

О ЗАКОНЕ СТАЦИОНАРНОЙ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМЕ

$$GI^\nu | M_\mu | 1 | \infty^1$$

Соболев В.Н.²

(Москва)

В статье найдены условия выполнения основного закона стационарной очереди Хинчина для модели $GI^\nu | M_\mu | 1 | \infty$; показано, что в этом случае стационарные вероятности совпадают с соответствующими стационарными вероятностями системы $M_\lambda^\nu | M_\mu | 1 | \infty$; доказано одно новое представление для производящей функции стационарных вероятностей.

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповое поступление, стационарное распределение, производящая функция вероятностей, вложенная цепь Маркова, процесс восстановления, основной закон стационарной очереди Хинчина.

1. Введение

В сборнике “Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях (АВМТВ-2017)” [1, с. 171-175] была опубликована статья А.Д. Соловьёва и В.Н. Соболева “Одна система массового обслуживания с групповым поступлением требований”, в которой рассматривалась система $GI^\nu | M_\mu | 1 | \infty$.

В системе массового обслуживания $GI^\nu | M_\mu | 1 | \infty$ моменты поступления требований $t_0 = 0, t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ образуют процесс восстановления [3] с функцией распределения $P\{X_n < t\} = F(t)$, где $X_n = t_n - t_{n-1}, n \geq 1$.

В каждый момент t_n поступает группа из ν_n требований, причем величины ν_n независимы, одинаково распределены и ограничены.

В системе имеется один обслуживающий прибор, время обслуживания распределено по показательному закону с парамет-

¹ Автор пользуется случаем и благодарит В.В. Козлова за постоянное внимание к его работе, плодотворное обсуждение и редакционные замечания.

² Соболев Виталий Николаевич, к.ф.-м.н., свободный исследователь (sobolev_vn@mail.ru).

ром μ , а число мест для ожидания неограниченно.

Пусть $\xi(t)$ – число требований в системе в момент t . В рамках данной системы в указанной статье [1, с. 171-175] было найдено стационарное распределение процесса

$$P(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} Mz^{\xi(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n,$$

в котором искомое распределение определялось через стационарное распределение вложенной однородной цепи Маркова

$$\xi_n = \xi(t_n - 0), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \xi_1 = 0$$

с производящей функцией

$$\pi(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} Mz^{\xi_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k.$$

В данной работе исследуются условия, при выполнении которых в модели $GI^\nu | M_\mu | 1 | \infty$ выполнен *основной закон стационарной очереди Хинчина* [4, с. 76], т.е. для любого неотрицательного k выполняются соотношения

$$p_k = \pi_k.$$

Данные соотношения эквивалентны совпадению производящих функции распределений $P(z) = \pi(z)$.

В статье доказано, что для системы $M_\lambda^\nu | M_\mu | 1 | \infty$ выполняется основной закон стационарной очереди Хинчина; а если данный закон выполняется для произвольной модели $GI^\nu | M_\mu | 1 | \infty$, то в последней стационарные вероятности p_k и π_k совпадают с соответствующими вероятностями системы $M_\lambda^\nu | M_\mu | 1 | \infty$.

Так же в статье найдено одно новое представление для производящей функции стационарных вероятностей $P(z)$, имеющее простой вероятностный смысл.

2. Предварительные сведения и обозначения

2.1. ВХОДЯЩИЙ ПОТОК

Как было указано выше, в модели $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|_{\infty}$ длины интервалов между поступлениями групп требований $X_n = t_n - t_{n-1}$, которые представляют собой время между приходами двух соседних групп требований, независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$.

Определим T как среднее время между поступлениями групп заявок в систему

$$T = M X_n = \int_0^{\infty} x dF(x).$$

В частности, для модели $M_{\lambda}^{\nu}|M_{\mu}|1|_{\infty}$ имеем $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ и среднее время между поступлениями групп заявок в систему опреляется через параметр распределения по следующей формуле

$$T = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

2.2. ВХОДЯЩАЯ ГРУППА ТРЕБОВАНИЙ

В каждый момент времени t_n поступает группа требований из ν_n независимых, одинаково распределённых требований с производящей функцией

$$\alpha(z) = M z^{\nu_n} = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_m z^m, \alpha_m \neq 0,$$

где $\alpha_k = P\{\nu_n = k\}$, $k = 1, 2, \dots, m$. Величины ν_n независимы в совокупности от величин X_n .

С помощью производящей функции $\alpha(z)$ легко находится среднее число заявок в группе

$$\nu = M \nu_n = \alpha'(z) \Big|_{z=1} = \sum_{k=1}^m k \alpha_k.$$

2.3. ПРИБОР

Пусть случайная величина Y_n обозначает время обслуживания n -ой заявки. Величины Y_n независимы друг от друга и от величин X_n . По условию задачи величины Y_n имеют одинаковое распределение с функцией распределения $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$.

В этом случае среднее время обслуживания n -ой заявки τ конечно и равно

$$\tau = MY_n = \int_0^{\infty} x dG(x) = \int_0^{\infty} x \mu e^{-\mu x} dx,$$

где $\mu = 1/\tau$ – интенсивность обслуживания.

2.4. ОБСЛУЖИВАНИЕ

Пусть η_n – это число точек пуассоновского потока, с параметром μ , приходящих на интервале (t_n, t_{n+1}) . Поскольку в системе имеется один обслуживающий прибор, а время обслуживания распределено по показательному закону с параметром μ , то величину η_n можно интерпретировать как количество заявок обслуженных за время $X_{n+1} = t_{n+1} - t_n$.

Определим случайные величины $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ и величину

$$\mu(t) = \max \{n \geq 0 \mid S_n \leq t\}.$$

Тогда $\eta_n = \mu(X_{n+1})$ и

$$P \{ \mu(t) = n \} = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}.$$

Неотрицательные целочисленные случайные величины η_n независимы и поэтому можно вычислить для каждой из них производящую функцию

$$\begin{aligned} \omega(z) = Mz^{\eta_n} &= \sum_{s=0}^{\infty} \omega_s z^s = \sum_{s=0}^{\infty} z^s \int_0^{\infty} \frac{(\mu x)^s}{s!} e^{-\mu x} dF(x) = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\mu x(1-z)} dF(x) = \varphi(\mu - \mu z), \end{aligned}$$

где через $\varphi(z)$ обозначено преобразование Лапласа-Стилтьеса функции распределения $F(x)$

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} dF(x), \quad z \geq 0,$$

а через

$$\omega_s = \int_0^{\infty} \frac{(\mu x)^s}{s!} e^{-\mu x} dF(x), \quad s \geq 0$$

вероятности события $\{\eta_n = s\}$, т.е. ω_s – вероятности того, что за время между поступлениями двух соседних групп заявок будет обслужено ровно s заявок при условии, что после прихода первой из них общее число заявок в системе было больше s .

Как известно [2, с.94], в случае $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ преобразование Лапласа-Стилтьеса имеет следующий вид

$$\varphi(z) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(z+\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{z + \lambda}.$$

Откуда

$$(1) \quad \omega(z) = Mz^{\eta_n} = \varphi(\mu - \mu z) = \frac{\lambda}{\mu - \mu z + \lambda} = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0 - z},$$

где $\rho_0 = \lambda/\mu$.

С помощью производящей функции $\omega(z)$ в общем случае можно найти среднее число обслуженных на интервале (t_n, t_{n+1}) требований

$$M\eta_n = \varphi'(\mu - \mu z)|_{z=1} = \mu T = \frac{1}{\rho_0},$$

3. Явный вид производящих функций $\pi(z)$ и $P(z)$ в модели $GI^\nu|M_\mu|1|_\infty$

3.1. СТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССА $\xi(T)$ И ВЛОЖЕННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

В указанной выше статье [1, с.171-175] (подробнее см. [6, с. 97-108]) для стационарного распределения вложенной цепи Маркова системы $GI^\nu|M_\mu|1|_\infty$ доказана следующая теорема:

Теорема 1 [?, с. 173]. Если выполнено условие $\nu < \mu T$, то стационарное распределение вложенной цепи Маркова существует и задается производящей функцией

$$(2) \quad \pi(z) = \frac{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots (1 - \lambda_m)}{(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z) \dots (1 - \lambda_m z)},$$

где числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ являются корнями уравнения (считая каждый корень столько раз, какова его кратность)

$$(3) \quad \alpha\left(\frac{1}{z}\right) \varphi(\mu - \mu z) = 1$$

принадлежащими области $|z| < 1$.

Отметим, что в [1, с. 171-175] доказано, что у уравнения (??) при $|z| < 1$ имеет ровно m корней с учётом кратности, а уравнение

$$(4) \quad \alpha(z) \varphi\left(\mu - \mu \frac{1}{z}\right) = 1$$

имеет при $|z| > 1$ ровно m корней с учётом их кратности.

Обозначим корни уравнения (??) через $z_1, z_2, \dots, z_m$. Тогда корни уравнений (??) и (??) связаны равенством $\lambda_k = z_k^{-1}$ для $k = 1, \dots, m$.

Иногда технически оказывается удобнее использовать уравнение (??) и его корни. При этом после замены $\lambda_k = z_k^{-1}$, $k = 1, \dots, m$, производящая функция (??) принимает вид

$$(5) \quad \pi(z) = \frac{(1 - z_1)(1 - z_2) \dots (1 - z_m)}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}.$$

Вторая теорема, доказанная в [1, с. 171-175], позволяет находить для системы $GI^\nu | M_\mu | 1 | \infty$ производящую функцию стационарного распределения процесса $\xi(t)$ через производящую функцию вложенной цепи Маркова $\pi(z)$:

Теорема 2 [?, с. 175]. Если выполнено условие $\nu < \mu T$, то стационарное распределение процесса $\xi(t)$ существует и задается производящей функцией

$$(6) \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1}{\mu T} z \pi(z) \frac{1 - \alpha(z)}{1 - z} + 1 - \frac{\nu}{\mu T},$$

где $\pi(z)$ определяется равенством (??).

3.2. НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССА $\xi(T)$ ДЛЯ СИСТЕМЫ $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|_{\infty}$

Из равенства $\rho_0 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\mu T}$ следует, что выражение (??) можно записать в виде

$$(7) \quad P(z) = \rho_0 z \frac{1 - \alpha(z)}{1 - z} \pi(z) + 1 - \nu \rho_0.$$

а условие $\nu < \mu T$ как $\nu \rho_0 < 1$.

Введение понятия нагрузки (загрузки) системы

$$(8) \quad \rho = \nu \rho_0.$$

показывает, что условие $\nu < \mu T$ является известным условием на нагрузку системы массового обслуживания

$$(9) \quad \rho < 1.$$

Из (??) сразу следует, что вероятность того, что система свободна, равна

$$(10) \quad p_0 = P(0) = 1 - \nu \rho_0 = 1 - \rho.$$

Как хорошо известно (см, например, [5, т. 1, с. 271]), выражение

$$\frac{1 - \alpha(z)}{1 - z}$$

представляет собой производящую функцию “хвоста” распределения случайной величины ν_n , т.е. производящую функцию вероятностей $\alpha_k = P\{\nu_n = k\}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Однако в рассматриваемом случае, в силу того, что случайные величины ν_n неотрицательные и не принимают значение равное нулю, т.е.

$$P\{\nu_n > 0\} = P\{\nu_n \geq 1\},$$

удобнее взять в качестве вероятностей “хвоста” вероятности

$$A_k = P\{\nu_n \geq k\} = P\{\nu_n > k - 1\} = \sum_{l=k}^m \alpha_l, \quad k = 1, \dots, m.$$

При таком определении индексы в обозначениях вероятностей сдвигаются на единицу относительно обозначений принятых в

[5, т. 1, с. 271]. В силу равенства

$$\sum_{k=1}^m A_k = \sum_{k=1}^m (\alpha_k + \dots + \alpha_m) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + m\alpha_m) = \nu$$

скалярные величины

$$q_k = \frac{A_k}{\nu}, \quad k = 1, \dots, m,$$

представляют собой распределение вероятностей с производящей функцией

$$(11) \quad A(z) = \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^m A_k z^k = \sum_{k=1}^m q_k z^k.$$

Для $A(z)$ справедлива следующая лемма:

Лемма 1. Производящая функция “нормированного хвоста” $A(z)$ и производящая функция числа заявок в группе $\alpha(z)$ связаны соотношением

$$(12) \quad A(z) = \frac{z}{\nu} \frac{1 - \alpha(z)}{1 - z}.$$

Доказательство. Следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{z} A(z) &= \sum_{k=1}^m A_k z^{k-1} = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 (1 + z) + \dots + \alpha_m (1 + z + \dots + z^{m-1}) = \\ &= \frac{\alpha_1 (1 - z) + \alpha_2 (1 - z^2) + \dots + \alpha_m (1 - z^m)}{1 - z} = \\ &= \frac{1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_m z^m}{1 - z} = \frac{1 - \alpha(z)}{1 - z}. \end{aligned}$$

полностью доказывает лемму.

Прямым следствием леммы (??) и представления (??) является следующая теорема:

Теорема 3. Если выполнено условие $\rho < 1$, то стационарное распределение процесса $\xi(t)$ существует и задается производящей функцией

$$(13) \quad P(z) = (1 - p_0) \pi(z) A(z) + p_0,$$

где $A(z)$ определяется равенством (??), а вероятность $p_0 = 1 - \rho$ равенством (??).

Замечание 1. Формула (??) показывает, что искомое распределение есть смесь вырожденного распределения и распределения представляющего собой сумму распределений: стационарного вложенной цепи Маркова с распределением "хвоста" входящей группы требований.

Замечание 2. Представление (??) также может быть записано в виде

$$(14) \quad P(z) = \rho \pi(z) A(z) + 1 - \rho.$$

4. О математическом законе стационарной очереди

4.1. О ЗНАМЕНАТЕЛЕ $\pi(Z)$ В МОДЕЛИ $M_\lambda^\nu | M_\mu | 1 | \infty$

Для системы $M_\lambda^\nu | M_\mu | 1 | \infty$ уравнение (??), определяющее корни $z_1, z_2, \dots, z_m$ в представлении (??) может быть сведено к нахождению корней многочлена $R_m(z)$ степени m . Данный многочлен выражается через производящую функцию $A(z)$ "хвоста" распределения числа элементов в группе поступающих требований. (??). Кроме того знаменатель производящей функции $\pi(z)$ в представлении (??) может быть записан с помощью данного многочлена.

Лемма 2. В системе $M_\lambda^\nu | M_\mu | 1 | \infty$ в качестве знаменателя производящей функции $\pi(z)$ в представлении (??) можно взять многочлен

$$(15) \quad R_m(z) = 1 - \rho A(z)$$

Доказательство. Легко видеть, что из представления (??) производящей функции $\omega(z) = \varphi(\mu - \mu z)$ следует равенство

$$\varphi\left(\mu - \frac{\mu}{z}\right) = \frac{\rho_0}{1 - z^{-1} + \rho_0} = \frac{\rho_0 z}{z + \rho_0 z - 1},$$

используя которое, уравнение (??) можно записать в виде

$$\alpha(z) \frac{\rho_0 z}{z + \rho_0 z - 1} = 1,$$

а после элементарных преобразований свести к уравнению

$$\rho_0 z \frac{1 - \alpha(z)}{1 - z} = 1,$$

которое в свою очередь с учётом (??) преобразуется к виду

$$1 - \rho A(z) = 0.$$

Выражение $1 - \rho A(z)$ есть некоторый многочлен $R_m(z)$ степени m , который определяется через интенсивности λ , μ и вероятности $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ формулой

$$R_m(z) = 1 - \rho_0 z (1 + (\alpha_2 + \dots + \alpha_m)z + \dots + \alpha_m z^{m-1}).$$

Следовательно, корни $z_1, \dots, z_m$ уравнения (??) при $|z| > 1$ суть корни многочлена $R_m(z)$, т.е. удовлетворяют уравнению (16)

$$R_m(z) = 0.$$

Таким образом, лемма доказана.

4.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ $\pi(Z)$ И $P(Z)$ В МОДЕЛИ $M_\lambda^\nu | M_\mu | 1 |_\infty$ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИЮ $A(Z)$

Представление (??) для многочлена $R_m(z)$ позволяет выписать для модели $M_\lambda^\nu | M_\mu | 1 |_\infty$ явный вид производящих функций $\pi(z)$ и $P(z)$ без нахождения корней $z_1, \dots, z_m$. При этом оказывается, что распределения $\pi(z)$ и $P(z)$ совпадают. Докажем следующую теорему:

Теорема 4. Если для системы $M_\lambda^\nu | M_\mu | 1 |_\infty$ выполнено условие $\rho < 1$, то стационарное распределение процесса $\xi(t)$ существует и совпадает со стационарным распределением последовательности $\xi(t_n - 0)$, а для их производящих функцией справедливо представление

$$(17) \quad P(z) = \pi(z) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho A(z)}.$$

Доказательство. Поскольку $A(z)$ производящая функция вероятностей, то $A(1) = 1$ и

$$R_m(1) = 1 - \rho A(z)|_{z=1} = 1 - \rho.$$

Поэтому (??) с учётом (??) можно записать в виде

$$(18) \quad \pi(z) = \frac{R_m(1)}{R_m(z)} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho A(z)}.$$

Из последнего представления справедливо равенство

$$1 - \rho = \pi(z) - \rho A(z) \pi(z),$$

с учётом которого из (??) следует совпадение стационарных распределений $\pi(z)$ и $P(z)$. Действительно,

$$\begin{aligned} P(z) &= \rho \pi(z) A(z) + 1 - \rho = \\ &= \rho \pi(z) A(z) + \pi(z) - \rho A(z) \pi(z) = \pi(z). \end{aligned}$$

Последнее равенство завершает доказательство данной теоремы.

4.3. О СОВПАДЕНИИ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ $\pi(Z)$ И $P(Z)$ СИСТЕМЫ $GI^\nu | M_\mu | 1 | \infty$

Рассмотрим случай, когда для системы $GI^\nu | M_\mu | 1 | \infty$ выполнен закон стационарной очереди. Тогда оказывается, что искомые стационарные распределения всегда совпадают с соответствующими стационарными распределениями (см. (??)) модели $M_\lambda^\nu | M_\mu | 1 | \infty$. Докажем данное утверждение.

Теорема 5. Если для системы $GI^\nu | M_\mu | 1 | \infty$ выполнен закон стационарной очереди, то для производящих функций $\pi(z)$ и $P(z)$ справедливо представление (??). Если для системы $GI^\nu | M_\mu | 1 | \infty$ выполнено условие $\rho < 1$, а при $|z| > 1$ корни уравнения $\alpha(z) \varphi(\mu - \mu z^{-1}) = 1$ совпадают с учётом их кратности с корнями уравнения $A(z) = \rho^{-1}$, то для системы выполняется основной закон стационарной очереди.

Доказательство. При выполнении закона стационарной очереди верно равенство $P(z) = \pi(z)$. Подставляя $\pi(z)$ вместо $P(z)$ в формулу (??), убеждаемся в справедливости равенства

$$\pi(z) = \rho\pi(z)A(z) + 1 - \rho,$$

из которого элементарными преобразованиями для $\pi(z)$ получается представление (??). Следовательно, корни уравнения (??) должны совпадать с корнями уравнения $A(z) = \rho^{-1}$.

Обратное очевидно. На этом доказательство теоремы является законченным.

Представление (??) показывает, что в системе $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$ при выполнении закона стационарной очереди стационарное распределение $P(z)$ зависит только от интенсивностей μ , λ и распределения числа заявок в группе.

Как было показано выше, закон стационарной очереди выполнен для модели $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$. Естественно, возникает вопрос о существовании (или отсутствии) других видов входящих потоков, при которых для системы массового обслуживания выполняется основной закон стационарной очереди Хинчина. Ответ на этот вопрос в данный момент нам не известен. Вполне может оказаться, что закон стационарной очереди верен только для $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$.

5. Заключение

Выше было показано, что для системы $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$ основной закон стационарной очереди Хинчина выполняется. При выполнении данного закона для $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$ искомые стационарные вероятности совпадают с соответствующими стационарными вероятностями системы $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$. Совпадение корней уравнения (??) с корнями уравнения (??) гарантирует выполнения закона стационарной очереди для системы $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$.

Литература

1. *Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях (АВМТВ-2017)*: материалы Международной научной конференции. Россия, Москва, 23-27 октября 2017. / МГУ им. М.В.Ломоносова, РУДН; [под общ. ред. А. В. Лебедева]. – Москва: Изд-во «РУДН», 2017. – 743 с.
2. БОЧАРОВ П.П., ПЕЧИНКИН А.В. *Теория массового обслуживания*. – М.: РУДН, 1995. – 529 с.
3. ГНЕДЕНКО Б.В., КОВАЛЕНКО И.Н. *Лекции по теории массового обслуживания*. – К.: МИР, 1963. – 315 с.
4. ХИНЧИН А.Я. *Математическая теория стационарной очереди* // Матем. сб. – 1932. – Т. 39, №4. – С. 73–84.
5. ФЕЛЛЕР В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. – М.: МИР, 1964. – 498 с.
6. *Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science. vol 10684.* [Rykov V., Singpurwalla N., Zubkov A. (eds)]. – Cham: Springer, 2017. – 540 с.

KHINCHIN'S BASIC LAW OF A STATIONARY QUEUE IN THE SYSTEM $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$

Vitaly Sobolev, Moscow, Cand.Sc., free researcher
(sobolev_vn@mail.ru).

Abstract: In this paper, for the $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$ queueing systems, a condition for the implementation of the Khinchin's basic law of a stationary queue is given. The article shows that, in the case of basic law of a stationary queue for the system $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$, the stationary distribution of the number of the customers in the system $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$ always coincides with the corresponding probability distribution of the $M^\nu|M_\mu|1|\infty$ queueing system. In stationary case a new form of the probability generating functions of the number of clients in the system $GI^\nu|M_\mu|1/\infty$ is also derived.

Keywords: queueing system, batch arrivals, stationary distribution, probability generating functions, embedded Markov chain, renewal process, Khinchin's basic law of a stationary queue.

УДК 519.872
ББК 22.171

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...*

*Поступила в редакцию ...
Дата опубликования ...*