $\beta \leq \bar{h}_n$; $h^* = \bar{h}_{N_\beta}$; τ^* – то значение τ , при котором $h(\tau^*) = h^*$, т. е.

$$(2.1) \quad \bar{h}_n = h(\bar{\tau}_n) = \max_{\tau \in L_n} h(\tau), \quad N_\beta = \min_{n \in \{1, 2, \dots\}} \{n : \bar{h}_n \geq \beta\},$$

$$h(\tau^*) = h^* = \bar{h}_{N_\beta}, \quad \beta \leq h^*.$$

Теорема 1 описывает расположение нулей функции $\hat{P}(\zeta)$ в области \hat{C} в зависимости от величины коэффициента β .

Теорема 1. При $\beta \in (0, \tilde{\beta})$, где $\tilde{\beta} = -2\tilde{\sigma}_1 \operatorname{sh} \tilde{\sigma}_1 \cos \tilde{\sigma}_1$, а $\tilde{\sigma}_1$ – решение уравнения $\operatorname{tg} \tilde{\sigma}_1 = -\operatorname{th} \tilde{\sigma}_1$ в интервале $I_1 = (\bar{\tau}_1, \pi)$ (т.е. $\tilde{\beta} \approx 17,7985$), у всех нулей функции $\hat{P}(\zeta) = \beta + \zeta \operatorname{sh} \zeta$, лежащих в области \hat{C} , мнимая часть по абсолютной величине превосходит вещественную и, соответственно, все нули функции $D(p) = (a_2 \lambda / l) \hat{P} \circ \hat{\zeta}(p)$ имеют отрицательную действительную часть. При этом в зависимости от величины β нули функции $\hat{P}(\zeta) = \beta + \zeta \operatorname{sh} \zeta$ располагаются в области \hat{C} следующим образом:

а) при любом β функция $\hat{P}(\zeta) = \beta + \zeta \operatorname{sh} \zeta$ имеет счётное множество пар нулей первого порядка вида $i\tau_{n1}$ и $i\tau_{n2}$, где

$\tau_{n1} \in \mathbf{M}_n = (2\pi(n-1), \bar{\tau}_n)$, $\tau_{n2} \in \mathbf{I}_n = (\bar{\tau}_n, \pi(2n-1))$, а n – любое из тех натуральных чисел, при которых $\beta < \bar{h}_n$;

b) если при некотором натуральном $n < N_\beta$ выполняется неравенство $\beta > \bar{h}_n$ (т. е. $N_\beta > 1$), то помимо мнимых нулей функция $\hat{P}(\hat{\zeta})$ имеет в области $\hat{\mathbf{C}}$ также $m_\beta = (N_\beta - 1)$ пар простых сопряженных комплексных нулей вида $\zeta_{n1}^0 = \sigma_n^0 + i\tau_n^0$, $\zeta_{n2}^0 = \sigma_n^0 - i\tau_n^0$, где $n \in (1, N_\beta - 1)$, $N_\beta \leq 4$, $\sigma_n^0 > 0$, $\tau_n^0 \in \mathbf{I}_n$, а именно,

$$(2.2) \quad m_\beta = \begin{cases} 1 & \text{при } \beta \in (\bar{h}_1, \bar{h}_2), \quad N_\beta = 2, \\ 2 & \text{при } \beta \in (\bar{h}_2, \bar{h}_3), \quad N_\beta = 3, \\ 3 & \text{при } \beta \in (\bar{h}_2, \tilde{\beta}), \quad N_\beta = 4, \end{cases}$$

(где $\bar{h}_1 \approx 1,8197$, $\tilde{h}_2 \approx 7,9167$, $\bar{h}_3 \approx 14,1724$); при этом каждой паре таких нулей функции $\hat{P}(\hat{\zeta})$ соответствует пара простых сопряженных нулей вида

$$p_{n1}^0 = \frac{(\sigma_n^0)^2 - (\tau_n^0)^2 + 2i\sigma_n^0\tau_n^0}{(\alpha l)^2}, \quad p_{n2}^0 = \frac{(\sigma_n^0)^2 - (\tau_n^0)^2 - 2i\sigma_n^0\tau_n^0}{(\alpha l)^2}$$

функции $D(p)$, принадлежащих области $\mathbf{C}^- = \{p \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} p < 0\}$;

c) если же $\beta = h^* = \bar{h}_{N_\beta}$, то функция $\hat{P}(\hat{\zeta})$ также имеет в области $\hat{\mathbf{C}}$ один мнимый ноль второго порядка $\zeta_{N_\beta} = i\tau^*$, которому соответствует отрицательный ноль второго порядка функции $D(p)$;

d) при $\beta \geq \tilde{\beta}$ функция $\hat{P}(\hat{\zeta})$ имеет в области $\tilde{\mathbf{Q}}_1 = \{\sigma + i\tau : \sigma \in (0, \infty), \tau \in \mathbf{I}_1\} \subset \hat{\mathbf{C}}$ такой ноль $\zeta_1^0 = \sigma_1^0 + i\tau_1^0$, для которого $\sigma_1^0 \geq \tau_1^0$, что означает наличие у функции $D(p)$ нуля с

неотрицательной вещественной частью, т. е. неустойчивость объекта управления.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении I.

3. Разложение функций $R_{J_\xi P} = J_\xi / P$ ($J = H, S$) на рациональные дроби

Чтобы получить оценки норм операторов, имеющих передаточные функции $R_{J_\xi P}$ ($J = H, S$), представим каждую из функций $R_{J_\xi P}$ в виде суммы ряда, составленного из главных частей этой функции в ее полюсах, являющихся также нулями функции $P(p)$. Возможность такого представления обосновывается следующей леммой и теоремой Коши [3, п. 71].

Л е м м а. Значения функций $R_{H_\xi P}$ и $R_{S_\xi P}$ на окружностях

$$(3.1) \quad \mathbf{G}_n = \left\{ p \in \mathbf{C} : |p| = \left(\frac{(\pi/2) + 2\pi n}{\alpha l} \right)^2 \right\},$$

где n – натуральное число, при $n \rightarrow \infty$ стремятся к нулю равномерно по отношению к $\arg p$.

Доказательство леммы приведено в Приложении I.

Т е о р е м а 2. На основании теоремы Коши [3, п. 71] каждая из функций $R_{J_\xi P}$, где $J = H, S$, может быть представлена суммой ряда, составленного из главных частей этой функции в её полюсах, а именно:

$$(3.2) \quad R_{J_\xi P} = W_{J_M} + W_{J_{N_\beta}} + \sum_{n=1}^{m(\beta)} W_{J_{kn}} + W_J^* ;$$

$$\text{где } W_{J_M} = \sum_{n=N_\beta+1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 \frac{C_{Jnk}}{p - p_{nk}}, \quad W_{J_{N_\beta}} = \begin{cases} \sum_{k=1}^2 \frac{C_{JN_\beta k}}{p - p_{N_\beta k}} & \text{при } \beta < \bar{h}_{N_\beta}, \\ 0 & \text{при } \beta = \bar{h}_{N_\beta}, \end{cases}$$

$$W_J^* = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta < \bar{h}_{N_\beta}, \\ \sum_{k=1}^2 \frac{C_{Jk}^*}{(p - p^*)^k} & \text{при } \beta = \bar{h}_{N_\beta} = h^*, \end{cases} \quad W_{J_{Kn}} = \frac{C_{Jn}^0}{p - p_n^0} + \frac{\overline{C_{Jn}^0}}{p - p_n^0},$$

и $h^* = \bar{h}_{N_\beta}$ (см. теорему 1). При этом коэффициенты C_{Jnk} , входящие в функции W_{J_M} и $W_{J_{N_\beta}}$ ($J=H, S$) равны:

$$(3.3) \quad C_{Hnk} = \frac{2 \cos((\xi/l)\tau_{nk}) \tau_{nk}}{(\alpha l)^2 (\sin \tau_{nk} + \tau_{nk} \cos \tau_{nk})} = \frac{2}{(\alpha l)^2} \frac{\cos((\xi/l)\tau_{nk}) \tau_{nk}^2}{\beta + s_{nk} \tau_{nk} \sqrt{\tau_{nk}^2 - \beta^2}},$$

$$(3.4) \quad C_{Snk} = \frac{2 \sin((\xi/l)\tau_{nk})}{\alpha l \sqrt{\theta} (\sin \tau_{nk} + \tau_{nk} \cos \tau_{nk})} = \frac{2}{\alpha l \sqrt{\theta}} \frac{\sin((\xi/l)\tau_{nk}) \tau_{nk}}{\beta + s_{nk} \tau_{nk} \sqrt{\tau_{nk}^2 - \beta^2}},$$

$$\text{где } k=1, 2, \quad s_{n1} = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq N_\beta + 1, \\ \text{sign}(L_{N_\beta} - \beta) & \text{при } n = N_\beta, \end{cases}$$

$s_{n2} = -1$, $L_{N_\beta} = 2\pi(N_\beta - 1) + \pi/2$; а коэффициенты, входящие в функции W_J^* , $W_{J_{Kn}}$ ($J=H, S$) равны:

$$(3.5) \quad C_{H2}^* = 8 \frac{\cos((\xi/l)\tau^*) (\tau^*)^2 \sqrt{1 + (\tau^*)^2}}{(\alpha l)^4 (2 + (\tau^*)^2)},$$

$$(3.6) \quad C_{S_2}^* = 8 \frac{\sin\left(\left(\frac{\xi}{l}\right)\tau^*\right)}{(\alpha l)^3 \sqrt{\theta}} \tau^* \frac{\sqrt{1+(\tau^*)^2}}{2+(\tau^*)^2};$$

$$(3.7) \quad C_{H_1}^* = \frac{4}{(\alpha l)^2} \frac{\sqrt{1+(\tau^*)^2}}{2+(\tau^*)^2} \left(\frac{\xi}{l} \tau^* \sin\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right) - \frac{2+(\tau^*)^2}{3} \cos\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right) \right),$$

$$(3.8) \quad C_{S_1}^* = \frac{4}{\alpha l \sqrt{\theta}} \frac{\sqrt{1+(\tau^*)^2}}{2+(\tau^*)^2} \left(\frac{2}{3} \frac{\tau^*}{2+(\tau^*)^2} \sin\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right) - \frac{\xi}{l} \cos\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right) \right);$$

$$(3.9) \quad C_{H_n}^0 = 2 \frac{\operatorname{ch}\left(\left(\frac{\xi}{l}\right)\zeta_n^0\right)}{(\alpha l)^2} \frac{\zeta_n^0}{P'(\zeta_n^0)},$$

$$(3.10) \quad C_{S_n}^0 = 2 \frac{\operatorname{sh}\left(\left(\frac{\xi}{l}\right)\zeta_n^0\right)}{\alpha l \sqrt{\theta} \hat{P}'(\zeta_n^0)}.$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении I.

На основании теоремы 2 можно вычислить или оценить нормы (в пространстве $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{(0,0)}$ сужений на пространстве $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{(0,0)}$) операторов

$$\underline{W}_{J_M}, \underline{W}_{J_{N_\beta}}, \underline{W}_J^*, \underline{W}_{J_{\kappa n}} \quad (J = H, S),$$

имеющих передаточными функциями соответствующие слагаемые представления (3.2).

С л е д с т в и е 1. При $\beta \leq \pi/2$ и $\xi = l$ норма сужения оператора $\left\| \underline{R}_{H_1 P} \right\|_{\mathbf{B}}$ на пространство \mathbf{Q} как оператора $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$, равна

$$(3.11) \quad \left\| \underline{R_{H,P}} \right\|_{\mathbf{B}} = R_{H,P}(0) = \frac{1}{\beta},$$

а точное значение нормы оператора $\underline{R_{H,D}}$ в \mathbf{B} (см. (2.1)):

$$(3.12) \quad \left\| \underline{R_{H,D}} \right\|_{\mathbf{B}} = R_{H,D}(0) = \frac{l}{\beta \lambda a_2} = \frac{1}{a_0}.$$

С л е д с т в и е 2. При $\xi \in [0, l)$ и $\beta \in (0, \pi/2)$ можно указать сравнительно простые оценки нормы оператора $\underline{R_{H,\xi D}}$ в пространстве \mathbf{B} , а именно, при $\beta \in (0, \pi/2)$

$$(3.13) \quad \left\| \underline{R_{H,\xi D}} \right\|_{\mathbf{B}} < \frac{1}{|a_0| \cos \tau_{11}},$$

а в случае $\xi \in [0, l)$ и $\beta = \pi/2$

$$(3.14) \quad \left\| \underline{R_{H,\xi D}} \right\|_{\mathbf{B}} < \frac{2,262}{|a_0|} + \frac{4}{\pi} \frac{l}{\lambda |a_2|}.$$

Доказательства следствий даны в Приложении.

Заметим, что оценки норм операторов, приводимые для значений $\beta \in (0, \pi/2]$ в следствии 2, являются грубыми. Более точные оценки позволяет дать теорема 3.

4. Оценка норм операторов $\underline{W_{J_M}}$ ($J = H, S$)

Т е о р е м а 3. Операторы, имеющие передаточными функциями W_{H_M} и W_{S_M} , отображают пространство \mathbf{Q} в себя, и нормы их сужений на \mathbf{Q} оцениваются сверху следующим образом:

$$(4.1) \quad \left\| \underline{W}_{HM} \right\|_{\mathbf{B}} < \frac{M_H}{\pi^2};$$

$$(4.2) \quad \left\| \underline{W}_{SM} \right\|_{\mathbf{B}} < \frac{\alpha l}{\pi^2 \sqrt{\theta}} \min \left(\frac{M_S}{2\pi}, \frac{\xi}{l} M_H \left(1 + \frac{1}{2N_\beta} \right) \right),$$

$$\text{где } M_H = \frac{1}{N_\beta^2 - a_{N_\beta}^2} + \frac{1}{2a_{N_\beta}} \ln \frac{N_\beta + a_{N_\beta}}{N_\beta - a_{N_\beta}}, \quad a_{N_\beta} = \beta \sqrt{\frac{4\pi^2 N_\beta^2 + 1}{4\pi^2 N_\beta}},$$

$$M_S = \frac{1}{N_\beta(N_\beta^2 - a_{N_\beta}^2)} + \frac{1}{a_{N_\beta}^2} \ln \frac{N_\beta}{\sqrt{N_\beta^2 - a_{N_\beta}^2}}.$$

Доказательство теоремы 3 см. в Приложении I.

5. Оценка норм операторов \underline{W}_{HN_β} и \underline{W}_{SN_β}

Оператор с передаточной функцией

$$(5.1) \quad W_{JN_\beta} = \sum_{k=1,2} C_{JN_\beta k} / (p - p_{N_\beta k}), \quad p_{N_\beta k} = i\tau_{N_\beta k},$$

где

$$(5.2) \quad C_{HN_\beta k} = \frac{2\tau_{N_\beta k} \cos\left(\frac{\xi}{l}\right)}{(\alpha l)^2 (\sin \tau_{N_\beta k} + \tau_{N_\beta k} \cos \tau_{N_\beta k})},$$

$$(5.3) \quad C_{SN_\beta k} = \frac{2\tau_{N_\beta k} \sin\left(\frac{\xi}{l} \tau_{N_\beta k}\right)}{\alpha l \sqrt{\theta} (\sin \tau_{N_\beta k} + \tau_{N_\beta k} \cos \tau_{N_\beta k})},$$

вносит сравнительно весомый вклад в норму суммарного опера-

тора, поэтому его норму полезно оценить отдельно.

Т е о р е м а 4. *Операторы, имеющие передаточными функциями W_{HN_β} и W_{SN_β} , отображают пространство \mathbf{Q} в себя, и нормы их сужений на \mathbf{Q} равны*

$$\|W_{JN_\beta}\| = \left| (\alpha l)^2 \sum_{k=1,2} \frac{C_{JN_\beta k}}{\tau_{N_\beta k}^2} (1 - 2M_k) \right|,$$

где $J = H, S$, $k = 1, 2$, $\tau_{N_\beta k}$ вычисляются путем численного решения уравнения $\tau \sin \tau = \beta$, при этом $\tau_{N_\beta 1} \in (2\pi(N_\beta - 1), \tau^*)$, $\tau_{N_\beta 2} \in (\tau^*, \pi(2N_\beta - 1))$, $C_{JN_\beta k}$ – см. (5.1), $R = C_{JN_\beta 1} / C_{JN_\beta 2}$, и

$$M_k = \begin{cases} \left| \frac{C_{JN_\beta 1}}{C_{JN_\beta 2}} \right|^{\frac{\tau_{N_\beta k}^2}{\tau_{N_\beta 2}^2 - \tau_{N_\beta 1}^2}} & \text{при } R \in (-1, 0) \\ 0 & \text{при } R \notin (-1, 0). \end{cases}$$

Доказательство теоремы 4 дано в Приложении I.

6. Вычисление норм операторов \underline{W}_J^* ($J = H, S$)

Т е о р е м а 5. *Операторы, имеющие передаточными функциями W_H^* и W_S^* , отображают пространство \mathbf{Q} в себя, и нормы их сужений на \mathbf{Q} вычисляются по следующим формулам:*

$$(6.1) \quad \|W_J^*\|_{\mathbf{B}} = \begin{cases} |a_{J1}| & \text{при } C_{J2}^* C_{J2}^* \geq 0, \\ |2a_{J2} \exp b_J - a_{J1}| & \text{при } C_{J2}^* C_{J2}^* < 0, \end{cases}$$

где C_{Jk}^* для $J = H, S$ и $k = 1, 2$ – см. (3.5)-(3.8),

$$b_J = \left(\frac{\tau^*}{\alpha l} \right)^2 \frac{C_{J1}^*}{C_{J2}^*}, \quad \mu = \frac{2 + (\tau^*)^2}{\sqrt{1 + (\tau^*)^2}}, \quad a_{H2} = -\frac{8}{\mu(\tau^*)^2} \cos\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right),$$

$$a_{H1} = \frac{4}{\mu \tau^*} \left(\frac{\xi}{l} \sin\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right) + \frac{1}{\tau^*} \frac{2 + (5/3)(\tau^*)^2}{2 + (\tau^*)^2} \cos\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right) \right),$$

$$a_{S1} = 4 \frac{\alpha l}{\mu(\tau^*)^2 \sqrt{\theta}} \left(\frac{2}{\tau^*} \frac{2 + (2\tau^*)/3^2}{2 + (\tau^*)^2} \sin\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right) - \frac{\xi}{l} \cos\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right) \right),$$

$$a_{S2} = -\frac{8\alpha l}{\mu(\tau^*)^3 \sqrt{\theta}} \sin\left(\frac{\xi}{l} \tau^*\right).$$

Доказательство теоремы 5 см. в Приложении I.

7. Вычисление норм операторов \underline{W}_{Jkn} ($J = H, S$).

Т е о р е м а 6. Операторы с передаточными функциями W_{Hkn} и W_{Skn} , отображают пространство \mathbf{Q} в себя, и нормы их сужений на \mathbf{Q} вычисляются по следующим формулам:

$$(7.1) \quad \left\| \underline{W}_{Hkn} \right\|_{\mathbf{B}} = M_{Hn} \left| \operatorname{ch} \left(\frac{\xi}{l} \zeta_n^0 \right) \right|,$$

$$(7.2) \quad \left\| \underline{W}_{Skn} \right\|_{\mathbf{B}} = M_{Sn} c_S \left| \operatorname{sh} \left(\frac{\xi}{l} \zeta_n^0 \right) \right|,$$

$$\text{где } M_{Hn} = \frac{4N_{Hn}}{\left| \zeta_n^0 \right| \left| \hat{P}'(\zeta_n^0) \right|}, \quad M_{Sn} = \frac{4N_{Sn}}{\left| \zeta_n^0 \right|^2 \left| \hat{P}'(\zeta_n^0) \right|}, \quad c_S = \frac{\alpha l}{\sqrt{\theta}},$$

$$N_{J_n} = \left| \sin(\gamma_n - \varphi_{J_n}) + 2r_n \cos \gamma_n \exp(-v_n((\pi/2) - \varphi_{J_n})) \right|,$$

$$\gamma_n = \operatorname{arctg} v_n, \quad v_n = \frac{g_n}{2\sigma_n^0 \tau_n^0}, \quad r_n = \frac{1}{1 - \exp(-v_n \pi)},$$

Доказательство теоремы 6 см. в Приложении I.

В Приложении II в таблицах 1-4 приводятся вычисленные с помощью программы MATLAB для $n = 1 \div 3$ и $\beta \in [\bar{h}_n, \tilde{\beta})$ значения нулей ζ_n^0 функции \hat{P} и параметров $m_{Hn} = M_{Hn} |\operatorname{ch} \zeta_n^0|$, $m_{Sn} = M_{Sn} |\operatorname{sh} \zeta_n^0|$ ($J = H, S$), равных нормам операторов в выражения (7.1) и (7.2) при $\xi = l$. На рис. 1-4 приводятся графики функций m_{J_n} ($n = 1, 2, 3$, по оси абсцисс откладывается β , по оси ординат – m_{J_n}).

8. Заключение

Полученные в разделах 4-8 оценки или значения норм операторов

$$\underline{W}_{J_M}, \underline{W}_{JN_\beta}, \underline{W}_J^*, \underline{W}_{J_{Kn}},$$

имеющих соответственно передаточные функции W_{J_M} , W_{JN_β} , W_J^* , $W_{J_{Kn}}$ и отображающих пространство \mathbf{Q} в себя, позволяют, в силу (3.2), получить оценки для норм (в пространстве \mathbf{B}) операторов с передаточными функциями $R_{J_\xi P}$ и $R_{J_\xi D} = (l/\lambda a_2)R_{J_\xi P}$ ($J = H, S$), а эти последние оценки дают возможность (см. раздел 1) определить класс \mathbf{FB} обратных связей, для которых гарантированы причинность и устойчивость замкнутой системы по отношению к внешнему воздействию на систему.

П1. Доказательство теоремы 1.

а) Вещественных нулей функция $\hat{P} = \beta + \zeta \operatorname{sh} \zeta$ в силу выбора параметра β не имеет. Рассмотрим вопрос о чисто мнимых нулях этой функции. Если $\zeta = i\tau$, где τ – действительное, i – мнимая единица, то $\hat{P}(i\tau) = \beta - \tau \sin \tau$. Функция $h(\tau) = \tau \sin \tau$ при $\tau \geq 0$ на каждом из отрезков $\mathbf{L}_n = [2\pi(n-1), 2\pi n]$ (n – натуральное) имеет максимум \bar{h}_n в точке $\bar{\tau}_n$, являющейся решением уравнения $\tau = -\operatorname{tg} \tau$, $\bar{\tau}_n \in ((2(n-1) + 0,5)\pi, (2n-1)\pi)$. При $n \rightarrow \infty$ величина \bar{h}_n неограниченно возрастает. Если $\bar{h}_n > \beta$, то на \mathbf{L}_n функция $\hat{P}(\zeta)$ имеет пару нулей первого порядка $i\tau_{n1}$ и $i\tau_{n2}$, где $\tau_{n1} \in \mathbf{M}_n = (2\pi(n-1), \bar{\tau}_n)$, $\tau_{n2} \in \mathbf{I}_n = (\bar{\tau}_n, \pi(2n-1))$; если же $\beta = h^*$, где $h^* = \bar{h}_{N_\beta}$, то функция \hat{P} имеет ноль второго порядка вида $i\tau^*$, где $\tau^* = \bar{\tau}_{N_\beta}$, так как $\hat{P}'(i\tau)|_{\tau=\tau^*} = 0$, но $\hat{P}''(i\tau)|_{\tau=\tau^*} \neq 0$.

б) Далее, предположим, что $\zeta_n^0 = \sigma_n^0 + i\tau_n^0$, где $\sigma_n^0 > 0$, $\tau_n^0 \in \mathbf{L}_n$, является нулём функции \hat{P} . Тогда числа σ_n^0 , τ_n^0 удовлетворяют условиям $\operatorname{Re} \hat{P}(\sigma_n^0 + i\tau_n^0) = 0$ и $\operatorname{Im} \hat{P}(\sigma_n^0 + i\tau_n^0) = 0$, т. е. уравнениям

$$(П1.1) \quad \operatorname{Re}(\beta + \hat{\zeta} \operatorname{sh} \hat{\zeta}) = \beta + \sigma \operatorname{sh} \sigma \cos \tau - \tau \operatorname{ch} \sigma \sin \tau = 0,$$

$$(П1.2) \quad \operatorname{Im}(\beta + \hat{\zeta} \operatorname{sh} \hat{\zeta}) = \sigma \operatorname{ch} \sigma \sin \tau + \tau \operatorname{sh} \sigma \cos \tau = 0,$$

и, следовательно, уравнениям

$$(П1.3) \quad \beta = -(\sigma^2 + \tau^2) \frac{\operatorname{sh}\sigma}{\sigma} \cos\tau,$$

$$(П1.4) \quad \frac{\operatorname{th}\sigma}{\sigma} = -\frac{\operatorname{tg}\tau}{\tau},$$

откуда следует, что $\cos \tau_n^0 < 0$, $\sin \tau_n^0 > 0$ и $\tau_n^0 > -\operatorname{tg} \tau_n^0$; т. е.

$\tau_n^0 \in \mathbf{I}_n$ ($\tau_n^0 > \bar{\tau}_n$). Наконец, из (П1.3) получаем:

$$(П1.5) \quad \beta > (\tau_n^0)^2 |\cos \tau_n^0| > (\bar{\tau}_n)^2 |\cos \bar{\tau}_n| = \bar{\tau}_n \sin \bar{\tau}_n = \bar{h}_n.$$

Так как N_β – минимальное из чисел n , для которых $\beta \leq \bar{h}_n$, из (П1.5) следует, что при $n \geq N_\beta$ функция \hat{P} не имеет нулей вида $\sigma_n^0 + i\tau_n^0$, где $2\pi(n-1) \leq \tau_n^0 < 2\pi n$ и $\sigma_n^0 > 0$.

Из четности функции $\operatorname{Re} \hat{P}(\sigma + i\tau)$ по τ и нечетности по τ функции $\operatorname{Im} \hat{P}(\sigma + i\tau)$ следует, что если $\zeta_{n1}^0 = \sigma_n^0 + i\tau_n^0$ – ноль функции \hat{P} , то и число $\zeta_{n2}^0 = \bar{\zeta}_{n1}^0 = \sigma_n^0 - i\tau_n^0$ – тоже ноль функции $\hat{P}(\zeta)$, поэтому достаточно исследовать лишь нули функции \hat{P} , лежащие в первом квадранте комплексной плоскости \mathbf{C} .

в) Докажем, что для каждого n , при котором $\bar{h}_n < \beta$, функция $\hat{P}(\zeta)$ имеет в области $\mathbf{C}_n = \{\zeta = \sigma + i\tau \in \mathbf{C} : \sigma > 0, \tau \in \mathbf{L}_n\} \subset \mathbf{C}$ ровно один ноль. Согласно сказанному выше, если функция \hat{P} имеет ноль $\zeta_n^0 = \sigma_n^0 + i\tau_n^0$ и $\tau_n^0 \in \mathbf{L}_n$, то $\tau_n^0 \in \mathbf{I}_n$. Рассмотрим область $\mathbf{Q}_n = \{(\sigma, \tau) \in \mathbf{R}^2 : \sigma > 0, \tau \in \mathbf{I}_n\}$ плоскости \mathbf{R}^2 . В этой области уравнение (П1.2) эквивалентно уравнению $G(\sigma, \tau) = 0$, где

$$(П1.6) \quad G(\sigma, \tau) = \frac{\operatorname{th}\sigma}{\sigma} + \frac{\operatorname{tg}\tau}{\tau}.$$

Частные производные функции G имеют вид

$$(П1.7) \quad G'_\sigma = \frac{\sigma - \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma}{(\sigma \operatorname{ch} \sigma)^2};$$

$$(П1.8) \quad G'_\tau = \frac{\tau - \sin \tau \cos \tau}{(\tau \cos \tau)^2}.$$

В области \mathbf{Q}_n функция G'_σ принимает отрицательные значения, а функция G'_τ – положительные. Поэтому уравнение $G(\sigma, \tau) = 0$ задаёт в этой области функцию $\tau = v_n(\sigma)$, имеющую положительную производную

$$(П1.9) \quad v'_n(\sigma) = -\frac{G'_\sigma(\sigma, v_n(\sigma))}{G'_\tau(\sigma, v_n(\sigma))};$$

и, следовательно, монотонно возрастающую с ростом σ , стремящуюся при $\sigma \rightarrow \infty$ к $\pi(2n-1)$, а при $\sigma \rightarrow 0$ – к $\bar{\tau}_n$. При любом $\sigma > 0$ число $\sigma + iv_n(\sigma)$ удовлетворяет уравнению (П1.2).

Так как $v_n(\sigma)$ – возрастающая функция, то и функция

$$(П1.10) \quad \beta_n(\sigma) = -\left(\sigma^2 + v_n^2(\sigma)\right) \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\sigma} \cos v_n(\sigma)$$

также монотонно возрастает (от $-(\bar{\tau}_n)^2 \cos \bar{\tau}_n = \bar{\tau}_n \sin \bar{\tau}_n = \bar{h}_n$ к $+\infty$) с ростом σ , задавая взаимно-однозначное отображение множества $\{\sigma : 0 < \sigma < \infty\}$ на множество $\{\beta : \bar{h}_n < \beta < \infty\}$; обратное взаимно-однозначное отображение обозначим $\hat{\sigma}_n(\beta)$.

Для любого фиксированного значения $\beta > \bar{h}_n$ число $\zeta_n^0 = \hat{\sigma}_n(\beta) + iv_n(\hat{\sigma}_n(\beta))$ является нулем функции $\hat{P}(\zeta)$, ибо оно удовлетворяет как уравнению (П1.2), так и (П1.10), а, следовательно, (П1.3) и (П1.1). Этот нуль – единственный в области \mathbf{C}_n

при данном β в силу единственности функций $\sigma = \hat{\sigma}_n(\beta)$ и $\tau = \nu_n(\sigma)$. ζ_n^0 – нуль первого порядка, ибо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{P}'(\zeta) &= \operatorname{Re}(\operatorname{sh} \zeta + \zeta \operatorname{ch} \zeta) = \operatorname{sh} \sigma \cos \tau + \sigma \operatorname{ch} \sigma \cos \tau - \tau \operatorname{sh} \sigma \sin \tau = \\ &= \operatorname{sh} \sigma (\cos \tau + \sigma \cos \tau / \operatorname{th} \sigma - \tau \sin \tau); \end{aligned}$$

откуда, учитывая (П1.4), получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{P}'(\zeta_n^0) &= \operatorname{sh} \sigma_n^0 (\cos \tau_n^0 - \tau_n^0 \cos^2 \tau_n^0 / \sin \tau_n^0 - \tau_n^0 \sin \tau_n^0) = \\ &= (\cos \tau_n^0 \sin \tau_n^0 - \tau_n^0) \operatorname{sh} \sigma_n^0 / \sin \tau_n^0 \end{aligned}$$

Так как $\sigma_n^0 > 0$ и $\tau_n^0 \in \mathbf{I}_n = (\bar{\tau}_n, (2n-1)\pi)$, т. е. $\tau_n^0 > \pi/2$, то $(\cos \tau_n^0 \sin \tau_n^0 - \tau_n^0) \neq 0$ и $\operatorname{Re} \hat{P}'(\zeta_n^0) \neq 0$, поэтому нуль ζ_n^0 функции $P(\hat{\zeta})$ первого прядка.

в) Так как из требования устойчивости объекта управления следует, что функция D имеет нули только в \mathbf{C}^- , потребуем, чтобы нули $\zeta_n^0 = \sigma_n^0 + i\tau_n^0$ функции \hat{P} , лежащие в области $\hat{\mathbf{C}}$, при всех $n \geq 1$ удовлетворяли условию

$$(П1.11) \quad \sigma_n^0 < \tau_n^0;$$

при выполнении этого условия у каждого из нулей функции \hat{P} модуль вещественной части будет меньше модуля мнимой части и, следовательно, каждый из нулей p_n^0 функции D будет иметь отрицательную вещественную часть.

Из вида (П1.6) функции G следует, что функция ν_n удовлетворяет уравнению

$$(П1.12) \quad \frac{v_n(\sigma)}{\sigma} = -\frac{\operatorname{tg} v_n(\sigma)}{\operatorname{th} \sigma}.$$

Так как правая часть (П1.12) в интервале $(0, \infty)$ монотонно убывает с ростом σ , стремясь к нулю при $\sigma \rightarrow \infty$, отношение $v_n(\sigma)/\sigma$ также монотонно убывает (от ∞ до нуля) и становится равным 1 при некотором $\tilde{\sigma}_n$. Согласно (П1.12), $\tilde{\sigma}_n$ удовлетворяет уравнению

$$(П1.13) \quad \operatorname{tg} \tilde{\sigma}_n = -\operatorname{th} \tilde{\sigma}_n.$$

Точка $\tilde{\sigma}_n + i\tilde{\sigma}_n$ является нулём функции \hat{P} при некотором значении β , которое обозначим как $\tilde{\beta}_n$. Из (П1.10) получаем:

$$(П1.14) \quad \tilde{\beta}_n = -2\tilde{\sigma}_n \operatorname{sh} \tilde{\sigma}_n \cos \tilde{\sigma}_n = 2\tilde{\sigma}_n \operatorname{ch} \tilde{\sigma}_n / \sqrt{2 + 1/\operatorname{sh}^2 \tilde{\sigma}_n}.$$

Величина $\tilde{\sigma}_n = v_n(\tilde{\sigma}_n) \in \mathbf{I}_n$ растёт с ростом n , поэтому из (П1.14) следует, что $\tilde{\beta}_n$ тоже монотонно растёт с ростом n (т. е. $\tilde{\beta}_n < \tilde{\beta}_{n+1}$). Если при некотором β функция $\hat{P} = \beta + \zeta \operatorname{sh} \zeta$ имеет нули вида $\zeta_n^0 = \sigma_n^0 + i\tau_n^0$, где $\sigma_n^0 > 0$, и $\operatorname{Im} \zeta_1^0 > \operatorname{Re} \zeta_1^0$, то и для остальных нулей этой функции, имеющих вид $\zeta_n^0 = \sigma_n^0 + i\tau_n^0$ при $n > 1$, неравенство (П1.11) будет выполняться. Действительно, если $\sigma_1^0 < \tau_1^0$, то $\beta < \tilde{\beta}_1 < \tilde{\beta}_n$, следовательно, $\tau_n^0 > \sigma_n^0$.

Таким образом, если $\beta < \tilde{\beta}_1$, то условие (П1.11) выполняется для всех нулей функции \hat{P} . Но при $\beta \geq \tilde{\beta}_1$ функция \hat{P} имеет такой ноль $\zeta_1^0 = \sigma_1^0 + i\tau_1^0$, что $\sigma_1^0 \geq \tau_1^0 \in (0, \pi)$, а функция $D(p)$ имеет ноль с неотрицательной вещественной частью. Далее будем обозначать $\tilde{\beta}_1$ как $\tilde{\beta}$: $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1 = -2\tilde{\sigma}_1 \operatorname{sh} \tilde{\sigma}_1 \cos \tilde{\sigma}_1$, где $\tilde{\sigma}_1 \in \mathbf{I}_1$ и $\operatorname{tg} \tilde{\sigma}_1 = -\operatorname{th} \tilde{\sigma}_1$.

Для вычисления значения $\tilde{\beta}$ используем уравнение (П1.13): решая его при $n=1$ (т. е. $\tilde{\sigma}_1 \in \mathbf{I}_1$), находим $\tilde{\sigma}_1 \approx 2,365$. Из соотношения (П1.14) следует, что $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1 \approx 17,7985$.

Для $n=1 \div 4$ определим максимумы $\bar{h}_n = \bar{\tau}_n^2 / \sqrt{1 + \bar{\tau}_n^2}$ функции h , решив в интервалах $(2(n-1)\pi, (2n-1)\pi)$ уравнения $\bar{\tau}_n = -\text{tg } \bar{\tau}_n$: $\bar{h}_1 \approx 1,8197$ ($\bar{\tau}_1 \approx 2,0287$), $\bar{h}_2 \approx 7,9167$ ($\bar{\tau}_2 \approx 7,9789$), $\bar{h}_3 \approx 14,1724$ ($\bar{\tau}_3 \approx 14,2075$) и $\bar{h}_4 \approx 20,445$ ($\bar{\tau}_4 \approx 20,469$).

Сравнив найденные максимумы с $\tilde{\beta} \approx 17,7985$, заключаем, что если все нули функции $\hat{P}(\zeta)$ удовлетворяют условию $|\text{Im } \zeta_n^0| > \text{Re } \zeta_n^0$, то при $\beta \in (0, \tilde{\beta})$ функция $\hat{P}(\zeta)$ может иметь в области $\hat{\mathbf{C}}$ не более трёх пар нулей вида $\zeta_n^0 = \sigma_n^0 \pm i\tau_n^0$ с положительной действительной частью, так как из неравенства $\tau_n^0 > \sigma_n^0 > 0$ следует, что $\bar{h}_n < \beta < \tilde{\beta} < \bar{h}_4$.

Таким образом, при $\beta \in (\bar{h}_1, \tilde{\beta})$ в области $\hat{\mathbf{C}}$ функция $\hat{P}(\zeta)$ имеет $m_\beta = N_\beta - 1$ пар сопряженных комплексных нулей первого порядка вида $\zeta_{nk}^0 = \sigma_n^0 \pm i\tau_n^0$ ($k=1,2$), где $\zeta_n^0 = \sigma_n^0 \pm i\tau_n^0$, $\sigma_n^0 > 0$, $\tau_n^0 \in \mathbf{I}_n$. При этом

$$m_\beta = \begin{cases} 1 & \text{при } \beta \in (\bar{h}_1, \bar{h}_2), \\ 2 & \text{при } \beta \in (\bar{h}_2, \bar{h}_3), \\ 3 & \text{при } \beta \in (\bar{h}_3, \tilde{\beta}). \end{cases}$$

Так как любой из этих нулей функции $\hat{P}(\zeta)$ удовлетворяет условию (П1.11), соответствующие им нули

$$p_{n1}^0 = \frac{(\sigma_n^0)^2 - (\tau_n^0)^2 + 2i\sigma_n^0\tau_n^0}{(\alpha l)^2}, \quad p_{n2}^0 = \frac{(\sigma_n^0)^2 - (\tau_n^0)^2 - 2i\sigma_n^0\tau_n^0}{(\alpha l)^2}$$

функции $D(p)$ лежат в области C^- . Теорема 1 доказана.

П2. Доказательство леммы.

Функции $R_{H_\xi P} = H_\xi / P$ и $R_{S_\xi P} = S_\xi / P$ оцениваются по модулю сверху следующим образом:

$$(П2.1) \quad \left| R_{H_\xi P}(p) \right| \leq \frac{\operatorname{ch} \sigma}{|\zeta| \left| \frac{\beta}{\xi} + \operatorname{sh} \zeta \right|} \leq \frac{1}{|\zeta| \left| \frac{\beta}{|\zeta| \operatorname{ch} \sigma} - \varphi(\sigma, \tau) \right|},$$

$$(П2.2) \quad \left| R_{S_\xi P}(p) \right| \leq \frac{\alpha l \operatorname{ch} \sigma}{\sqrt{\theta} |\zeta|^2 \left| \frac{\beta}{\xi} + \operatorname{sh} \zeta \right|} \leq \frac{\alpha l}{\sqrt{\theta} |\zeta|^2 \left| \frac{\beta}{|\zeta| \operatorname{ch} \sigma} - \varphi(\sigma, \tau) \right|},$$

где $\zeta = \alpha l \sqrt{p} = \sigma + i\tau \in \mathbf{C}$, $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$,

$$\varphi(\sigma, \tau) = |\operatorname{sh} \zeta| / \operatorname{ch} \sigma = \sqrt{(\operatorname{th} \sigma \cos \tau)^2 + \sin^2 \tau} = \sqrt{1 - (1 - \operatorname{th}^2 \sigma) \cos^2 \tau}.$$

Функция φ на дуге $\Gamma_n = \{p \in \mathbf{G}_n : |\tau| \in [2\pi n + \pi/3, \pi/2]\}$ принимает значения, не меньшие $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. На множестве же $\mathbf{B}_n = \{p \in \mathbf{G}_n : |\tau| \in [0, 2\pi n + \pi/3]\}$ величина $|\sigma|$ оценивается снизу следующим образом:

$$|\sigma| \geq \sqrt{(2\pi n + \pi/2)^2 - (2\pi n + \pi/3)^2} = \pi \sqrt{(2n + 5/12)/3},$$

т. е. минимальное на \mathbf{B}_n значение $|\sigma|$ неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$, а значения функции $\varphi(\sigma, \tau) = \sqrt{1 - (1 - \operatorname{th}^2 \sigma) \cos^2 \tau}$ на \mathbf{B}_n при достаточно большом n становятся больше $\sqrt{3}/2$. Так как $|\zeta|$ на \mathbf{G}_n неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$, из (П2.1) следует, что значения функций $R_{H_\xi P}$ и $R_{S_\xi P}$ на \mathbf{G}_n

стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ (равномерно по отношению к $\arg p$). Лемма доказана.

ПЗ. Доказательство теоремы 2

В силу доказанного в лемме 3 стремления значений функций $R_{J_\xi P}$ ($J = H, S$) на \mathbf{G}_n к нулю при $n \rightarrow \infty$ эти функции могут быть представлены [3, п. 71] как суммы рядов, составленных из главных частей в их полюсах:

$$R_{J_\xi P} = W_{J_M} + W_{J_{N_\beta}} + \sum_{n=1}^{m(\beta)} W_{J_{k_n}} + W_J^*.$$

Определим коэффициенты, стоящие в числителях дробей – членов этих рядов.

а) При $n > N_\beta + 1$ и в случае $n = N_\beta$ и $\beta < h^* = h_{N_\beta}$, нули $p_{nk} = -\tau_{nk}^2 / (\alpha l)^2$ функции D являются полюсами первого порядка функций

$$W_{J_M}(p) = \sum_{n=N_\beta+1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 \frac{C_{Jnk}}{p - p_{nk}},$$

$$\text{где } C_{Jnk} = \operatorname{res}_{p_{nk}} R_{J_\xi P} = \frac{J_\xi(p_{nk})}{\hat{P}'(\hat{\xi}_{nk}) \hat{\xi}'(p_{nk})} = \frac{1}{(\alpha l)^2} \frac{2J_\xi(p_{nk}) \tau_{nk}^2}{\beta + s_{nk} \tau_{nk} \sqrt{\tau_{nk}^2 - \beta^2}}.$$

Здесь $k \in \{1, 2\}$, $s_{n2} = -1$ (так как $\tau_{n2} > 2(n-1)\pi + \pi/2$ для любого $n \geq N_\beta$, т. е. $\cos \tau_{n2} < 0$), и $s_{n1} = 1$ (так как соотношения $\beta \leq \bar{h}_{n-1} < \bar{\tau}_{n-1} < \pi(2n-3) < 2\pi(n-1) + \pi/2 = L_n$ выполняются для любого $n \geq N_\beta + 1$; см. обозначения теоремы 1).

Если же $n = N_\beta$ и $\beta < h^*$, то $s_{n1} = \operatorname{sign}(L_{N_\beta} - \beta)$, где

$L_{N_\beta} = 2(N_\beta - 1)\pi + \pi/2$, так как если $h(L_{N_\beta}) = L_{N_\beta} < \beta < h^*$, то $L_{N_\beta} = 2(N_\beta - 1)\pi + \pi/2 < \tau_{n1}$ и $\cos \tau_{n1} < 0$.

Таким образом,

$$C_{Hnk} = \frac{2\tau_{nk} \cos\left(\frac{\xi}{l}\tau_{nk}\right)}{(\alpha l)^2 h'(\tau_{nk})} = \frac{2\tau_{nk} \cos\left(\frac{\xi}{l}\tau_{nk}\right)}{(\alpha l)^2 (\sin \tau_{nk} + \tau_{nk} \cos \tau_{nk})} =$$

$$= \frac{2 \cos\left(\frac{\xi}{l}\tau_{nk}\right)}{(\alpha l)^2} \frac{\tau_{nk}^2}{\beta + s_{nk}\tau_{nk}\sqrt{\tau_{nk}^2 - \beta^2}},$$

$$C_{Snk} = \frac{2 \sin\left(\frac{\xi}{l}\tau_{nk}\right)}{\alpha l \sqrt{\theta} h'(\tau_{nk})} = \frac{2 \sin\left(\frac{\xi}{l}\tau_{nk}\right)}{\alpha l \sqrt{\theta}} \frac{\tau_{nk}}{\beta + s_{nk}\tau_{nk}\sqrt{\tau_{nk}^2 - \beta^2}};$$

б) В том случае, когда $\beta = h^*$, функции W_J^* ($J=H,S$) имеют при $p^* = -\tau^*/(\alpha l)^2$ (см. обозначения теоремы 1) полюс 2-го порядка, поэтому

$$W_J^* = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta < \bar{h}_{N_\beta}, \\ \sum_{k=1}^2 \frac{C_{Jk}^*}{(p - p^*)^k} & \text{при } \beta = \bar{h}_{N_\beta} = h^*, \end{cases}$$

Входящие в функции W_J^* ($J=H,S$), коэффициенты, равны:

$$C_{J2}^* = \lim_{p \rightarrow p^*} (R_{J_\xi p} (p - p^*)^2) = 8 \frac{J_\xi(p^*)}{(\alpha l)^4} (\tau^*)^2 \frac{\sqrt{1 + (\tau^*)^2}}{2 + (\tau^*)^2},$$

$$C_{J1}^* = \operatorname{res}_{p \rightarrow p^*} R_{J_\xi P} = \lim_{p \rightarrow p^*} \frac{d}{dp} (R_{J_\xi P} (p - p^*)^2) =$$

$$= \frac{2J'_\xi(p^*)}{P''(p^*)} - \frac{2J_\xi(p^*)P'''(p^*)}{3(P''(p^*))^2}.$$

Отсюда, используя выражения $P(p) = \beta + \alpha l \sqrt{p} \sin(\alpha l \sqrt{p})$ и $p^* = -(\tau^*)^2 / (\alpha l)^2$, получаем формулы (3.5)–(3.8).

γ) Если $\beta \in (\bar{h}_1, \tilde{\beta})$ (см. теорему 1), то функция $W_{J_{kn}}$ ($n=1,2,3$), входящая как слагаемое в функцию $R_{J_\xi P}$ (см. (ПЗ.1)), имеет два сопряженных полюса $\sigma_n^0 + i\tau_n^0$ и $\bar{p}_n^0 = \sigma_n^0 - i\tau_n^0$ первого порядка, где $\sigma_n^0 > 0$. Коэффициенты функций

$$W_{J_{kn}}(p) = \frac{C_{Jn}^0}{p - p_n^0} + \frac{\overline{C_{Jn}^0}}{p - \bar{p}_n^0},$$

где $p_n^0 = \sigma_n^0 + i\tau_n^0$, равны

$$C_{Jn}^0 = \operatorname{res}_{p_n^0} R_{J_\xi P} = 2 \frac{J_\xi(p_n^0)}{(\alpha l)^2} Z_n^0(p_n^0),$$

$$\text{где } Z_n^0 = \frac{\zeta_n^0}{\hat{P}'(\zeta_n^0)} = \frac{\zeta_n^0}{\operatorname{sh} \zeta_n^0 + \zeta_n^0 \operatorname{ch} \zeta_n^0},$$

$$\text{т. е. } C_{Hn}^0 = 2 \frac{\operatorname{ch}((\xi/l)\zeta_n^0)}{(\alpha l)^2} Z_n^0, \quad C_{Sn}^0 = 2 \frac{\operatorname{sh}((\xi/l)\zeta_n^0)}{\alpha l \sqrt{\theta} \hat{P}'(\zeta_n^0)}.$$

П4. Доказательство следствий 1 и 2

Если $\beta \leq \pi/2$, то $N_\beta = 1$, и все входящие в $R_{J_\xi P}$ слагаемые, кроме W_{J_1} и W_{J_M} , равны нулю.

Оригиналы φ_{J_n} функций $C_{J_{n1}}/(p-p_{n1}) + C_{J_{n2}}/(p-p_{n2})$ ($J = H, S$), входящих в выражение для функций W_{J_1} и W_{J_M} , имеют вид:

$$(П4.1) \quad \varphi_{J_n}(\xi, t) = s(t)(C_{J_{n1}} \exp(p_{n1}t) + C_{J_{n2}} \exp(p_{n2}t)),$$

где $J \in \{H, S\}$, $n \geq N_\beta + 1$.

Если $\beta \leq \pi/2$, а $\xi = l$, то при всех $n \geq 1$ $\cos \tau_{nk} / h'(\tau_{nk}) \geq 0$, где $k = 1, 2$, т. е. $C_{Hnk} \geq 0$, и все оригиналы $\varphi_{Hn}(\xi, t)$ в формуле (П4.1) неотрицательны при любом t . Поэтому оцениваемая норма оператора с передаточной функцией $R_{H,P}$ равна значению этой функции при $p = 0$, т. е. $1/\beta$. Следствие 1 доказано.

Для доказательства следствия 2 нужно учесть, что $\tau_{nk} \sin \tau_{nk} = \beta$ и τ_{11} – минимальное из всех возможных значений τ_{nk} , поэтому $|\cos((\xi/l)\tau_{nk})| \leq 1 \leq |\cos \tau_{nk}| / \cos \tau_{11}$ при любых n, k . Учитывая, что $\cos \tau_{nk} / h'(\tau_{nk}) > 0$ при $\beta \leq \pi/2$, получаем, что

$$|C_{Hnk}| = \frac{2\tau_{nk}}{(\alpha l)^2} \left| \frac{\cos\left(\frac{\xi}{l}\tau_{nk}\right)}{h'(\tau_{nk})} \right| \leq \frac{2\tau_{nk}}{(\alpha l)^2} \left| \frac{1}{h'(\tau_{nk})} \right| \leq \frac{2\tau_{nk}}{(\alpha l)^2} \frac{1}{h'(\tau_{nk})} \frac{\cos \tau_{nk}}{\cos \tau_{11}},$$

поэтому

$$\|\varphi_{J_n}(\xi, \bullet)\|_{L^1(\mathbf{R}^+)} \leq \frac{1}{\cos \tau_{11}} \|\varphi_{J_n}(l, \bullet)\|_{L^1(\mathbf{R}^+)}.$$

Из этой оценки и следствия 1 вытекает неравенство (3.13) следствия 2. В случае $\beta = \pi/2$, учитывая, что $\tau_{11} = \pi/2$, $h'(\pi/2) = 1$, $|\cos \tau_{nk}| > |\cos \tau_{12}| > |\cos \bar{\tau}_1| = 1/\sqrt{(\bar{\tau}_1)^2 + 1} \approx 0,4421$, и

$$\left\| \underline{W}_{H_{M1}} \right\|_{\mathbf{B}} = \left| \frac{C_{H11}}{p_{11}} \right| = 2 \cos \left(\frac{\xi}{l} \tau_{11} \right) \frac{1}{\tau_{11} h'(\tau_{11})} < \frac{4}{\pi},$$

где $\underline{W}_{H_{M1}}$ – оператор с передаточной функцией $C_{H11}/(p - p_{11})$, получаем оценку (3.14).

П5. Доказательство теоремы 3

Оригиналы φ_{J_n} функций $C_{J_{n1}}/(p - p_{n1}) + C_{J_{n2}}/(p - p_{n2})$ ($J = H, S$), входящих в выражение для W_{J_M} , при $n \geq N_{\beta} + 1$ имеют вид:

$$(П5.1) \quad \varphi_{J_n}(\xi, t) = s(t)(C_{J_{n1}} \exp(p_{n1}t) + C_{J_{n2}} \exp(p_{n2}t)),$$

$$C_{Hnk} = \frac{2\tau_{nk} \cos\left(\frac{\xi}{l} \tau_{nk}\right)}{(\alpha l)^2 h'(\tau_{nk})} = \frac{2\tau_{nk} \cos\left(\frac{\xi}{l} \tau_{nk}\right)}{(\alpha l)^2 (\sin \tau_{nk} + \tau_{nk} \cos \tau_{nk})},$$

$$C_{Snk} = \frac{2 \sin\left(\frac{\xi}{l} \tau_{nk}\right)}{\alpha l \sqrt{\theta} h'(\tau_{nk})} = \frac{2 \sin\left(\frac{\xi}{l} \tau_{nk}\right)}{\alpha l \sqrt{\theta}} \frac{\tau_{nk}}{\beta + s_{nk} \tau_{nk} \sqrt{\tau_{nk}^2 - \beta^2}};$$

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Оценим норму каждой такой функции в пространстве $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$:

$$(П5.2) \quad \left\| \varphi_{J_n}(\xi, \bullet) \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)} \leq \sum_{k=1}^2 \left| \frac{C_{Jnk}}{P_{nk}} \right|.$$

Из (3.3) и (3.4) при $n \geq N_\beta + 1$ с учётом соотношений $h'(\tau_{n1}) > 0$, $h'(\tau_{n2}) < 0$, $\beta < \bar{h}_{N_\beta} < \bar{\tau}_{N_\beta} < \pi(2N_\beta - 1) \leq \pi(2n - 3)$ получаем:

$$(П5.3) \quad \left\| \varphi_{H_n}(\xi, \bullet) \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)} \leq 2s_n < \frac{1}{\pi^2 [(n-1)^2 - a_{N_\beta}^2]},$$

$$(П5.4) \quad \left\| \varphi_{S_n}(\xi, \bullet) \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)} \leq \frac{2}{\tau_{n1}} \frac{\alpha l}{\sqrt{\theta}} s_n \mu \left(\frac{\xi}{l} \tau_{n2} \right) < \\ < \frac{\alpha l}{[(n-1)^2 - a_{N_\beta}^2] \sqrt{\theta}} \min \left(\frac{1}{2\pi(n-1)}, \frac{\xi}{l} \left(1 + \frac{1}{2N_\beta} \right) \right).$$

Здесь $s_n = \frac{1}{\tau_{n1} \sqrt{\tau_{n1}^2 - \beta^2} + \beta} + \frac{1}{\tau_{n2} \sqrt{\tau_{n2}^2 - \beta^2} - \beta},$

$$a_{N_\beta} = \beta \sqrt{4\pi^2 N_\beta^2 + 1} / (4\pi^2 N_\beta), \quad \mu(x) = \min(1, x).$$

Из (П5.3) и (П5.4) видно, что ряды

$$\sum_{n=N_\beta+1}^{\infty} \varphi_{J_n}(\xi, \bullet)$$

сходятся в пространстве $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$ и что их суммы оцениваются по норме этого пространства следующим образом:

$$(П5.5) \quad \left\| \sum_{n=N_\beta+1}^{\infty} \varphi_{Hn}(\xi, \bullet) \right\|_{L^1(\mathbf{R}^+)} < \frac{\Phi_H}{\pi^2};$$

$$(П5.6) \quad \left\| \sum_{n=N_\beta+1}^{\infty} \varphi_{Sn}(\xi, \bullet) \right\|_{L^1(\mathbf{R}^+)} < \frac{\alpha l}{\pi^2 \sqrt{\theta}} \min \left(\frac{\Phi_S}{2\pi}, \frac{\xi}{l} \left(1 + \frac{1}{2N_\beta} \right) \Phi_H \right).$$

Здесь

$$\Phi_H = \frac{1}{N_\beta^2 - a_{N_\beta}^2} + \int_{N_\beta}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - a_{N_\beta}^2} = \frac{1}{N_\beta^2 - a_{N_\beta}^2} + \frac{1}{2a_{N_\beta}} \ln \frac{a_{N_\beta} + N_\beta}{a_{N_\beta} - N_\beta},$$

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \frac{1}{N_\beta(N_\beta^2 - a_{N_\beta}^2)} + \int_{N_\beta}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2 - a_{N_\beta}^2)} = \\ &= \frac{1}{N_\beta(N_\beta^2 - a_{N_\beta}^2)} + \frac{1}{a_{N_\beta}^2} \ln \frac{N_\beta}{\sqrt{N_\beta^2 - a_{N_\beta}^2}}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

П6. Доказательство теоремы 4.

$$\|W_{JN_\beta}\| = \int_0^{\infty} |\varphi_{JN_\beta}| dt = \int_0^{\infty} \left| \sum_{k=1,2} C_{JN_\beta k} e^{\frac{\tau_{N_\beta k}^2 t}{(\alpha l)^2}} \right| dt, \quad J = H, S;$$

поэтому в тех случаях, когда $C_{JN_\beta 1} C_{JN_\beta 2} \geq 0$ или $C_{JN_\beta 1} C_{JN_\beta 2} < 0$, но $|C_{JN_\beta 2}| \leq |C_{JN_\beta 1}|$, т. е. когда функция $\varphi_{JN_\beta} \neq 0$ при $t > 0$,

$$\|W_{JN_\beta}\| = (\alpha l)^2 \left| \sum_{k=1,2} C_{JN_\beta k} / \tau_{N_\beta k}^2 \right|.$$

При $C_{JN_{\beta 2}}/C_{JN_{\beta 1}} \in (-\infty, -1)$ функция $\varphi_{JN_{\beta}}(t)$ меняет знак в точке

$$t_{0,J} = \frac{(\alpha l)^2}{\tau_{N_{\beta 2}}^2 - \tau_{N_{\beta 1}}^2} \ln \left| \frac{C_{JN_{\beta 2}}}{C_{JN_{\beta 1}}} \right|.$$

В этом случае норма оператора равна

$$\begin{aligned} \|W_{JN_{\beta}}\| &= \left| \sum_{k=1,2} \int_0^{t_{0,J}} C_{JN_{\beta k}} e^{-\frac{\tau_{N_{\beta k}}^2 t}{(\alpha l)^2}} dt \right| + \left| \sum_{k=1,2} \int_{t_{0,J}}^{\infty} C_{JN_{\beta k}} e^{-\frac{\tau_{N_{\beta k}}^2 t}{(\alpha l)^2}} dt \right| = \\ &= (\alpha l)^2 \left| \sum_{k=1}^2 \frac{C_{JN_{\beta k}}}{\tau_{N_{\beta k}}^2} \left(1 - 2 \exp \left(\frac{-\tau_{N_{\beta k}}^2}{\tau_{N_{\beta 2}}^2 - \tau_{N_{\beta 1}}^2} \ln \left| \frac{C_{JN_{\beta 2}}}{C_{JN_{\beta 1}}} \right| \right) \right) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^2 \frac{(\alpha l)^2 C_{JN_{\beta k}}}{\tau_{N_{\beta k}}^2} \left(1 - 2 \left| \frac{C_{JN_{\beta 1}}}{C_{JN_{\beta 2}}} \right|^{\frac{\tau_{N_{\beta k}}^2}{\tau_{N_{\beta 2}}^2 - \tau_{N_{\beta 1}}^2}} \right) \right|. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

П7. Доказательство теоремы 5.

Импульсная переходная функция оператора \underline{W}_J^* равна

$$(П7.1) \quad w_J^*(\xi, t) = s(t) \varphi(\xi, t),$$

где $\varphi(t) = (C_{J1}^* + C_{J2}^* t) \exp(p^* t)$, $J = H, S$ (см. раздел 3). При $C_{J1}^* C_{J2}^* \geq 0$ функция $\varphi(t)$ сохраняет знак при $t > 0$, и норма оператора в пространстве \mathbf{B} равна:

$$\| \underline{W}_J^* \|_{\mathbf{B}} = \left| \int_0^{\infty} \varphi(\xi, t) dt \right| = |a_{J1}|,$$

Если же $C_{J1}^* C_{J2}^* < 0$, то $\varphi(t_{0J}) = 0$ при $t_{0J} = -C_{J1}^* / C_{J2}^*$ и

$$\| \underline{W}_J^* \|_{\mathbf{B}} = \left| \int_0^{t_0} \varphi(\xi, t) dt - \int_{t_0}^{\infty} \varphi(\xi, t) dt \right| = |-a_{J1} + 2a_{J2} \exp b_J|,$$

где $b_J = t_{0J} p^* = -p^* C_{J1}^* / C_{J2}^*$,

$$a_{J1} = \frac{C_{J1}^*}{p^*} - \frac{C_{J2}^*}{(p^*)^2}, \quad a_{J2} = \left[\frac{C_{J1}^*}{p^*} + C_{J2}^* \left(\frac{t_{0J}}{p^*} - \frac{1}{(p^*)^2} \right) \right] = -\frac{C_{J2}^*}{(p^*)^2}.$$

Используя выражения (3.5)-(3.8) для C_{Jk}^* ($k=1,2$), приходим к формулам (6.1) теоремы 5. Теорема 5 доказана.

П8. Доказательство теоремы 6.

Импульсная переходная функция оператора \underline{W}_{Jkn} имеет вид

$$(П8.1) \quad w(\underline{W}_{Jkn})(t) = s(t) \left(C_{Jn}^0 \exp(p_n^0 t) + \overline{C_{Jn}^0} \exp(\overline{p_n^0} t) \right) =$$

$$2|C_{Jn}^0| s(t) \exp(-\mu_n t) \cos(\omega_n t + \tilde{\varphi}_{Jn}),$$

$$\text{где } p_n^0 = \left(\frac{\zeta_n^0}{\alpha l} \right)^2, \quad \zeta_n^0 = \sigma_n^0 + i\tau_n^0, \quad \vartheta_n = (\tau_n^0)^2 - (\sigma_n^0)^2, \quad \mu_n = \frac{\vartheta_n}{(\alpha l)^2},$$

$$\tilde{\varphi}_{Jn} = \varphi_{Jn} + \alpha\pi, \quad \varphi_{Jn} = \arctg(\text{Im} C_{Jn}^0 / \text{Re} C_{Jn}^0),$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } \operatorname{Re} C_{J_n}^0 > 0, \\ 1 & \text{при } \operatorname{Re} C_{J_n}^0 < 0. \end{cases}, \quad \omega_n = 2 \frac{\sigma_n^0 \tau_n^0}{(\alpha d)^2}.$$

Норма функции $\psi_{J_n}(t) = s(t) \exp(-\mu_n) \cos(\omega_n t + \varphi_{J_n})$ в пространстве $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)$ вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{(П8.2)} \quad \|\psi_{J_n}\|_{\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)} &= \int_0^{\infty} \exp(-\mu_n t) |\cos(\omega_n t + \varphi_{J_n})| dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi/\omega}^{(k+1)\pi/\omega} \exp(-\mu_n t) |\cos(\omega_n t + \varphi_{J_n})| dt = \\ &= r_n \left| \int_0^{t_{J_n}} e^{-\mu_n t} \cos(\omega_n t + \varphi_{J_n}) dt - \int_{t_{J_n}}^{\pi/\omega_n} e^{-\mu_n t} \cos(\omega_n t + \varphi_{J_n}) dt \right| = \frac{N_{J_n}}{|p_n^0|}, \end{aligned}$$

$$\text{где } N_{J_n} = \left| \sin(\gamma_n - \varphi_{J_n}) + 2r_n \cos \gamma_n \exp(-v_n((\pi/2) - \varphi_{J_n})) \right|,$$

$$\gamma_n = \arctg v_n, \quad v_n = \frac{\mathcal{G}_n}{2\sigma_n^0 \tau_n^0}, \quad r_n = \frac{1}{1 - \exp(-v_n \pi)}, \quad t_{J_n} = \frac{(\pi/2) - \varphi_{J_n}}{\omega_n}.$$

Используя выражения (3.9) и (3.10) для $C_{J_n}^0$, получаем:

$$\text{(П8.3)} \quad \|\underline{W}_{J_{kn}}\|_{\mathbf{B}} = \left\| w(\underline{W}_{J_{kn}}) \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)} = 2N_{J_n} \left| \frac{C_{J_n}^0}{p_n^0} \right| = 4N_{J_n} \left| \frac{J_{\xi}(p_n^0)}{\zeta_n^0 \hat{P}'(\zeta_n^0)} \right|,$$

$$\text{где } \hat{P}'(\zeta_n^0) = \zeta_n^0 \operatorname{ch} \zeta_n^0 + \operatorname{sh} \zeta_n^0.$$

На основании (П8.3) получаем выражения (7.1) и (7.2) для норм операторов $\underline{W}_{J_{kn}}$ (в пространстве \mathbf{B}). Теорема 6 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Таблицы и графики

Замечание. Значения $m_{Jn} = a_{J1} + a_{J2} \exp b_J$ для $\beta = \bar{h}_n$ вычислены по формулам (6.1) при $\xi = l$ ($J=H,S$). При $\beta \rightarrow \bar{h}_n$ (при $\sigma_n^0 \rightarrow 0$) значения импульсной переходной функции оператора \underline{W}_{Jkn} (П8.1) стремятся к значениям импульсной переходной функции (П7.1) оператора \underline{W}_J^* , а $\|\underline{W}_{Jkn}\|_{\mathbf{B}}$ стремится к $\|\underline{W}_J^*\|_{\mathbf{B}}$.

Таблица 1. Зависимость параметров m_{H1} и m_{S1} от β

β	σ_1^0	τ_1^0	M_{H1}	m_{H1}	M_{S1}	m_{S1}
2.0	0.3612	2.0429	0.8466	0.4958	0.6985	0.6734
3.0	0.878	2.1048	0.4821	0.5389	0.4954	0.6519
4.0	1.147	2.1492	0.3932	0.5967	0.2797	0.4599
5.0	1.337	2.1836	0.3564	0.6642	0.2050	0.4002
6.0	1.489	2.2114	0.3404	0.7444	0.1698	0.3822
7.0	1.615	2.2346	0.3365	0.8385	0.1516	0.3850
8.0	1.723	2.2543	0.3416	0.9510	0.1424	0.4017
9.0	1.818	2.2715	0.3548	1.0884	0.1392	0.4306
10.0	1.902	2.2867	0.3766	1.2577	0.1405	0.4722
11.0	1.978	2.3002	0.4092	1.4758	0.1464	0.5303
12.0	2.048	2.3123	0.4576	1.7715	0.1579	0.6130
13.0	2.113	2.3233	0.5312	2.1956	0.1775	0.7351
14.0	2.172	2.3334	0.6443	2.8256	0.2094	0.9195
15.0	2.2275	2.3426	0.8448	3.9176	0.2678	1.2426
16.0	2.279	2.3512	1.2658	6.1813	0.3923	1.9162
17.0	2.328	2.3591	2.7711	14.2136	0.8413	4.3145
17.5	2.3515	2.3628	7.4155	38.9427	2.2295	11.7052
17.6	2.356	2.3635	11.1129	58.6233	3.3349	17.5877
17.7	2.3605	2.3643	21.8156	115.6028	6.5346	34.6175
17.79	2.3649	2.365	824.6516	4.3892 e+003	246.571 0	1.3120 e+003

Таблица 2. Зависимость параметров m_{H2} и m_{S2} от β

β	σ_2^0	τ_2^0	M_{H2}	m_{H2}	M_{S2}	m_{S2}
7.9996	0.1400	7.9795	0.3519	0.0662	0.0052	0.0052
9.0051	0.5100	7.9890	0.1357	0.0745	0.0048	0.0054
9.9967	0.7000	7.9976	0.0954	0.0736	0.0045	0.0056
11.0011	0.8400	8.0059	0.0757	0.0722	0.0042	0.0058
12.0030	0.9600	8.0134	0.0628	0.0707	0.0180	0.0269
12.9975	1.0600	8.0205	0.0542	0.0694	0.0155	0.0249
14.0023	1.1500	8.0272	0.0476	0.0681	0.0135	0.0234
15.0006	1.2300	8.0335	0.0426	0.0670	0.0120	0.0223
16.0006	1.3000	8.0397	0.0386	0.0660	0.0109	0.0214
16.9395	1.3600	8.0453	0.0356	0.0651	0.0100	0.0207
17.5003	1.4000	8.0480	0.0337	0.0646	0.0095	0.0203
17.7467	1.4200	8.0489	0.0329	0.0643	0.0092	0.0201

Таблица 3. Зависимость параметров m_{H3} и m_{S3} от β

β	σ_3^0	τ_3^0	M_{H3}	m_{H3}	M_{S3}	m_{S3}
14.4074	0.1800	14.2082	0.1271	0.0247	5.3104 e-004	5.3835 e-004
15.0078	14.2101	14.2101	0.0744	0.0263	5.2169 e-004	5.5082 e-004
15.9697	0.5000	14.213	0.0508	0.0268	5.0659 e-004	5.6995 e-004
17.0086	0.6200	14.2161	0.0403	0.0268	4.8801 e-004	5.8359 e-004
17.7981	0.7000	14.2183	0.0350	0.0267	4.7620 e-004	5.9646 e-004

Таблица 4. Значения m_{Hn} и m_{Sn} для $\beta = \bar{h}_n$ ($\zeta_n^0 = i\tau_n^*$)

n	$\beta = \bar{h}_1$	σ_1^0	$\tau_1^0 = \bar{\tau}_1$	m_{H1}	m_{S1}
1	1.8196	0	2.0287	0.4855	0.5481
2	7.9171	0	7.979	0.0593	0.0035
3	14.1719	0	14.207	0.0195	3.5585e-004

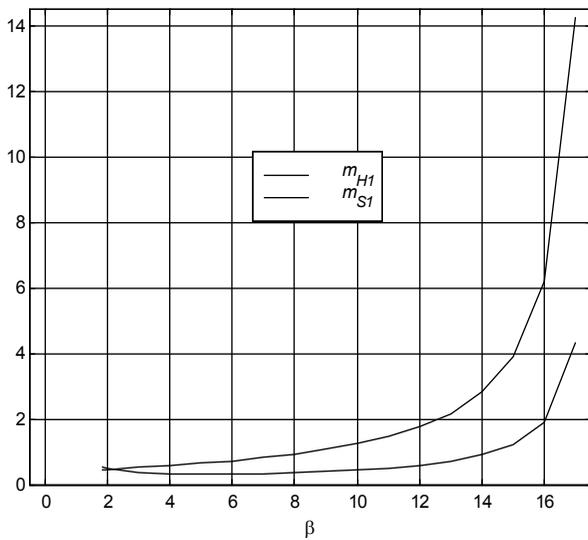


Рис. 1. Зависимость m_{H1} и m_{S1} от β

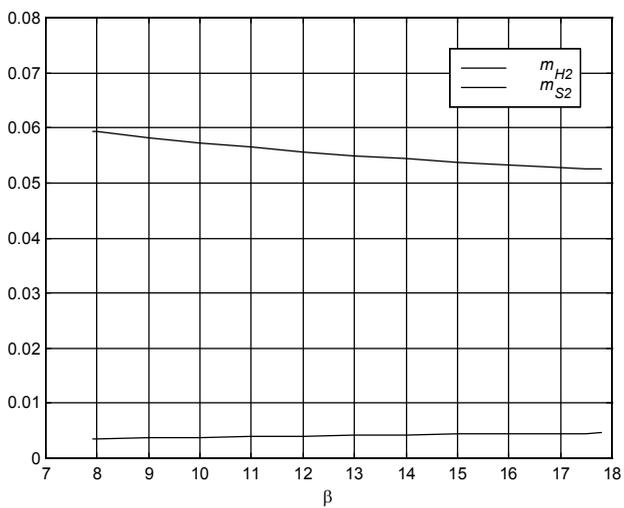


Рис. 2. Зависимость m_{H2} и m_{S2} от β

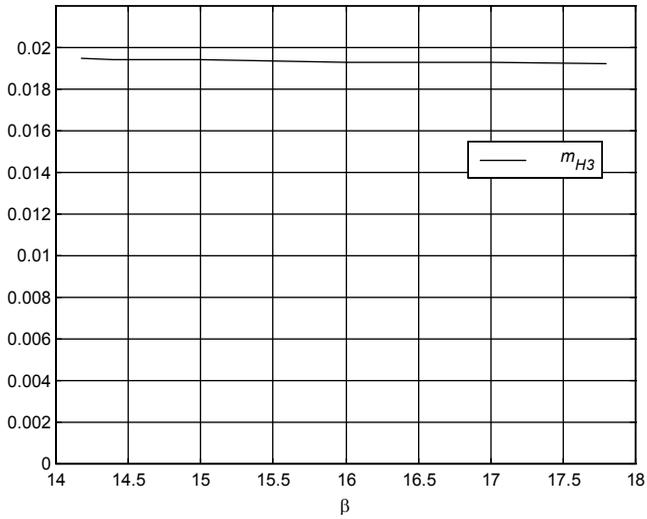


Рис. 3. Зависимость m_{H3} от β

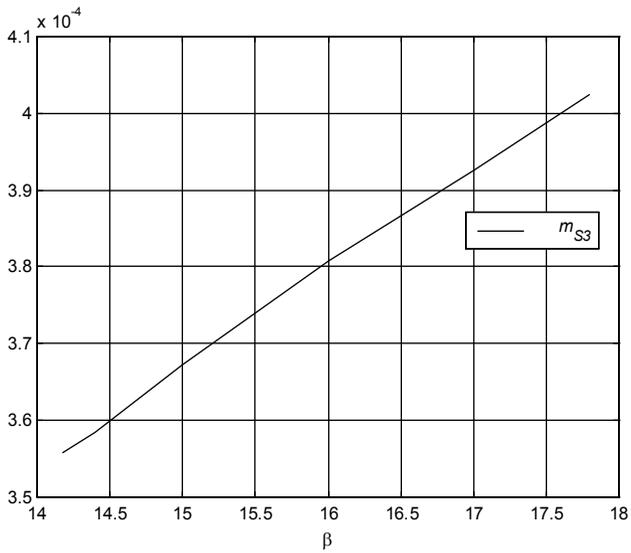


Рис. 4. Зависимость m_{S3} от β

Список литературы

1. СОЛНЕЧНЫЙ Э. М. *Исследование условий причинности и устойчивости системы управления линейным распределённым объектом.* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 4. – С. 53–85.
2. СОЛНЕЧНЫЙ Э. М. *О причинности системы теплопроводности с нелинейной обратной связью по граничным условиям.* // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 9. – С. 15–26.
3. ЛАВРЕНТЬЕВ М. А., ШАБАТ Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* М., Физматгиз, 1958.