ЗАДАЧА О ВЗБИРАНИИ РОБОТА-КУБА НА СТЕНУ [1]

Шевляков А.А. [2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Создание и исследование поведения взаимодействующих групп роботов остается акутальной проблемой современной робототехники. Наиболее хорошо изучены возможности групп беспилотных летающих аппаратов, однако автономные группы роботов в других средах представляют не меньший интерес. Данная проблема порождает множество научных и инженерных задач, в том чиле в разделе управления движением. В данной статье мы рассматриваем задачу о взбирании робота-куба на вертикальную стену при наличии такой же стены на противоположной стороне ямы. Рассматривается двумерное движение в вертикальной плоскости. Предложено управление, решающее задачу об оптимальном отскоке от стенки ямы. На основе библиотек Box2D и ImGUI написано программное обеспечение, позволяющее моделировать движение робота и взаимодействие со средой.

Ключевые слова: управление, односторонние связи, контакт, робототехника, прыжок.

1. Введение

Исследование возможностей нестандартных шасси для роботов остается важной проблемой, в рамках которой возникают задачи как для робототехники, так и для теории управления. В частности такие оригинальные решения (в том числе шасси в виде куба) находят применение в архитектуре как элемент самосборных конструкций. Коллектив Architectural Association's Design Research Laboratory создал ряд эскизных проектов и прототипов (noMAD, OWO, HyperCell, HEXY) [1, 2, 3, 4, 7], в которых исследовались различные типовые автономные модули, способные перемещаться и соединяться. В Bartlett School of Architecture была разработана модель робота pizzabot [5], позволяющего возводить павильоны и мебель из типовых фанерных конструкций. В отличие от других подобных роботов, приводы в нем отделимы

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-31-00032.*

[2] *Андрей Анатольевич Шевляков, к.ф.-м.н.,* (*aash29@gmail.com*).

от конструктивных элементов, что позволяет их многоразовое использование. Такого рода конструкции могут быть оправданы в экстремальных условиях, в т.ч. в космосе и на других планетах, когда альтернативы подобным распределенным системам может не быть.

Таким образом, использование групп взаимодействующих роботов остается перспективным направлением во многих отраслях, что делает актуальным исследование задач об управлении их движением.

2. Задача о взбирании на стену

Предположим, что робот-куб находится на дне прямоугольной ямы, стенки которой находятся на расстоянии L. В качестве управления возьмем момент, приложенный к кубу. Будем считать куб и окружающие его поверхности твердыми телами, между которыми есть сухое трение.

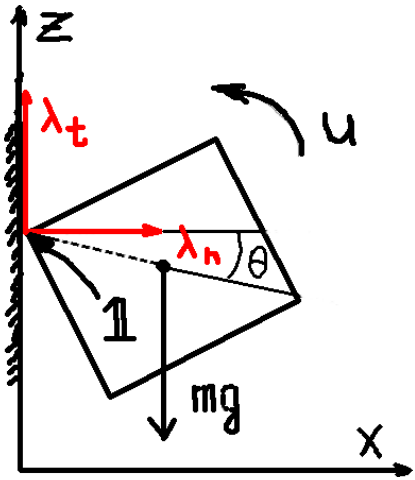

Рис. 1. Схема основных действующих сил

В качестве основного сценария рассмотрим положение куба, показанное на схеме 1.

3. Математическая модель

Будем считать куб твердым телом, ограниченным односторонними связями. У подобной системы может быть много режимов движения, в зависимости от положения в пространстве.

1) Свободное движение в отсутствие контакта (3 степени свободы)

2) Контакт с проскальзыванием (2 степени свободы)

3) Контакт без проскальзывания (1 степень свободы)

В данной работе мы ограничимся рассмотрением контакта с проскальзыванием, и уравнения движения запишутся в следующем виде.

$$\begin{aligned} &\ddot{x} = \lambda_n, \\ &\ddot{z} = -g + \lambda_t, \\ &\ddot{\theta} = u - \lambda_t \cos\theta - \lambda_n \sin\theta, \end{aligned} \tag{1}$$

где x, z – координаты центра масс куба, θ – угол ориентации, u – момент, приложенный к кубу, λ_t, λ_n – тангенциальная и нормальная составляющая реакции опоры соответственно. Для режима трения скольжения эти составляющие связаны соотношением

$$\lambda_t = -sign(\dot{z}_1)\mu\lambda_n,$$

z_1 – координата z точки 1. В рассматриваемом случае

$$\lambda_t = \mu\lambda_n.$$

Запишем условие касания стены верщиной куба.

$$x_1 = x - \cos\theta = 0$$

Продифференцировав его дважды, получим выражени для силы реакции λ_n.

$$\dot{x}_1 = \dot{x} + \sin\theta\dot{\theta} = 0$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \ddot{x} + \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \sin\theta \cdot \ddot{\theta} = \\ &= \lambda_n + \cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin(u - \mu\lambda_n \cos\theta - \lambda_n \sin\theta) = \\ &= \lambda_n(1 - \mu\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta) + \cos\theta\dot{\theta}^2 + u\sin\theta = 0\end{aligned} \tag{2}$$

$$\lambda_n = \frac{\cos\theta\dot{\theta}^2 + u\sin\theta}{\mu\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta - 1} \tag{3}$$

Введем обозначение

$$L_T = \int_0^T \lambda_n dt = \int_0^T \frac{\cos\theta\dot{\theta}^2 + u\sin\theta}{\mu\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta - 1} dt, \tag{4}$$

где T – момент отрыва от стенки. Тогда начальная скорость в этот момент может быть записана как

$$\begin{aligned} V_x &= V_x^+ + \int\limits_0^T \lambda_n dt, \\ V_z &= V_z^+ + \int\limits_0^T (-g + \mu\lambda_n) dt \end{aligned} \tag{5}$$

где V^+ – компоненты начальной скорости после соударения.

После отрыва полет происходит по законам баллистики

$$\begin{aligned} z &= z_0 + V_z^+ t - g\frac{t^2}{2} \\ x &= x_0 + V_x^+ t \end{aligned} \tag{6}$$

Оценим максимальное расстояние между стенами, при котором по ним можно подниматься вверх. Будем считать, что для этого необходимо, чтобы координата z в конце полета была не меньше чем в начале.

Для простоты положим $z_0 = 0$, и найдем момент времени t_f, в который z снова обращается в 0.

Согласно соотношениям (6),

$$z = V_z^+ t_f - g\frac{t_f^2}{2} = 0$$

$$t_f = 2\frac{V_z^+}{g}$$

Тогда максимальная дальность полета $x_{max} = \dfrac{2V_x^+ V_z^+}{g}$.

Учитывая (5), получим

$$x_{max} = 2\frac{(V_x^+ + L_T)(V_z^+ - gT + \mu L_T)}{g}$$

Данная функция является квадратичной по L_T, и ее максимум достигается при максимальном значении L_T.

Каков максимум L_T при ограничении $|u| < M$?

$$L_T = \int_0^T \lambda_n dt = \int_0^T \frac{\cos\theta\dot{\theta}^2 + u\sin\theta}{\mu\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta - 1}dt,$$

при этом $\theta(t)$ является траекторией системы (1):

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta} = u - \lambda_t\cos\theta - \lambda_n\sin\theta,\\ &\lambda_t = \mu\lambda_n,\\ &\lambda_n = \frac{\cos\theta\dot{\theta}^2 + u\sin\theta}{\mu\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta - 1} \end{aligned} \tag{7}$$

с заданными в момент столкновения начальными условиями $(x_0, V_x^0, z_0, V_z^0, \theta_0, \omega_0)$, и условием отрыва $\lambda_n = 0$.

Таким образом, мы ищем максимум функционала L_T при ограничении (7) по функции $u(t)$.

4. Задача оптимизации

Чтобы определить управление, при котором достигается максимум, применим принцип максимума Понтрягина.

Будем решать задачу с фиксированным левым концом, и потребуем чтобы правый лежал на поверхности S_1, задаваемой уравнением $\lambda_n = 0$.

Теорема 1. *Пусть $u^* : [t_0, t_f] \to U$ – оптимальное (глобально) управление, и пусть $x^* : [t_0, t_f] \to \mathfrak{R}^n$ – соответствующая оптимальному управлению траектория. Тогда существует функция $p^* : [t_0, t_f] \to \mathfrak{R}^n$ и константа $p_0^* \leqslant 0$, удовлетворяющая $(p_0^*, p^*(t)) \neq (0, 0)$ для любого $t \in [t_0, t_f]$ и удовлетворяющая следующим свойствам:*

1) x^* и p^* являются решением канонических уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= H_p(x^*, u^*, p^*, p_0^*), \\ \dot{p}^* &= -H_x(x^*, u^*, p^*, p_0^*), \end{aligned} \tag{8}$$

с граничными условиями $x^*(t_0) = x_0$ и $x^*(t_f) \in S_1$, где гамильтониан H определен как

$$H(x, u, p, p_0) := < p, f(x, u) > + p_0 L(x, u).$$

2) Для любого фиксированного t функция $u \to H(x^*(t), u, p^*(t), p_0^*)$ имеет глобальный максимум в $u = u^*(t)$, т.е. неравенство

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), p_0^*) \geqslant H(x^*(t), u, p^*(t), p_0^*)$$

выполняется для всех $t \in [t_0, t_f]$ и всех $u \in U$.

3) $H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), p_0^*) = 0$ для всех $t \in [t_0, t_f]$.

Рассматриваемая постановка задачи отличается от типичной тем, что поверхность, на которой находится правый конец траектории, зависит от u. Тем не менее, поскольку H зависит от u линейно, максимум по u должен достигаться на границе множества $|u| \leqslant M$, т.е. при $|u| = M$.

В настоящий момент мы не готовы предоставить строгое доказательство, однако из интуитивных соображений можно предположить, что переключений между значениями $\pm M$ быть не должно.

Таким образом, оптимальное управление $u^* = M$.

5. Моделирование

Для моделирования взаимодействия робота-куба с внешней средой была написана программа, использующая библиотеку Box2D [6].

Для расчетов используется более сложная модель взаимодействия твердых тел, чем рассмотренная в статье, в том числе благодаря возможности столкновений с ненулевой упругостью, учету трения покоя и возможностью переключения между режимами

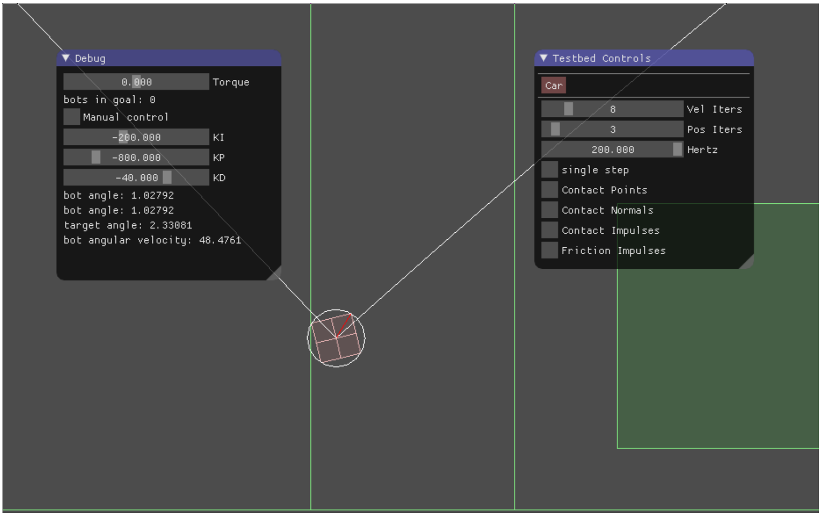

Рис. 2. Визуализация движения куба

движения. Тем не менее, предложенное управление позволяет решить задачу покидания ямы. С кодом программного обеспечения можно ознакомиться по адресу https://github.com/aash29/swarm.

6. Результаты

Проведен анализ задачи о взбирании робота-куба на стену. Учтены ограничения на управление, получено управление, позволяющее взбираться по 2 максимально удаленным стенам. Выполнено моделирование, согласующееся с полученным результатом.

За рамками статьи остались вопросы об управление ориентацией куба в полете и оптимальном положении куба в момент столкновения со стеной. Также представляется интересным вопрос об управлении системой с учетом всех возможных режимов взаимодействия куда со средой (трение покоя, удар), что, однако, существенно сложнее.

Литература

1. http://drl.aaschool.ac.uk/portfolio/nomad/ (дата обращения: 11.01.2019).
2. http://drl.aaschool.ac.uk/portfolio/OWO/ (дата обращения: 11.01.2019).
3. http://drl.aaschool.ac.uk/portfolio/HyperCell/ (дата обращения: 11.01.2019).
4. https://www.youtube.com/watch?v=hXL85ALIkzE (дата обращения: 11.01.2019).
5. https://vimeo.com/304108480 (дата обращения: 11.01.2019).
6. https://box2d.org/about/ (дата обращения: 11.01.2019).
7. CHANG J.-R. *HyperCell: A Bio-Inspired Design Framework for Real-time Interactive Architectures* // Architecture and the Built environment. – 2018. – No. 1. – P. 1–250.
8. LIBERZON D. *Calculus of variations and optimal control theory: a concise introduction* – Princeton University Press, 2011.

CUBE-ROBOT CLIMBING A WALL

Andrey Shevlyakov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., (aash29@gmail.com).

Abstract: Mobile robotics is a constantly evolving field, synergetic with artificial intelligence. Collective and cooperative autonomous robots are a short-term goal at the moment, with new breakthroughs reported yearly. While aerial robots get the most attention, other environments are equally important and pose challenging problems in motion control, sensing and engineering. In this article we propose a control for a cube robot to climb a wall, assuming a symmetric wall facing it is available. We consider two-dimensional motion in vertical plane. The proposed control allows to optimize the rebound trajectory after a collision. We also present a software to model the movement of a cube robot, based in Box2D library.

Keywords: control, unilateral constraints, contact, robotics, jump.

УДК ...
ББК ...

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии ...

Поступила в редакцию ...
Дата опубликования ...