ОЦЕНКА ВЕКТОРА ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИОРИТЕТА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ СВЕРТКИ КРИТЕРИЕВ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

Сигал А. В.[2], Ремесник Е. С.[3]
(*Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского, Симферополь*)

Статья посвящена проблеме оценки значений весовых коэффициентов приоритета в случае решения задачи многокритериальной оптимизации на основе оптимизации линейной функции свертки критериев, т. е. скалярного критерия оптимальности, представляющего собой аддитивную функцию полезности лица, принимающего решения (ЛПР). В качестве оценки вектора весовых коэффициентов предлагается использовать последовательности Фишберна. Одним из важнейших свойств последовательностей Фишберна является то, что они всегда удовлетворяют простому линейному отношению порядка, а при определенных условиях и частично усиленному линейному отношению порядка. Введенное в статье понятие последовательностей Фишберна второго порядка позволяет построить оценку вектора весовых коэффициентов в случае смешанной системы предпочтений, когда с точки зрения ЛПР значимость частных критериев характеризуют, как отношения строгого предпочтения, так и отношения безразличия. Разработанный метод оценки вектора весовых коэффициентов позволяет построить функцию свертки критериев, полностью отражающую предпочтения ЛПР, принять управленческое решение, учитывающее риск и неопределенность.

Ключевые слова: вектор весовых коэффициентов, свертка критериев, последовательность Фишберна, линейное отношение порядка, смешанная система предпочтений, принятие решений.

1. Введение

Принятие управленческих решений в экономике представляет собой, как правило, многокритериальную многоцелевую задачу оптимизации. Например, выбирая банк для размещения своих денежных ресурсов, в качестве частных критериев выбора

---

[1] *Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ № 18-010-00688.*

[2] *Анатолий Викторович Сигал, д.э.н., профессор* (*ksavo3@gmail.com*).
[3] *Елена Сергеевна Ремесник, ассистент* (*es2704@mail.ru*).

наилучшего банка предприниматель может использовать следующие показатели: величина процентной ставки, капитал банка, его имидж, ликвидность и т. д. и т. п. Подчеркнем, что многокритериальные задачи – это задачи, отягощенные неопределенностью, конфликтностью и порожденным ими риском. Кроме того, как правило, часть информации, необходимая для исчерпывающего и однозначного определения требований к решению, принципиально отсутствует на момент принятия этого решения.

Пусть лицом, принимающим решения (ЛПР), избраны определенные цели развития экономической системы, альтернативные стратегии (решения), реализация которых позволит достичь поставленных целей, а также ряд критериев оценки этих стратегий (в качестве критериев могут использоваться различные экономические показатели). В современной науке о принятии решений центральное место занимают многокритериальные задачи выбора. Считается, что учет многих критериев приближает постановку задачи к реальной жизни.

При выборе стратегии, которую необходимо реализовывать, ЛПР должно оценивать возможные стратегии с позиций несовпадающих и, зачастую, даже противоречивых критериев. При этом оптимальные значения этих критериев достигаются на разных элементах (стратегиях) из множества возможных стратегий. Это указывает на то, что выбор любой стратегии из этого множества, скорее всего, одновременно не обеспечит оптимум всем частным (локальным) критериям. Поэтому перед ЛПР встает вопрос: согласно какому принципу следует осуществлять выбор рациональной стратегии, «наилучшей» с позиции всех критериев качества. Выход состоит в том, чтобы обратиться к определенной схеме компромисса критериев для достижения поставленной цели и придерживаться его в выборе рациональной (компромиссной) стратегии.

При решении многокритериальных задач возникает ряд специфических проблем, часть из которых имеет концептуальный характер, а другая часть – формальный (т. е. связанный со способами вычислений) характер. Из концептуальных проблем основная – это выбор принципа оптимальности, который определяет свойства оптимальной стратегии и дает ответ на основной вопрос – в каком аспекте оптимальная стратегия лучше других стратегий (имеет над ними преимущество).

Итальянский социолог экономист, один из лидеров лозаннской школы маржинализма Вильфредо Федерико Парето (1848–1923) предложил критерий оптимальности распределения ресурсов, который называется «Парето-оптимумом» или «оптимумом по Парето». Исследованию оптимальных (эффективных) по Парето решений задач многокритериальной оптимизации, различных аспектов принятия многокритериальных решений посвящена обширная литература, в том числе монографии П. И. Верченко [2], М. Интрилигатора [3], Р. Л. Кини, Х. Райфы [4], О. И. Ларичева [5], А. В. Лотова, И. И. Поспеловой [6], В. Д. Ногина [9], В. В. Подиновского, В. Д. Ногина [10], Р. Штойера [20].

Для поиска оптимальных по Парето решений задачи многокритериальной оптимизации ее приводят к задаче однокритериальной оптимизации, например, к оптимизации аддитивной функции полезности, представляющей собой некоторую свертку (выпуклую линейную комбинацию) всех критериев. Следует учитывать, что использование аддитивных функций полезности обладает как достоинствами (например, простота и удобство применения), так и некоторыми недостатками (см., например, [6, с. 92–93]).

С точки зрения ЛПР рассматриваемые объекты (в задачах многокритериальной оптимизации такими объектами являются частные критерии) имеют разную приоритетность (разную степень важности) в процессе определения оптимального решения задачи многокритериальной оптимизации. От качества решения задачи многокритериальной оптимизации существенным образом зависит качество принятия управленческого решения, реализация которого определяет эффективность функционирования экономической системы. Наиболее распространенными моделями отображения приоритетности объектов являются следующие три:

- *ряд приоритета* (**RI**);
- *ряд бинарных отношений приоритета* (**RV**);

- *вектор весовых коэффициентов приоритета* (**U**).

Целью статьи является разработка метода оценки вектора весовых коэффициентов с использованием последовательностей Фишберна [15, с. 132], при этом особое внимание уделено оценке вектора весовых коэффициентов в случае смешанной системы предпочтений, когда с точки зрения ЛПР значимость частных критериев характеризуют, как отношения строгого предпочтения, так и отношения безразличия. В первой части работы излагаются основные способы отображения приоритета, а вторая часть посвящена последовательностям Фишберна и их наиболее важным частным случаям. Заключительная часть статьи содержит описание предлагаемого метода оценки вектора весовых коэффициентов.

2. Способы отображения приоритета и формулы Фишберна

Пусть для рассматриваемых однородных объектов O_1, $O_2,\ldots, O_i,\ldots, O_k$, в качестве которых могут рассматриваться частные критерии задачи многокритериальной оптимизации, требуется качественно отобразить их приоритетность. На основе отношения нестрогого предпочтения «$O_i \preceq O_j$» («объект O_j не хуже объекта O_i») согласно субъективным представлениям ЛПР строится совокупность отношений нестрогого предпочтения:

$$O_{i_1} \preceq O_{i_2} \preceq \ldots \preceq O_{i_k}.$$

Полученная совокупность нестрогих предпочтений означает, что построен следующий ряд приоритета:

$$(1)\quad \mathbf{RI} = \left(O_{i_1}; O_{i_2}; \ldots; O_{i_k}\right),$$

где O_{i_1} – объект с наименьшим приоритетом,…, O_{i_k} – объект с наибольшим приоритетом среди всех рассматриваемых однородных объектов.

Без ограничения общности можно считать, что ряд приоритета имеет вид

$$(2)\quad \mathbf{RI} = \left(O_1; O_2; \ldots; O_k\right).$$

Действительно, если ряд приоритета (1) имеет другой вид, то за счет перенумерации однородных объектов ряд приоритета может быть приведен к виду (2). Итак, пусть ряд приоритета для рассматриваемых однородных объектов имеет вид (2), тогда при наличии (небольшой по объему) дополнительной информации об исследуемых объектах ЛПР может осуществить количественное уточнение ряда (2) в виде:

(3) $\mathbf{RV} = \left(v_1; v_2; ...; v_k\right)$,

где v_i – числовая оценка результата попарного сравнения приоритетности исследуемых объектов (точнее, того, во сколько раз объект O_i приоритетнее объекта O_{i-1}). Очевидно, что любая компонента вектора **RV**, упорядоченного в соответствии с рядом приоритета **RI** (2), удовлетворяет условию:

$$v_i \geq 1,\ i = 1,\ldots, k.$$

Если объекты O_{i-1} и O_i равнозначны ($O_{i-1} \sim O_i$), то соответствующая компонента равна единице: $v_i = 1$. Для удобства принято считать справедливым равенство $v_1 = 1$.

Значения компонент u_i, $i = 1,\ldots, k$, вектора весовых коэффициентов (для рассматриваемых однородных объектов)

(4) $\mathbf{U} = \left(u_1; u_2; ...; u_k\right)$

обязаны удовлетворять следующим ограничениям:
условию нормировки

(5) $\sum_{i=1}^{k} u_i = 1$,

и требованиям неотрицательности всех компонент

(6) $u_i \geq 0,\ i = 1,\ldots, k.$

Компонента u_i – это, в сущности, весовой коэффициент, определяющий относительное преимущество объекта O_i над остальными однородными объектами. С учетом справедливости предположения о том, что ряд приоритета **RI** имеет вид (2), для компонент вектора (4) имеют место соотношения

(7) $u_i \leq u_{i+1},\ i = 1,\ldots, k-1.$

Кроме того, для компонент векторов **RV** и **U** справедливы равенства

$$v_1 = 1,\ v_i = \frac{u_i}{u_{i-1}},\ i = 2,\ldots,k,\ u_i = \frac{\prod_{l=1}^{i} v_l}{\sum_{j=1}^{k}\prod_{l=1}^{j} v_l},\ i = 1,\ldots,k.$$

Если для рассматриваемых однородных объектов ряд приоритета **RI** имеет вид (2) и имеют место строгие соотношения приоритетности «$O_{i-1} \prec O_i$» («O_i лучше O_{i-1}»), т. е. справедлива совокупность отношений строгого предпочтения $O_1 \prec O_2 \prec \ldots \prec O_k$, то оценки значений компонент вектора весовых коэффициентов приоритета можно вычислить согласно так называемой первой формуле Фишберна:

$$(8)\quad u_i = \frac{2 \cdot i}{k \cdot (k+1)},\ i = 1,\ldots,k.$$

Если ЛПР на основе имеющейся у него информации может утверждать, что произвольный объект O_i не хуже совокупности всех однородных объектов, которые в ряде приоритета (2) находятся перед ним, т. е. справедлива совокупность отношений нестрогого предпочтения $O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_{i-1} \preceq O_i$, $i = 2,\ldots,k$, что будем кратко обозначать как совокупность $O_1 \underline{\prec\prec} O_2 \underline{\prec\prec} \ldots \underline{\prec\prec} O_k$, где $\underline{\prec\prec}$ – это символ отношения строгого предпочтения, которое будем называть «много лучше», то оценки значений компонент вектора весовых коэффициентов приоритета можно вычислить согласно так называемой второй формуле Фишберна:

$$(9)\quad u_i = \frac{2^{i-1}}{2^k - 1},\ i = 1,\ldots,k.$$

3. Линейные отношения порядка и последовательности Фишберна

Рассмотрим случай, когда на компонентах вектора весовых коэффициентов приоритета задано то или иное линейное отношение порядка. Эти отношения порядка были подробно изучены П. Фишберном [21, 22, 23] и приведены, например, в монографии Р.И. Трухаева [17, с. 77–80]. Эти формулы, а также их обобщения можно применять для вычисления не только оценок компонент вектора весовых коэффициентов приоритета, но и для вычисления, например, значений компонент вектора, характеризующего априорное распределение вероятностей возможных состояний фондового рынка, что позволяет приводить обобщенные модели Марковица задачи поиска эффективного портфеля, заданные в поле различных информационных ситуаций, к классической модели Марковица задачи поиска эффективного портфеля (см., например, [15]).

Итак, пусть на основе вербальной (или статистической) информации на качественном уровне можно установить приоритетность (отношения порядка) на множестве однородных объектов $O_1, O_2, \ldots, O_i, \ldots, O_k$. Это означает, что для каждой пары однородных объектов можно указать, какое из них имеет больший приоритет (собственно, характеризуется бо́льшим значением весового коэффициента), или, что они являются эквивалентными (имеют одинаковые значения весовых коэффициентов). Кроме того, следует учитывать, что компоненты вектора весовых коэффициентов приоритета обязаны удовлетворять всем ограничениям (5) и (6).

Пусть $\mathbf{U} = (u_1; u_2; \ldots; u_k)$ – вектор (4) весовых коэффициентов приоритета, а ряд приоритета имеет вид (2) или аналогичный вид для случая убывания приоритетности $O_1 \succeq O_2 \succeq \ldots \succeq O_k$. Приведем определения наиболее распространенных типов линейных отношений порядка [17, с. 78].

Простым линейным отношением порядка (*простым ЛОП*) называют соотношения $u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_i \le \ldots \le u_k$ или $u_1 \ge u_2 \ge \ldots \ge u_i \ge \ldots \ge u_k$. *Частично усиленным ЛОП* называют соотношения $u_i \ge u_1 + \ldots + u_{i-1}$, $i = 2, \ldots, k$ или $u_i \ge u_{i+1} + \ldots + u_k$, $i = 2, \ldots, k$. *Усиленным* ЛОП называют соотношения $u_{i+1} + \ldots + u_{i+\alpha(i)} \le u_i \le u_{i+1} + \ldots + u_{i+\alpha(i)} + u_{i+\alpha(i)} + u_{i+\alpha(i)+1}$, $i = 1, \ldots, k-2$, $\alpha(i) \in \{1; 2; \ldots; k-1-i\}$ или $u_{i-\alpha(i)} + \ldots + u_{i-1} \le u_i \le u_{i-\alpha(i)-1} + u_{i-\alpha(i)} + \ldots + u_{i-1}$, $i = 3, \ldots, k$, $\alpha(i) \in \{1; 2; \ldots; i-2\}$, где $\alpha(i)$ – заданные натуральные числа, принимающие значения из указанных множеств. *Однородным ЛОП* называют соотношения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \le \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \le \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ –

заданные неотрицательные матрицы, *Полным ЛОП* называют соотношения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{a} \leq \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \leq \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{b}$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – заданные квадратные матрицы соответствующего порядка, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – заданные векторы-столбцы соответствующей размерности. Частным случаем полного ЛОП является *интервальное отношение порядка*, согласно которому справедливы соотношения $a_i \leq u_i \leq b_i$, $i = 1,\dots, k$, где a_i, b_i – заданные числа такие, что $0 < a_i < b_i$, $i = 1,\dots, k$.

Р.И. Трухаев приводит основные формулы для вычисления точечных оценок компонент вектора весовых коэффициентов приоритета в поле третьей информационной ситуации, т. е. для приведенных выше отношений порядка [17, с. 84–85]. Эти оценки значений компонент вектора весовых коэффициентов приоритета в монографии Р.И. Трухаева названы точечными оценками Фишберна, точнее точечными оценками Фишборна. Дело в том, что Р.И. Трухаев применял написание фамилии Питера Фишберна через букву «о»: Фишборн. Однако, начиная с 1978 года, когда в СССР был издан перевод [19] на русский язык монографии [24] этого автора, в русскоязычной литературе принято написание этой фамилии через букву «е»: Фишберн. Формулы Фишберна позволяют простым и естественным способом вычислить оценки значений компонент вектора весовых коэффициентов, если для компонент этого вектора задано то или иное отношение порядка. Р.И. Трухаев отмечает, что «Фишборн основывал свои оценки неконструктивным способом на основе аксиом теории аддитивной полезности» [17, с. 85].

Пусть истинные значения компонент вектора (4) весовых коэффициентов приоритета неизвестны. Для случая простого ЛОП П. Фишберн предложил считать, что оценки неизвестных значений компонент вектора (4) образуют арифметическую прогрессию, а для случая частично усиленного ЛОП – монотонную геометрическую прогрессию. Если соответствующие последовательности представляют собой убывающие прогрессии, то формулы

(10) $u_i = \dfrac{2 \cdot (k - i + 1)}{k \cdot (k + 1)}$, $i = 1,\dots, k$,

$$(11)\quad u_i = \frac{2^{k-i}}{2^k - 1},\ i = 1,\ldots, k,$$

и принято называть [17, с. 84] первой и второй формулой Фишберна.

Прогрессиями Фишберна будем называть последовательности (10), (11): *арифметическими прогрессиями Фишберна* – последовательности (10), *геометрическими прогрессиями Фишберна* – последовательности (11).

Приведем примеры прогрессий Фишберна (таблицы 1 и 2).

Таблица 1. Значения точечных оценок, найденных по первой формуле Фишберна

k \ i	1	2	3	4	5
1	1	–	–	–	–
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	–	–	–
3	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	–	–
4	0,4	0,3	0,2	0,1	–
5	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

Таблица 2. Значения точечных оценок, найденных по второй формуле Фишберна

k \ i	1	2	3	4	5
1	1	–	–	–	–
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	–	–	–

k \ i	1	2	3	4	5
3	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	–	–
4	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	–
5	$\frac{16}{31}$	$\frac{8}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{31}$

Если последовательности возрастают, то формулы Фишберна принимают вид формул (8) и (9), соответственно.

В экономических исследованиях принято считать, что формула (10) отражает тот факт, что об уровне значимости объектов (например, частных критериев) неизвестно ничего, кроме того, что они расположены в порядке убывания уровня значимости. Формула (11) отражает тот факт, что уровень значимости очередного объекта не меньше совокупного (суммарного) уровня значимости всех последующих объектов, вместе взятых. Аналогично можно интерпретировать формулы (8) и (9). Заметим, в определенных ситуациях применение формул (8) и (9) предпочтительнее применения формул (10) и (11), соответственно. Например, при исследовании динамических рядов, когда натуральные значения индекса i задают дискретные моменты времени, строго возрастающие последовательности отражают тот факт, что более поздние моменты времени оказывают бóльшее влияние, чем более ранние моменты времени.

В экономических исследованиях часто применяют прогрессии Фишберна. Так, в работах И.Л. Макаровой [7], А.О. Недосекина [8], Д.К. Потапова, В.В. Евстафьевой [11], А.Е. Сазонова, Г.С. Осипова, В.Д. Клименко [12], В.Л. Сомова, М.Н. Толмачева [16], Е.Б. Тютюкиной, Л.Д. Капрановой, Т.Н. Седаш [18] предлагается использование арифметических прогрессий Фишберна для самых разных целей. Эти и другие исследования свидетельствуют, что точечные оценки Фишберна представляют интерес для математического моделирования самых разных систем и ситуаций.

Формулы (8)–(11) несложно обобщить на случай монотонных прогрессий.

Обобщенными прогрессиями Фишберна будем называть прогрессии $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$, удовлетворяющие всем ограничениям (5) и (6): *обобщенными арифметическими прогрессиями Фишберна* – арифметические прогрессии, удовлетворяющие всем ограничениям (5) и (6), *обобщенными геометрическими прогрессиями Фишберна* – геометрические прогрессии, удовлетворяющие всем ограничениям (5) и (6).

Обобщенные арифметические прогрессии Фишберна представляют собой арифметические прогрессии вида

(12) $u_i = \dfrac{1}{k} - \dfrac{(k-1)\cdot x}{2} + (i-1)\cdot x = \dfrac{2 - k\cdot(k - 2\cdot i + 1)\cdot x}{2\cdot k}$,

$i = 1, \ldots, k$,

разность которой удовлетворяет неравенству

(13) $|x| \le \dfrac{2}{k\cdot(k-1)}$,

а обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна представляет собой геометрическую прогрессию вида

(14) $u_i = \dfrac{x-1}{x^k - 1}\cdot x^{i-1} = \dfrac{1-x}{1-x^k}\cdot x^{i-1}$, $i = 1, \ldots, k$,

знаменатель которой удовлетворяет неравенству

(15) $x > 0$.

Заметим, вырожденный случай, когда знаменатель геометрической прогрессии (14) равен единице ($x = 1$), требует отдельного рассмотрения. В этом случае для поиска значения первого члена геометрической прогрессии можно выполнить предельный переход, применяя правило Лопиталя:

$$u_1 = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^k - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)'}{(x^k - 1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{k\cdot x^{k-1}} = \frac{1}{k\cdot 1^{k-1}} = \frac{1}{k}.$$

Следовательно, если $x = 1$, то можно считать, что

(16) $u_i = \dfrac{1}{k} \equiv \text{const}$, $i = 1,\ldots, k$.

Основные свойства обобщенных прогрессий Фишберна приведены, например, в монографии [15, с. 114–127].

В случае оценки неизвестных значений вероятностей возможных состояний экономической среды по формулам (12)–(15) корректность принятия управленческих решений зависит от ответов на несколько существенных вопросов. Наиболее важными из этих вопросов являются следующие два вопроса.
1. Удовлетворяет ли рассматриваемая обобщенная прогрессия Фишберна соответствующему линейному отношению порядка?
2. Удовлетворяет ли рассматриваемая обобщенная прогрессия Фишберна принципу Гиббса–Джейнса?

Очевидно, среди всех обобщенных прогрессий Фишберна принципу Гиббса–Джейнса, согласно которому требуется, чтобы оценка закона распределения вероятностей максимизировала значение энтропии Шеннона, соответствует лишь частный случай, когда обобщенная прогрессия Фишберна вырождается в постоянную величину (16).

Если члены произвольной обобщенной арифметической прогрессии Фишберна всегда удовлетворяют соответствующему простому ЛОП, то члены произвольной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна не всегда удовлетворяют соответствующему частично усиленному ЛОП.

Теорема 1. Произвольная обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна $\{u_1; u_2;\ldots; u_k\}$ удовлетворяет соответствующему частично усиленному ЛОП тогда и только тогда, когда значение знаменателя геометрической прогрессии (14) удовлетворяет соотношениям $x \in \left(0; \alpha_k\right] \cup \left[\dfrac{1}{\alpha_k}; +\infty\right)$, где α_k – корень уравнения $x^k - 2\cdot x + 1 = 0$, удовлетворяющий соотношениям $0{,}5 < \alpha_k \le 1$. Последовательность $\left\{\alpha_k\right\}_{k=2}^{\infty}$ представляет собой строго убывающую ограниченную последовательность, предел которой равен $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha_k = 0{,}5$.

Формулировка теоремы 1 уточняет (для случая $k = 1$) соответствующий результат, приведенный в работе [13]. Заметим, что

$$\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_2 = 1, \qquad \alpha_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618034,$$

$$\alpha_4 = \frac{\sqrt[3]{17+3\cdot\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17-3\cdot\sqrt{33}} - 1}{3} \approx 0{,}543689, \; \alpha_5 \approx 0{,}518790.$$

Ответ на второй основной вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 2. Задача максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному ЛОП, имеет следующее единственное оптимальное решение: $x^* = \alpha_k \in (0{,}5;1]$. Задача максимизации энтропии Шеннона на множестве неубывающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному ЛОП, имеет следующее единственное оптимальное решение $x^* = \dfrac{1}{\alpha_k} = \beta_k \in [1;2)$. При достаточно больших натуральных значениях k геометрическая прогрессия Фишберна задает приблизительное решение задачи максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному ЛОП. Для геометрических прогрессий Фишберна справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{k\to+\infty} H(\hat{\mathbf{q}}) = \ln 4 \approx 1{,}386294$.

Формулировка теоремы 2 уточняет (для случая $k = 1$) соответствующий результат, приведенный в работе [14].

Рассмотрим метод построения произвольной последовательности, удовлетворяющей простому линейному отношению порядка и всем ограничениям (5) и (6) (см., например, [15, с. 132]). Пусть $\{a_1; a_2;\ldots; a_k\}$ – произвольная монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом, т. е. справедливы соотношения $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_i \le \ldots \le a_k$ или $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_i \ge \ldots \ge a_k$, при этом

$a_1 + a_2 + \ldots + a_k > 0$, тогда последовательность $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$, где

$$(17)\quad u_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{k} a_j},\ i = 1, \ldots, k.$$

Определение 1. Последовательностью Фишберна будем называть последовательность $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$, значения элементов которой вычисляются по формулам (17), в которых участвуют члены монотонной последовательности неотрицательных чисел $\{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$, сумма которых является положительным числом. При этом эту последовательность $\{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ будем называть *последовательностью, производящей последовательность Фишберна* $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$.

Очевидно, свойства последовательности Фишберна и последовательности, ее производящей, совпадают. В частности, последовательность Фишберна и последовательность, ее производящая, одновременно обладают одноименным свойством монотонности. Например, последовательность Фишберна является неубывающей (возрастающей) последовательностью тогда и только тогда, когда последовательность, ее производящая, является неубывающей (возрастающей, соответственно) последовательностью. Последовательность Фишберна и последовательность, ее производящая, одновременно могут представлять собой прогрессию (арифметическую или геометрическую, соответственно). Кроме того, любая последовательность Фишберна и любая последовательность, производящая последовательность Фишберна, всегда удовлетворяет простому ЛОП. Наконец, последовательность Фишберна удовлетворяет частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда последовательность, ее производящая, удовлетворяет частично усиленному линейному отношению порядка.

Следует учитывать, что монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом, однозначно определяет соответствующую последовательность Фишберна, а для любой последовательности Фишберна последовательность, ее порождающая, определена неоднозначно. Очевидно, справедлива следующая теорема (см., например, [15, с. 137]).

Теорема 3. Для любой последовательности Фишберна $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$ существует единственная с точностью до постоянного положительного множителя последовательность $\{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$, производящая последовательность Фишберна $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$, т. е. монотонная последовательность $\{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом, с использованием которой по формуле (17) можно построить последовательность Фишберна $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$.

Понятно, что и прогрессии Фишберна, и обобщенные прогрессии Фишберна – это частные случаи последовательностей Фишберна. Заметим, при решении задач многокритериальной оптимизации для построения свертки критериев достаточно ограничиваться рассмотрением обобщенных прогрессий Фишберна, обладающих желаемыми свойствами.

4. Оценка вектора весовых коэффициентов приоритета

Итак, последовательность Фишберна – это, по сути, строго монотонная последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию нормировки. Для построения последовательности Фишберна, обладающей желаемыми свойствами, ЛПР достаточно выбрать последовательность целых неотрицательных чисел, обладающую этими желаемыми свойствами и порождающую искомую последовательность Фишберна. Как показано в монографии [15, с. 163–193] последовательности Фишберна можно использовать в качестве оценки распределения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка), при этом в качестве последовательности, производящей последовательность Фишберна с желаемыми свойствами, ЛПР (инвестору) следует выбирать последовательность, обладающую желаемыми свойствами. В качестве таких последовательностей, производящих последовательности Фишберна с желаемыми свойствами, можно выбирать, например, арифметические и геометрические прогрессии, числа Фибоначчи, числа Мерсенна, числа Евклида, числа Ферма (см., например [15, с. 91–95]) и другие известные последовательности натуральных чисел.

Разумеется, последовательность Фишберна можно использовать и в качестве оценки вектора весовых коэффициентов приоритета. Если компоненты вектора (4) должны образовывать строго монотонную последовательность, то в качестве оценки вектора $\mathbf{U} = (u_1; u_2;\ldots; u_k)$ весовых коэффициентов приоритета целесообразно использовать соответствующую последовательность Фишберна $\{u_1; u_2;\ldots; u_k\}$, обладающую желаемыми свойствами. В частности, в этом случае удобно использовать обобщенные прогрессии Фишберна, причем, если требуется, чтобы компоненты вектора весовых коэффициентов приоритета удовлетворяли частично усиленному ЛОП, то следует использовать обобщенные геометрические прогрессии Фишберна, знаменатели которых удовлетворяют требованиям теоремы 1. Однако для компонент вектора весовых коэффициентов приоритета условие монотонности может нарушаться.

Рассмотрим смешанную систему предпочтений, когда ряд приоритета наряду с отношениями строгого предпочтения содержит и отношения безразличия. Например, если

$$\mathbf{RI} = \left(O_1; O_2;\ldots;\ \left[O_l; O_{l+1}\right];\ldots; O_k\right),$$

то здесь O_1 – объект с наименьшим приоритетом,…, O_k – объект с наибольшим приоритетом среди всех рассматриваемых однородных объектов, а квадратными скобками выделены два эквивалентных однородных объекта, т. е. справедлива совокупность отношений предпочтения $O_1 \prec O_2 \prec \ldots \prec O_l \sim O_{l+1} \prec \ldots \prec O_k$.

Очевидно, в случае построения оценки вектора весовых коэффициентов приоритета, когда имеет место смешанная система предпочтений, компоненты оценки вектора $\mathbf{U} = (u_1; u_2;\ldots; u_k)$ весовых коэффициентов приоритета не образуют строго возрастающую последовательность. Но и в этом случае для построения оценки вектора весовых коэффициентов приоритета возможно использование последовательностей Фишберна. Введем понятие последовательностей Фишберна второго порядка. Предварительно введем удобные обозначения.

Пусть $\{U_1; U_2;\ldots; U_K\}$ – монотонная последовательность, элементы которой принимают k различных значений, где k, K – заданные натуральные числа для которых справедливо соотношение $k \le K$. Тогда если эти k различных значений элементов последовательности $\{u_1; u_2;\ldots; u_k\}$ обозначить $u_1, u_2,\ldots, u_k$, то последовательность $\{U_1; U_2;\ldots; U_K\}$ удобно представить в виде таблицы 3, где n_i – частота элемента u_i, $i = 1,\ldots, k$, при этом таблицу 3 будем называть рядом распределения монотонной последовательности $\{U_1; U_2;\ldots; U_K\}$.

Таблица 3. Ряд распределения монотонной последовательности

u_i	u_1	u_2	$\ldots$	u_k	$\sum\limits_{i=1}^{k}$
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_k	K

Итак, элементы последовательности $\{u_1; u_2;\ldots; u_k\}$, расположенные в первой строке таблицы 3, упорядочены по возрастанию, т. е, $u_1 < u_2 <\ldots< u_i <\ldots< u_k$; n_i – это частота u_i, т. е. количество повторений числа u_i в исходной монотонной последовательности $\{U_1; U_2;\ldots; U_K\}$, поэтому $n_1, n_2,\ldots, n_k$ – это известные натуральные числа, для которых справедливо равенство $n_1 + n_2 +\ldots+ n_k = K$.

Определение 2. Последовательностью Фишберна второго порядка будем называть монотонную последовательность $\{U_1; U_2;\ldots; U_K\}$, заданную своим известным рядом распределения, при этом значения элементов этой последовательности вычисляются по формулам

$$(18)\quad \begin{cases} u_1 = \ldots = u_{n_1} = \dfrac{\hat{u}_1}{\sum\limits_{i=1}^{k} \hat{u}_i \cdot n_i}, \\ u_{n_1+1} = \ldots = u_{n_1+n_2} = \dfrac{\hat{u}_2}{\sum\limits_{i=1}^{k} \hat{u}_i \cdot n_i}, \\ \ldots \\ u_{\sum\limits_{j=1}^{k-1} n_j + 1} = \ldots = u_K = \dfrac{\hat{u}_k}{\sum\limits_{i=1}^{k} \hat{u}_i \cdot n_i}, \end{cases}.$$

где $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$ – заданная последовательность Фишберна, которую при этом будем называть *последовательностью Фишберна, производящей последовательность Фишберна второго порядка* $\{U_1; U_2; \ldots; U_K\}$.

Таким образом, последовательность Фишберна второго порядка – это, по сути, монотонная последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию нормировки. Последовательности Фишберна можно теперь интерпретировать как частный случай последовательностей Фишберна второго порядка, а именно, как последовательности Фишберна второго порядка, для которых все частоты равны единице, т. е. для ряда распределения которых справедливы равенства $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$ и $k = K$. Последовательность Фишберна второго порядка целесообразно использовать в качестве оценки вектора весовых коэффициентов приоритета, когда имеет место смешанная система предпочтений.

Рассмотрим конкретный пример построения оценки вектора весовых коэффициентов приоритета, когда имеет место смешанная система предпочтений вида $O_1 \prec O_2 \sim O_3 \sim O_4 \prec O_5 \prec O_6 \sim O_7$. Подставляя в формулы (18) значения элементов возрастающей последовательности Фишберна $\{0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4\}$, т. е. соответствующей возрастающей обобщенной арифметической прогрессии Фишберна, то, т. к. $u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 + u_4 \cdot n_4 = 1{,}8$, получаем оценку вектора весовых коэффициентов в виде следующей последовательности Фишберна второго порядка:

$$\{U_1; U_2; ...; U_7\} = \left\{\frac{1}{18}; \frac{2}{18}; \frac{2}{18}; \frac{2}{18}; \frac{3}{18}; \frac{4}{18}; \frac{4}{18}\right\}.$$

Заметим, что соответствующую невозрастающую последовательность Фишберна второго рода порождает соответствующая прогрессия Фишберна $\{0{,}4; 0{,}3; 0{,}2; 0{,}1\}$ (см. таблицу 1).

Если же имеет место смешанная система предпочтений вида $O_1 \underline{\prec\prec} O_2 \sim O_3 \sim O_4 \underline{\prec\prec} O_5 \underline{\prec\prec} O_6 \sim O_7$, то для построения оценки вектора весовых коэффициентов приоритета можно использовать, например, возрастающую последовательность Фишберна, порожденную геометрической прогрессией $\{1; 4; 16; 64\}$, знаменатель которой равен $x = 1$, т. е. обобщенную геометрическую прогрессию Фишберна

$$\{u_1; u_2; u_3; u_4\} = \left\{\frac{1}{85}; \frac{4}{85}; \frac{16}{85}; \frac{64}{85}\right\}.$$

Подставляя в формулы (18) значения элементов этой прогрессии, то, т. к. $\sum_{i=1}^{4} u_i \cdot n_i = \frac{157}{85}$, получаем оценку вектора весовых коэффициентов в виде следующей последовательности Фишберна второго порядка:

$$\{U_1; U_2; ...; U_7\} = \left\{\frac{1}{157}; \frac{4}{157}; \frac{4}{157}; \frac{4}{157}; \frac{16}{157}; \frac{64}{157}; \frac{64}{157}\right\}.$$

Аналогичную схему построения оценки вектора весовых коэффициентов предложили З.И. Абдулаева, А.О. Недосекин [1, с. 83]. Придерживаясь введенной терминологии, можно сказать, что их схема представляет собой использование последовательности Фишберна второго порядка, значения элементов которой вычисляются на основе использования убывающих арифметических прогрессий Фишберна.

Опишем формально процедуру поиска эффективного (оптимального по Парето) решения задачи многокритериальной оптимизации, основанную на использовании линейной свертки критериев. Без ограничения общности задачу многокритериальной оптимизации можно представить в виде следующей задачи многокритериальной максимизации:

(19) $\varphi_i(x) \to \max\limits_{x \in X}$, $i = 1,\ldots, k$.

где k – количество частных критериев задачи (19), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x),\ldots, \varphi_k(x)$ – частные критерии задачи (19), представляющие собой заданные числовые функции, называемые целевыми функциями.

Оценив значения элементов последовательности Фишберна $\{u_1; u_2;\ldots; u_k\}$, обладающей желаемыми свойствами, необходимо составить линейную свертку критериев:

(20) $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i \cdot \varphi_i(x)$.

Если имеет место смешанная система предпочтений, когда с точки зрения ЛПР значимость (приоритетность) частных критериев характеризуют, как отношения строгого предпочтения, так и отношения безразличия, то в качестве значений весовых коэффициентов функции (20) целесообразно использовать значения элементов последовательности Фишберна второго порядка, обладающей желаемыми свойствами.

Выбирая последовательность Фишберна, обладающую желаемыми свойствами, ЛПР может ограничиться обобщенными прогрессиями Фишберна, значения параметров которых соответствуют желаемым свойствам. Аналогично, выбирая последовательность Фишберна второго порядка, обладающую желаемыми свойствами, ЛПР может ограничиться последовательностями Фишберна второго порядка, порождаемыми обобщенными прогрессиями Фишберна, значения параметров которых соответствуют желаемым свойствам.

Решение задачи однокритериальной оптимизации

$$\varphi(x) \to \max_{x \in X},$$

где $\varphi(x)$ – функция свертки (20), позволяет найти такое решение $x^* \in X$, для которого справедливо равенство

$$\varphi(x^*) = \max_{x \in X} \varphi(x).$$

Именно найденное $x^* \in X$ и является эффективным (оптимальным по Парето) решением задачи (20).

5. Заключение

Принятие управленческих решений определяет эффективность деятельности соответствующей экономической системы. Принятие управленческих решений в экономике представляет собой, как правило, многокритериальную многоцелевую задачу оптимизации. Одним из наиболее распространенных методов поддержки принятия решений при нескольких критериях является приведение исходной задачи многокритериальной оптимизации к задаче однокритериальной оптимизации линейной функции свертки критериев, т. е. скалярного критерия оптимальности, представляющего собой аддитивную функцию полезности лица, принимающего решения (ЛПР). При построении линейной функции свертки критериев возникает ряд специфических проблем, часть из которых носит концептуальный характер, а часть – формальный (т. е. связанный со способами вычислений) характер.

Итак, от качества решения задачи многокритериальной оптимизации существенным образом зависит качество принятия управленческого решения, реализация которого определяет эффективность функционирования соответствующей экономической системы.

В статье предложен метод построения оценки вектора весовых коэффициентов, значения которых характеризуют приоритетность (с точки зрения ЛПР) частных критериев. Для построения оценки вектора весовых коэффициентов приоритета предложено использовать последовательность Фишберна, обладающую желаемыми свойствами. Последовательность Фишберна – это, по сути, строго монотонная последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию нормировки (т. е. сумма всех элементов равна 1). В качестве последовательностей, производящих последовательности Фишберна с желаемыми свойствами, можно выбирать, например, арифметические или геометрические прогрессии (в этом случае построенные последовательности Фишберна представляют собой обобщенные арифметические или геометрические прогрессии Фишберна), числа Фибоначчи, числа Мерсенна, числа Евклида, числа Ферма и другие известные последовательности натуральных чисел.

В статье введено новое понятие: понятие «последовательность Фишберна второго порядка». Последовательность Фишберна второго порядка – это, по сути, монотонная последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию нормировки. Последовательность Фишберна второго порядка целесообразно использовать для построения оценки вектора весовых коэффициентов приоритета в случае смешанной системы предпочтений, когда с точки зрения ЛПР значимость частных критериев характеризуют, как отношения строгого предпочтения, так и отношения безразличия.

Выбирая последовательность Фишберна, обладающую желаемыми свойствами, ЛПР может ограничиться обобщенными прогрессиями Фишберна, значения параметров которых соответствуют желаемым свойствам. Аналогично, выбирая последовательность Фишберна второго порядка, обладающую желаемыми свойствами, ЛПР может ограничиться последовательностями Фишберна второго порядка, порождаемыми обобщенными прогрессиями Фишберна, значения параметров которых соответствуют желаемым свойствам.

Авторы считают, что предлагаемый метод оценки вектора весовых коэффициентов целесообразно применять для поиска эффективного (оптимального по Парето) решения задачи многокритериальной оптимизации, что позволяет принимать корректное управленческое решение при нескольких критериях, причем это управленческое решение будет адекватно отражать предпочтения самого́ ЛПР, позволит повысить эффективность функционирования рассматриваемой экономической системы.

Литература

1. АБДУЛАЕВА З.И., НЕДОСЕКИН А.О. *Стратегический анализ инновационных рисков: монография*. – СПб: Изд-во Политехн. университета, 2013. – 145 с.

2. ВЕРЧЕНКО П.І. *Багатокритеріальність і динаміка економічного ризику (моделі та методи): Монографія*. – Київ: КНЕУ, 2006. – 272 с.
3. ИНТРИЛИГАТОР М. *Математические методы оптимизации и экономическая теория*; пер. с англ. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 606 с.
4. КИНИ Р.Л. РАЙФА Х. *Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения*; пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
5. ЛАРИЧЕВ О.И. *Теория и методы принятия решений*. – М.: Логос, 2002. – 296 с.
6. ЛОТОВ А.В., ПОСПЕЛОВА И.И. *Многокритериальные задачи принятия решений: Учебное пособие*. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 197 с.
7. МАКАРОВА И.Л. Анализ методов определения весовых коэффициентов в интегральном показателе общественного здоровья // Международный научный журнал «Символ науки». – 2015. – № 7. – С. 87–94.
8. НЕДОСЕКИН А.О. *Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечеткомножественных описаний*: Автореф.… д-ра экон. наук: 08.00.13 – «Математические и инструментальные методы экономики». – СПб, 2003. – 37 с.
9. НОГИН В.Д. *Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход*. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Физматлит, 2005. – 144 с.
10. ПОДИНОВСКИЙ В.В., НОГИН В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Физматлит, 2007. – 256 с.
11. ПОТАПОВ Д.К., ЕВСТАФЬЕВА В.В. *О методиках определения весовых коэффициентов в задаче оценки надежности коммерческих банков* [Электронный ресурс]. – 2015. – URL: http://www.ibl.ru/konf/041208/60.pdf.
12. САЗОНОВ А.Е., ОСИПОВ Г.С., КЛИМЕНКО В.Д. *Использование метода экспертных отношений предпочтения для оценки уровня совершенства системы управления безопасностью морского судна* // Вестник государственного уни-

верситета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. – 2013. – № 3 (20). – С. 94–104.
13. СИГАЛ А.В. *О приведении обобщенной модели Марковица в поле третьей информационной ситуации к классической модели Марковица* // Системный анализ и информационные технологии: Труды Седьмой Международной конференции САИТ-2017 (13–18 июня 2017, Светлогорск). – 2017. – С. 159–167.
14. СИГАЛ А.В., РЕМЕСНИК Е.С. *О корректном применении обобщенных прогрессий Фишберна для принятия решений в экономике на основе принципа Гиббса–Джейнса* // Аудит и финансовый анализ. – 2017. – № 5–6. – С. 568–581.
15. СИГАЛ А.В., РЕМЕСНИК Е.С. *Последовательности Фишберна и их применение в современной теории портфеля: монография*. – Симферополь: Корниенко А. А., 2018. – 204 с.
16. СОМОВ В.Л., ТОЛМАЧЕВ М.Н. *Методы определения коэффициентов весомости динамических интегральных показателей* // Вопросы статистики. – 2017. – № 6. – С. 74–79.
17. ТРУХАЕВ Р.И. *Модели принятия решений в условиях неопределенности*. – М.: Наука, 1981. – 258 с.
18. ТЮТЮКИНА Е.Б., КАПРАНОВА Л.Д., СЕДАШ Т.Н. *Определение приоритетных направлений и инвестиционной поддержки развития российской экономики* // Экономический анализ: теория и практика. – 2014. – № 38 (389). – С. 2–11.
19. ФИШБЕРН П. *Теория полезности для принятия решений*; пер. с англ. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
20. ШТОЙЕР Р. *Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления и приложения*; пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1992. –
21. FISHBURN P.C. *Analysis of Decisions with Incomplete Knowledge of Probabilities* // Operations Research. – 1965. – Vol. 13. – No. 2. – P. 217–237.
22. FISHBURN P.C. *Decision and Value Theory*. – N. Y.: John Wiley & Sons, 1964. – 451 p.

23. FISHBURN P.C. *Independence in Utility Theory with Whole Product Sets* // Operations Research. – 1965. – Vol. 13. – No. 1. – P. 28–45.
24. FISHBURN P.C. *Utility Theory for Decision Making*. – N. Y.: John Wiley & Sons, 1970. – 234 p.

После списка литературы приводится информация о статье **на английском языке:** название статьи, имена авторов и их контактная информация (e-mail), аннотация и ключевые слова (формат см. ниже).

В самом конце указываются **коды УДК и ББК** (см. пример ниже), выравнивание – по левому краю, шрифт Times New Roman 10 пт, интервал – одинарный (используйте стиль «УБС Коды»). Перечни кодов можно найти на сайте:

- УДК – https://classinform.ru/udk.html;
- ББК – https://classinform.ru/bbk.html.

EVALUATING A VECTOR OF WEIGHTING PRIORITY COEFFICIENTS FOR CONSTRUCTING THE CONVOLUTION CRITERI-

ON FUNCTION IN MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS

Anatoliy Sigal, V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Doct.Sc., professor (ksavo3@gmail.com).
Elena Remesnik, V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, assistant (es2704@mail.ru).

Abstract: The article is devoted to the problem of estimating the values of the weight coefficients of priority in the case of solving a multicriterial optimization problem based on optimization of the linear convolution function of criteria, that is, a scalar optimality criterion, which is an additive utility function of the decision maker. As an estimate of the vector of weight coefficients, it is proposed to use Fishburn sequences. One of the most important properties of Fishburn sequences is that they always satisfy a simple linear order relation, and under certain conditions, a partially strengthened linear order relation. The notion of second-order Fishburn sequences introduced in the article allows us to construct an estimate of the vector of weights in the case of a mixed system of preferences, when, from the point of view of decision-makers, the importance of partial criteria is characterized by both a strict preference relationship and an indifference relationship. The developed technology for estimating the weight coefficients vector allows us to construct a convolution function of criteria that fully reflects the preferences of the decision maker, to make a management decision that takes into account risk and uncertainty, that will achieve sustainable growth of the economic system.

Keywords: weight coefficient vector; convolution of criteria; Fishburn sequence; linear order relation; mixed preferences; decision-making.

УДК 519.83
ББК 22.18

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...
Опубликована ...заполняется редактором...