ОЦЕНКА ВЕКТОРА ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИОРИТЕТА[1]

Сигал А. В.[2], Ремесник Е. С.[3]
(*Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского, Симферополь*)

Статья посвящена проблеме оценки значений весовых коэффициентов приоритета. В качестве оценки вектора весовых коэффициентов предлагается использовать последовательности Фишберна. Одним из важнейших свойств последовательностей Фишберна является то, что они всегда удовлетворяют простому линейному отношению порядка, а при определенных условиях и частично усиленному линейному отношению порядка. Введенное в статье понятие последовательностей Фишберна второго порядка позволяет построить оценку вектора весовых коэффициентов в случае смешанной системы предпочтений, когда с точки зрения лица, принимающего решения (ЛПР), значимость частных критериев характеризуют, как отношения строгого предпочтения, так и отношения безразличия. Разработанный метод оценки вектора весовых коэффициентов позволяет учесть субъективные предпочтения ЛПР, а в случае решения задачи многокритериальной оптимизации на основе оптимизации линейной функции свертки критериев, т. е. скалярного критерия оптимальности, представляющего собой аддитивную функцию полезности ЛПР, позволяет построить функцию свертки критериев, полностью отражающую предпочтения ЛПР, принять управленческое решение, учитывающее риск и неопределенность.

Ключевые слова: вектор весовых коэффициентов, последовательность Фишберна, линейное отношение порядка, смешанная система предпочтений, свертка критериев, принятие решений.

1. Введение

В процессе выбора лицом, принимающим решения (ЛПР), оптимальной стратегии рассматриваемые им объекты, как правило, обладают (с точки зрения ЛПР) разной приоритетностью (разной степенью важности). Поэтому в процессе выбора оптимального решения следует учитывать систему субъективных предпочтений ЛПР. Наиболее распространенными моделями

---

[1] *Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ № 18-010-00688.*
[2] *Анатолий Викторович Сигал, д.э.н., профессор* (*ksavo3@gmail.com*).
[3] *Елена Сергеевна Ремесник, ассистент* (*es2704@mail.ru*).

отображения приоритетности объектов (а по сути, учета субъективных предпочтений ЛПР) являются следующие три:

- *ряд приоритета* (**RI**);
- *ряд бинарных отношений приоритета* (**RV**);
- *вектор весовых коэффициентов приоритета* (**U**).

Целью статьи является разработка технически простого и удобного инструментария оценки вектора весовых коэффициентов, адекватно отображающего приоритетность (с точки зрения ЛПР) рассматриваемых им объектов. В качестве такого простого и удобного инструментария предлагается использовать последовательности Фишберна [15, с. 132], в первую очередь, их частный случай – обобщенные прогрессии Фишберна. При этом особое внимание уделено оценке вектора весовых коэффициентов в случае смешанной системы предпочтений, когда с точки зрения ЛПР значимость рассматриваемых им объектов характеризуют, как отношения строгого предпочтения, так и отношения безразличия. В случае смешанной системы предпочтений в качестве инструментария оценки вектора весовых коэффициентов предлагается использовать новое понятие, вводимое в статье: последовательности Фишберна второго порядка.

Принятие управленческих решений в экономике представляет собой, как правило, многокритериальную многоцелевую задачу оптимизации. Подчеркнем, что многокритериальные задачи – это задачи, отягощенные неопределенностью, конфликтностью и порожденным ими риском. Кроме того, как правило, часть информации, необходимая для исчерпывающего и однозначного определения требований к решению, принципиально отсутствует на момент принятия этого решения.

При решении многокритериальных задач возникает ряд специфических проблем, часть из которых имеет концептуальный характер, а другая часть – формальный (т. е. связанный со способами вычислений) характер. Из концептуальных проблем основная – это выбор принципа оптимальности, который определяет свойства оптимальной стратегии и дает ответ на основной вопрос – в каком смысле оптимальная стратегия лучше других стратегий (имеет над ними преимущество). К сожалению, принцип оптимальности часто носит искусственный характер, что, зачастую, делает бессмысленным его применение. Более осмысленным представляется подход, основанный на максимально полном учете субъективных предпочтений ЛПР.

В. Парето предложил критерий оптимальности распределения ресурсов, который называется «Парето-оптимумом» или «оптимумом по Парето». Исследованию оптимальных (эффективных) по Парето решений задач многокритериальной оптимизации, различных аспектов принятия многокритериальных решений посвящена обширная литература, в том числе монографии П. И. Верченко [2], М. Интрилигатора [3], Р. Л. Кини, Х. Райфы [4], О. И. Ларичева [5], А. В. Лотова, И. И. Поспеловой [6], В. Д. Ногина [9], В. В. Подиновского, В. Д. Ногина [10], Р. Штойера [20].

Для поиска оптимальных по Парето решений задачи многокритериальной оптимизации ее, как правило, приводят к задаче однокритериальной оптимизации, чаще всего, к задаче условной оптимизации. Одним из наиболее распространенных методов поиска Парето-оптимальных решений является приведение задачи многокритериальной оптимизации к задаче оптимизации аддитивной функции полезности, представляющей собой некоторую свертку (выпуклую линейную комбинацию) всех критериев. Следует учитывать, что использование аддитивных функций полезности обладает как достоинствами (например, простота и удобство применения), так и недостатками (см., например, [6, с. 92-93]).

От качества решения задачи многокритериальной оптимизации существенным образом зависит качество принятия управленческих решений, реализация которых определяет эффективность функционирования экономической системы. Если при решении задачи многокритериальной оптимизации ее привести к задаче оптимизации функции свертки, то использование последовательностей Фишберна для оценки вектора весовых коэффициентов (в этом случае рассматриваемыми объектами выступают частные критерии эффективности деятельности экономической системы) позволяет простым и удобным методом полностью учесть субъективные предпочтения ЛПР.

2. Способы отображения приоритета и простейшие формулы

Пусть для рассматриваемых однородных объектов O_1, $O_2,\ldots, O_i,\ldots, O_k$, в качестве которых могут рассматриваться частные критерии задачи многокритериальной оптимизации, требуется качественно отобразить их приоритетность. На основе отношения нестрогого предпочтения «$O_i \preceq O_j$» («объект O_j не хуже объекта O_i») согласно субъективным представлениям ЛПР строится совокупность отношений нестрогого предпочтения:

$$O_{i_1} \preceq O_{i_2} \preceq \ldots \preceq O_{i_k}\ .$$

Полученная совокупность нестрогих предпочтений означает, что построен следующий ряд приоритета:

(1) $\mathbf{RI} = \left(O_{i_1}; O_{i_2};\ldots; O_{i_k}\right)$,

где O_{i_1} – объект с наименьшим приоритетом,…, O_{i_k} – объект с наибольшим приоритетом среди всех рассматриваемых однородных объектов.

Без ограничения общности можно считать, что ряд приоритета имеет вид

(2) $\mathbf{RI} = \left(O_1; O_2;\ldots; O_k\right)$.

Действительно, если ряд приоритета (1) имеет другой вид, то за счет перенумерации однородных объектов ряд приоритета может быть приведен к виду (2).

Далее везде будем считать, что для рассматриваемых однородных объектов ряд приоритета имеет вид (2) в случае упорядочивания объектов по неубыванию значений (с точки зрения ЛПР) их приоритетов или вид $\mathbf{RI} = \left(O_k; O_{k-1};\ldots; O_1\right)$ в случае упорядочивания объектов по невозрастанию значений их приоритетов. Для ряда (2) желательно осуществить количественное уточнение в виде следующего ряда бинарных отношений приоритета:

(3) $\mathbf{RV} = \left(v_1; v_2;\ldots; v_k\right)$,

где v_i – числовая оценка результата попарного сравнения приоритетности исследуемых объектов (того, во сколько раз с точки зрения ЛПР объект O_i приоритетнее объекта O_{i-1}). Очевидно, все компоненты вектора **RV**, упорядоченного в соответствии с рядом приоритета (2), удовлетворяют условиям

$$v_i \geq 1,\ i = 1,\ldots, k.$$

Если объекты O_{i-1} и O_i равнозначны (O_{i-1}~O_i), то соответствующая компонента равна единице: $v_i = 1$. Для удобства принято считать справедливым равенство $v_1 = 1$.

Значения компонент u_i, $i = 1,\ldots, k$, вектора весовых коэффициентов (для рассматриваемых однородных объектов)

(4) $$\mathbf{U} = \left(u_1; u_2; \ldots; u_k\right)$$

обязаны удовлетворять следующим ограничениям:
условию нормировки

(5) $$\sum_{i=1}^{k} u_i = 1,$$

и требованиям неотрицательности всех компонент

(6) $$u_i \geq 0,\ i = 1,\ldots, k.$$

Компонента u_i – это, в сущности, весовой коэффициент, определяющий относительное преимущество объекта O_i над остальными однородными объектами. С учетом справедливости предположения о том, что ряд приоритета **RI** имеет вид (2), для компонент вектора (4) имеют место соотношения

(7) $$u_i \leq u_{i+1},\ i = 1,\ldots, k-1.$$

Кроме того, справедливы равенства

(8) $$v_1 = 1,\ v_i = \frac{u_i}{u_{i-1}},\ i = 2,\ldots, k,\ u_i = \frac{\prod_{l=1}^{i} v_l}{\sum_{j=1}^{k}\prod_{l=1}^{j} v_l},\ i = 1,\ldots, k.$$

Соотношения (8) означают, что знание оценки одного из векторов (**RV** или **U**) позволяет найти оценку другого из этих двух векторов. Оценив вектор **U** весовых коэффициентов, легко найти соответствующую оценку вектора **RV**, т. е. оценку ряда бинарных отношений приоритета, после чего следует выполнить проверку соответствия найденных значений компонент v_i,

$i = 1,\ldots, k$, представлениям ЛПР о значениях попарных сравнений приоритетности рассматриваемых объектов.

Если ЛПР утверждает, что для объектов справедливы строгие соотношения приоритетности «$O_{i-1} \prec O_i$» («O_i лучше O_{i-1}»), т. е. справедлива строго монотонная система отношений $O_1 \prec O_2 \prec \ldots \prec O_k$, то оценки значений компонент вектора весовых коэффициентов приоритета удобно вычислить по формуле общего члена арифметической прогрессии с разностью $x = \dfrac{2}{k \cdot (k+1)}$:

(9) $$u_i = \frac{2 \cdot i}{k \cdot (k+1)},\ i = 1,\ldots, k.$$

Если ЛПР утверждает, что произвольный объект O_i не хуже совокупности всех однородных объектов, находящихся в ряде приоритета (2) перед ним, т. е. справедлива система отношений $O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_{i-1} \preceq O_i$, $i = 2,\ldots, k$, что будем кратко обозначать как совокупность $O_1 \prec\prec O_2 \prec\prec \ldots \prec\prec O_k$, где $\prec\prec$ – это символ отношения строгого предпочтения, которое можно назвать отношением «много лучше», то оценки значений компонент вектора весовых коэффициентов приоритета удобно вычислить по формуле общего члена геометрической прогрессии со знаменателем $x = 2$:

(10) $$u_i = \frac{2^{i-1}}{2^k - 1},\ i = 1,\ldots, k.$$

3. Линейные отношения порядка, формулы Фишберна и последовательности Фишберна

Итак, на компонентах вектора весовых коэффициентов приоритета задано то или иное линейное отношение порядка, задаваемое субъективными предпочтениями ЛПР. Эти линейные отношения порядка были подробно изучены П. Фишберном [21, 22, 23] и приведены, например, в монографии Р.И. Трухаева [17, с. 77-80]. Эти формулы и их обобщения можно применять для вычисления не только оценок компонент вектора весовых коэффициентов приоритета, но и для вычисления, например, значений компонент вектора, характеризующего априорное распределение вероятностей возможных состояний экономической среды, что, в частности, позволяет приводить обобщенные модели (представляющие собой задачи трехкритериальной оптимизации) Марковица задачи поиска эффективного портфеля, заданные в поле третьей информационной ситуации, к традиционной модели (представляющей собой задачу двухкритериальной оптимизации) Марковица задачи поиска эффективного портфеля (см., например, [15]).

Итак, пусть $\mathbf{U} = (u_1; u_2;\ldots; u_k)$ – вектор (4) весовых коэффициентов приоритета, а ряд приоритета имеет вид (2) или аналогичный вид для случая убывания приоритетности. Приведем определения наиболее распространенных типов линейных отношений порядка [17, с. 78].

Простым линейным отношением порядка (*простым ЛОП*) называют соотношения $u_1 \le u_2 \le\ldots\le u_i \le\ldots\le u_k$ или $u_1 \ge u_2 \ge\ldots\ge u_i \ge\ldots\ge u_k$. *Частично усиленным ЛОП* называют соотношения $u_i \ge u_1 +\ldots+ u_{i-1}$, $i = 2,\ldots, k$, или $u_i \ge u_{i+1} +\ldots+ u_k$, $i = 1,\ldots, k-1$. *Усиленным* ЛОП называют соотношения $u_{i+1} +\ldots+ u_{i+\alpha(i)} \le u_i \le u_{i+1} +\ldots+ u_{i+\alpha(i)} + u_{i+\alpha(i)} + u_{i+\alpha(i)+1}$, $i = 1,\ldots, k-2$, $\alpha(i) \in \{ 1; 2;\ldots; k-1-i \}$ или $u_{i-\alpha(i)} +\ldots+ u_{i-1} \le u_i \le u_{i-\alpha(i)-1} + u_{i-\alpha(i)} +\ldots+ u_{i-1}$, $i = 3,\ldots, k$, $\alpha(i) \in \{ 1; 2;\ldots; i-2 \}$, где $\alpha(i)$ – заданные натуральные числа, принимающие значения из указанных множеств. *Однородным ЛОП* называют соотношения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \le \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \le \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – заданные неотрицательные матрицы, *Полным ЛОП* называют соотношения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{a} \le \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \le \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{b}$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – заданные квадратные матрицы соответствующего порядка, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – заданные векторы-столбцы соответствующей размерности. Частным случаем полного ЛОП является *интервальное отношение порядка*, согласно которому справедливы соотношения $a_i \le u_i \le b_i$, $i = 1,\ldots, k$, где a_i, b_i – заданные числа такие, что $0 \le a_i < b_i \le 1$, $i = 1,\ldots, k$.

Р.И. Трухаев приводит основные формулы для вычисления точечных оценок компонент вектора весовых коэффициентов приоритета в поле третьей информационной ситуации, т. е. для приведенных выше линейных отношений порядка [17, с. 84-85]. Эти оценки значений компонент вектора весовых коэффициентов приоритета в монографии Р.И. Трухаева названы точечными оценками Фишберна, точнее точечными оценками Фишборна. Дело в том, что Р.И. Трухаев применял написание фамилии Питера Фишберна через букву «о»: Фишборн. Однако, начиная с 1978 года, когда в СССР был издан перевод [19] на русский язык монографии [24] этого автора, в русскоязычной литературе принято написание этой фамилии через букву «е»: Фишберн.

Пусть истинные значения компонент вектора (4) весовых коэффициентов приоритета неизвестны. Для случая простого ЛОП П. Фишберн предложил считать, что оценки неизвестных значений компонент вектора (4) образуют арифметическую прогрессию, а для случая частично усиленного ЛОП – монотонную геометрическую прогрессию. Если соответствующие последовательности являются убывающими прогрессии, то формулы

$$(11)\quad u_i = \frac{2\cdot(k-i+1)}{k\cdot(k+1)},\ i = 1,\ldots,k,$$

$$(12)\quad u_i = \frac{2^{k-i}}{2^k - 1},\ i = 1,\ldots,k,$$

и принято называть [17, с. 84] первой и второй формулой Фишберна, соответственно.

Прогрессиями Фишберна будем называть последовательности (11), (12): *арифметическими прогрессиями Фишберна* – последовательности (11), *геометрическими прогрессиями Фишберна* – последовательности (12).

Приведем примеры прогрессий Фишберна (таблицы 1 и 2).

Таблица 1. Значения точечных оценок, найденных по первой формуле Фишберна

$k \backslash i$	1	2	3	4	5
1	1	–	–	–	–

k \ i	1	2	3	4	5
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	–	–	–
3	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	–	–
4	0,4	0,3	0,2	0,1	–
5	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

Таблица 2. Значения точечных оценок, найденных по второй формуле Фишберна

k \ i	1	2	3	4	5
1	1	–	–	–	–
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	–	–	–
3	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	–	–
4	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	–
5	$\frac{16}{31}$	$\frac{8}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{31}$

Если последовательности возрастают, то формулы Фишберна принимают вид формул (9) и (10), соответственно.

В экономических исследованиях принято считать, что формула (11) отражает тот факт, что об уровне значимости объектов (например, частных критериев) неизвестно ничего, кроме того, что они расположены в порядке убывания уровня значимости. Формула (12) отражает тот факт, что уровень значимости очередного объекта не меньше совокупного (суммарного) уровня значимости всех последующих объектов, вместе взятых. Аналогично можно интерпретировать формулы (9) и (10). Заметим, в определенных ситуациях применение формул (9) и (10) предпочтительнее применения формул (11) и (12), соответственно. Например, при исследовании динамических рядов, когда натуральные значения индекса i задают дискретные моменты времени, строго возрастающие последовательности отражают тот факт, что более поздние моменты времени оказывают на будущие состояния экономической среды бóльшее влияние, чем более ранние моменты времени.

В экономических исследованиях часто применяют прогрессии Фишберна. Так, в работах И.Л. Макаровой [7], А.О. Недосекина [8], Д.К. Потапова, В.В. Евстафьевой [11], А.Е. Сазонова, Г.С. Осипова, В.Д. Клименко [12], В.Л. Сомова, М.Н. Толмачева [16], Е.Б. Тютюкиной, Л.Д. Капрановой, Т.Н. Седаш [18] предлагается использование арифметических прогрессий Фишберна для самых разных целей. Эти и другие исследования свидетельствуют, что точечные оценки Фишберна представляют интерес для математического моделирования самых разных систем и ситуаций.

Формулы (9)-(12) несложно обобщить на случай монотонных прогрессий.

Обобщенными прогрессиями Фишберна будем называть прогрессии $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$, удовлетворяющие всем ограничениям (5) и (6): *обобщенными арифметическими прогрессиями Фишберна* – арифметические прогрессии, удовлетворяющие всем ограничениям (5) и (6), *обобщенными геометрическими прогрессиями Фишберна* – геометрические прогрессии, удовлетворяющие всем ограничениям (5) и (6).

Обобщенные арифметические прогрессии Фишберна представляют собой арифметические прогрессии вида

(13) $$u_i = \frac{1}{k} - \frac{(k-1)\cdot x}{2} + (i-1)\cdot x = \frac{2 - k\cdot(k - 2\cdot i + 1)\cdot x}{2\cdot k},$$

$i = 1, \ldots, k$,

разность которых удовлетворяет неравенству

(14) $$|x| \le \frac{2}{k\cdot(k-1)},$$

а обобщенные геометрические прогрессии Фишберна представляет собой геометрические прогрессии вида

(15) $u_i = \dfrac{x-1}{x^k - 1} \cdot x^{i-1} = \dfrac{1-x}{1-x^k} \cdot x^{i-1}$, $i = 1,\ldots, k$,

знаменатель которых удовлетворяет неравенству

(16) $x > 0$.

Вырожденный случай, когда знаменатель геометрической прогрессии (15) равен единице ($x = 1$), требует отдельного рассмотрения. В этом случае для поиска значения первого члена геометрической прогрессии можно выполнить предельный переход, применяя правило Лопиталя:

$$u_1 = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^k-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x^k-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{k\cdot x^{k-1}} = \frac{1}{k\cdot 1^{k-1}} = \frac{1}{k}.$$

Следовательно, если $x = 1$, то можно считать, что обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна вырождается в константу:

(17) $u_i = \dfrac{1}{k} \equiv \mathrm{const}$, $i = 1,\ldots, k$.

Основные свойства обобщенных прогрессий Фишберна приведены, например, в монографии [15, с. 114-127].

В случае оценки неизвестных значений вероятностей возможных состояний экономической среды по формулам (13)-(16) корректность принятия управленческих решений зависит от ответов на несколько существенных вопросов. Наиболее важными из этих вопросов являются следующие два вопроса. 1. Удовлетворяет ли рассматриваемая обобщенная прогрессия Фишберна соответствующему ЛОП? 2. Удовлетворяет ли рассматриваемая обобщенная прогрессия Фишберна принципу Гиббса–Джейнса?

Очевидно, среди всех обобщенных прогрессий Фишберна принципу Гиббса–Джейнса, согласно которому требуется, чтобы оценка закона распределения вероятностей максимизировала значение энтропии Шеннона, соответствует лишь частный случай, когда обобщенная прогрессия Фишберна вырождается в постоянную величину (17).

Если члены произвольной обобщенной арифметической прогрессии Фишберна всегда удовлетворяют соответствующему простому ЛОП, то члены произвольной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна не всегда удовлетворяют соответствующему частично усиленному ЛОП.

Теорема 1. Произвольная обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$ удовлетворяет соответствующему частично усиленному ЛОП тогда и только тогда, когда значение знаменателя геометрической прогрессии (15) удовлетворяет соотношениям $x \in \left(0; \alpha_k\right] \cup \left[\dfrac{1}{\alpha_k}; +\infty\right)$, где α_k – корень уравнения $x^k - 2 \cdot x + 1 = 0$, удовлетворяющий соотношениям $0{,}5 < \alpha_k \leq 1$. Последовательность $\{\alpha_k\}_{k=2}^{\infty}$ представляет собой строго убывающую ограниченную последовательность, предел которой равен $\lim\limits_{k \to +\infty} \alpha_k = 0{,}5$.

Формулировка теоремы 1 уточняет (в частности, для случая $k = 1$) соответствующий результат, приведенный в работе [13]. Заметим, что $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618034$,

$$\alpha_4 = \frac{\sqrt[3]{17+3\cdot\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17-3\cdot\sqrt{33}} - 1}{3} \approx 0{,}543689,\ \alpha_5 \approx 0{,}518790.$$

Ответ на второй основной вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 2. Задача максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному ЛОП, имеет следующее единственное оптимальное решение: $x^* = \alpha_k \in \left(0{,}5; 1\right]$. Задача максимизации энтропии Шеннона на множестве неубывающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному ЛОП, имеет следующее единственное оптимальное решение $x^* = \dfrac{1}{\alpha_k} = \beta_k \in \left[1; 2\right)$. При достаточно больших натуральных значениях k геометрическая прогрессия Фишберна задает приблизительное решение задачи максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному ЛОП. Для геометрических прогрессий Фишберна справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{k\to+\infty} H\left(\hat{\mathbf{q}}\right) = \ln 4 \approx 1{,}386294$.

Формулировка теоремы 2 уточняет (для случая $k = 1$) соответствующий результат, приведенный в работе [14].

Рассмотрим метод построения последовательностей, удовлетворяющих простому ЛОП и всем ограничениям (5) и (6) (см., например, [15, с. 132]). Пусть $\{a_1; a_2;\ldots; a_k\}$ – произвольная монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом, т. е. справедливы соотношения $0 \le a_1 \le a_2 \le\ldots\le a_i \le\ldots\le a_k$ или $a_1 \ge a_2 \ge\ldots\ge a_i \ge\ldots\ge a_k \ge 0$, при этом $a_1 + a_2 +\ldots+ a_k > 0$, тогда последовательность $\{u_1; u_2;\ldots; u_k\}$, для которой справедливы равенства

$$(18)\quad u_i = \frac{a_i}{\sum\limits_{j=1}^{k} a_j},\ i = 1,\ldots, k,$$

обязательно будет удовлетворять и соответствующему простому ЛОП, и всем ограничениям (5) и (6).

Определение 1. Последовательностью Фишберна будем называть последовательность $\{u_1; u_2;\ldots; u_k\}$, значения элементов которой вычисляются по формулам (18), в которых участвуют члены монотонной последовательности неотрицательных чисел $\{a_1; a_2;\ldots; a_k\}$, сумма которых является положительным числом, при этом последовательность $\{a_1; a_2;\ldots; a_k\}$ будем называть *последовательностью, производящей последовательность Фишберна* $\{u_1; u_2;\ldots; u_k\}$.

Очевидно, свойства последовательности Фишберна и последовательности, ее производящей, совпадают. В частности, последовательность Фишберна и последовательность, ее производящая, одновременно обладают одноименным свойством монотонности. Например, последовательность Фишберна является неубывающей (возрастающей) последовательностью тогда и только тогда, когда последовательность, ее производящая, является неубывающей (возрастающей, соответственно) последовательностью. Последовательность Фишберна и последовательность, ее производящая, одновременно могут представлять собой прогрессию (арифметическую или геометрическую, соответственно). Кроме того, любая последовательность Фишберна и любая последовательность, производящая последовательность Фишберна, всегда удовлетворяют соответствующему простому ЛОП. Наконец, последовательность Фишберна удовлетворяет частично усиленному ЛОП тогда и только тогда, когда последовательность, ее производящая, удовлетворяет частично усиленному ЛОП.

Следует учитывать, что монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом, однозначно определяет соответствующую последовательность Фишберна, но для любой последовательности Фишберна последовательность, ее производящая, определена неоднозначно. Очевидно, справедлива следующая теорема (см., например, [15, с. 137]).

Теорема 3. Для любой последовательности Фишберна $\{u_1; u_2;\ldots; u_k\}$ существует единственная с точностью до постоянного положительного множителя последовательность $\{a_1; a_2;\ldots; a_k\}$, производящая последовательность Фишберна $\{u_1; u_2;\ldots; u_k\}$.

И прогрессии Фишберна, и обобщенные прогрессии Фишберна – это частные случаи последовательностей Фишберна. Для оценки вектора весовых коэффициентов практически всегда достаточно ограничиваться рассмотрением обобщенных прогрессий Фишберна, обладающих желаемыми свойствами.

4. Оценка вектора весовых коэффициентов приоритета, отображающего субъективные предпочтения ЛПР

Итак, последовательность Фишберна – это, по сути, монотонная последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию нормировки. Для построения последовательности Фишберна, обладающей желаемыми свойствами, ЛПР достаточно выбрать монотонную последовательность целых неотрицательных чисел, производящую искомую последовательность Фишберна и обладающую этими же желаемыми свойствами. Как показано в монографии [15, с. 163-193], в качестве последовательностей, производящих разные последовательности Фишберна, ЛПР может использовать, например, арифметические и геометрические прогрессии натуральных чисел, числа Фибоначчи, числа Мерсенна, числа Евклида, числа Ферма (см., например [15, с. 91-95]) и другие известные последовательности натуральных чисел.

Разумеется, последовательность Фишберна можно использовать как оценку вектора весовых коэффициентов приоритета. Если компоненты вектора (4) должны образовывать строго монотонную последовательность, то в качестве оценки вектора $\mathbf{U} = (u_1; u_2; \ldots; u_k)$ весовых коэффициентов приоритета целесообразно использовать строго монотонные последовательности Фишберна $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$, обладающие желаемыми свойствами. В частности, в этом случае удобно использовать обобщенные прогрессии Фишберна, причем, если требуется, чтобы компоненты вектора весовых коэффициентов приоритета удовлетворяли частично усиленному ЛОП, то следует использовать обобщенные геометрические прогрессии Фишберна, знаменатели которых удовлетворяют требованиям теоремы 1. Однако для компонент вектора весовых коэффициентов приоритета условие строгой монотонности может нарушаться.

Рассмотрим смешанную систему предпочтений, когда ряд приоритета наряду с отношениями строгого предпочтения содержит и отношения безразличия. Например, если с точки зрения ЛПР рассматриваемые однородные объекты характеризуются рядом приоритета следующего вида

$$\mathbf{RI} = \left(O_1; O_2; \ldots;\ \left[O_l; O_{l+1}\right]; \ldots; O_k\right),$$

то здесь O_1 – объект с наименьшим приоритетом,…, O_k – объект с наибольшим приоритетом среди всех рассматриваемых однородных объектов, а квадратными скобками выделены два эквивалентных объекта, т. е. справедлива смешанная система отношений предпочтения $O_1 \prec O_2 \prec \ldots \prec O_l \sim O_{l+1} \prec \ldots \prec O_k$. Очевидно, в случае построения оценки вектора весовых коэффициентов приоритета, когда имеет место смешанная система предпочтений, компоненты оценки вектора $\mathbf{U} = (u_1; u_2; \ldots; u_k)$ весовых коэффициентов приоритета не образуют строго возрастающую последовательность. Но и в этом случае возможно построение оценки вектора весовых коэффициентов приоритета с использованием последовательностей Фишберна. Введем удобное понятие ряда распределения монотонной последовательности, а затем – понятие последовательностей Фишберна второго порядка.

Пусть $\{U_1; U_2; \ldots; U_K\}$ – монотонная (не обязательно строго монотонная) последовательность, элементы которой принимают k различных значений, где k, K – заданные натуральные числа для которых справедливо соотношение $k \le K$. Тогда если эти k различных значений элементов, упорядоченных строго по возрастанию, последовательности $\{U_1; U_2; \ldots; U_K\}$ обозначить u_1, $u_2, \ldots, u_k$, то последовательность $\{U_1; U_2; \ldots; U_K\}$ удобно представить в виде таблицы 3, где n_i – частота элемента u_i, $i = 1, \ldots, k$, при этом таблицу 3 будем называть рядом распределения монотонной последовательности $\{U_1; U_2; \ldots; U_K\}$.

Таблица 3. Ряд распределения монотонной последовательности

u_i	u_1	u_2	…	u_k	$\sum_{i=1}^{k}$
n_i	n_1	n_2	…	n_k	K

Здесь, элементы последовательности $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$, расположенные в первой строке таблицы 3, упорядочены строго по возрастанию своих значений, т. е, $u_1 < u_2 < \ldots < u_i < \ldots < u_k$; а n_i – это частота u_i, т. е. количество повторений числа u_i в исходной монотонной последовательности $\{U_1; U_2; \ldots; U_K\}$, поэтому n_1, $n_2, \ldots, n_k$ – это известные натуральные числа, для которых справедливо равенство $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = K$.

Определение 2. Последовательностью Фишберна второго порядка будем называть монотонную (не обязательно строго монотонную) последовательность $\{U_1; U_2; \ldots; U_K\}$, заданную своим известным рядом распределения, при этом значения элементов этой последовательности вычисляются по формулам

$$(19)\quad \begin{cases} u_1 = \ldots = u_{n_1} = \dfrac{\hat{u}_1}{\sum\limits_{i=1}^{k} \hat{u}_i \cdot n_i}, \\ u_{n_1+1} = \ldots = u_{n_1+n_2} = \dfrac{\hat{u}_2}{\sum\limits_{i=1}^{k} \hat{u}_i \cdot n_i}, \\ \ldots \\ u_{\sum\limits_{j=1}^{k-1} n_j+1} = \ldots = u_K = \dfrac{\hat{u}_k}{\sum\limits_{i=1}^{k} \hat{u}_i \cdot n_i}, \end{cases}.$$

где $\{u_1; u_2; \ldots; u_k\}$ – заданная строго монотонная последовательность Фишберна, которую при этом будем называть *последовательностью Фишберна, производящей последовательность Фишберна второго порядка* $\{U_1; U_2; \ldots; U_K\}$.

Таким образом, последовательность Фишберна второго порядка – это, по сути, монотонная последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию нормировки. Строго монотонные последовательности Фишберна можно теперь интерпретировать как частный случай последовательностей Фишберна второго порядка, а именно, как последовательности Фишберна второго порядка, для которых все частоты равны единице, т. е. для ряда распределения которых справедливы равенства $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$ и $k = K$. Строго монотонные последовательности Фишберна можно называть *последовательностями Фишберна первого порядка*.

Если имеет место смешанная система предпочтений, то последовательности Фишберна второго порядка удобно использовать как оценку вектора весовых коэффициентов приоритета.

Рассмотрим конкретный пример построения оценки вектора весовых коэффициентов приоритета, когда имеет место смешанная система предпочтений $O_1 \prec O_2 \sim O_3 \sim O_4 \prec O_5 \prec O_6 \sim O_7$. Подставляя в формулы (19) значения элементов возрастающей последовательности Фишберна $\{\,0{,}1;\,0{,}2;\,0{,}3;\,0{,}4\,\}$, т. е. соответствующей возрастающей обобщенной арифметической прогрессии Фишберна, то, т. к. $u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 + u_4 \cdot n_4 = 1{,}8$, получаем оценку вектора весовых коэффициентов в виде следующей последовательности Фишберна второго порядка:

$$(20)\quad \mathbf{U}' = \left\{ \frac{1}{18}; \frac{2}{18}; \frac{2}{18}; \frac{2}{18}; \frac{3}{18}; \frac{4}{18}; \frac{4}{18} \right\}.$$

Заметим, для соответствующей невозрастающей последовательности Фишберна второго рода производящей последовательностью Фишберна является арифметическая прогрессия Фишберна $\{\,0{,}4;\,0{,}3;\,0{,}2;\,0{,}1\,\}$ (см. таблицу 1).

Аналогичную схему построения оценки вектора весовых коэффициентов предложили З.И. Абдулаева, А.О. Недосекин [1, с. 83]. Придерживаясь введенной терминологии, можно сказать, что их схема представляет собой использование последовательности Фишберна второго порядка, значения элементов которой вычисляются на основе использования арифметических прогрессий Фишберна.

Если же имеет место смешанная система предпочтений вида $O_1 \prec\!\prec O_2 \sim O_3 \sim O_4 \prec\!\prec O_5 \prec\!\prec O_6 \sim O_7$, то для построения оценки вектора весовых коэффициентов приоритета можно использовать, например, возрастающую последовательность Фишберна, порожденную геометрической прогрессией $\{\,1;\,4;\,16;\,64\,\}$, знаменатель которой равен $x = 4$, т. е. обобщенную геометрическую прогрессию Фишберна

$$\{u_1; u_2; u_3; u_4\} = \left\{ \frac{1}{85}; \frac{4}{85}; \frac{16}{85}; \frac{64}{85} \right\}.$$

Подставляя в формулы (19) значения элементов этой прогрессии, то, т. к. $\sum_{i=1}^{4} u_i \cdot n_i = \frac{157}{85}$, получаем оценку вектора весовых коэффициентов в виде следующей последовательности Фишберна второго порядка:

$$(21)\quad \mathbf{U}'' = \left\{ \frac{1}{157}; \frac{4}{157}; \frac{4}{157}; \frac{4}{157}; \frac{16}{157}; \frac{64}{157}; \frac{64}{157} \right\}.$$

Как отмечалось выше, оценив вектор **U** весовых коэффициентов, необходимо согласно формулам (8) найти оценку вектора **RV**, т. е. оценку ряда бинарных отношений приоритета. Например, для случая вектора (20) оценка ряда бинарных отношений приоритета имеет вид $\mathbf{RV}' = \left\{1; 2; 1; 1; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; 1\right\}$. Аналогично, для случая вектора (21) оценка ряда бинарных отношений приоритета имеет вид $\mathbf{RV}'' = \{1; 4; 1; 1; 4; 4; 1\}$.

Если найденная оценка ряда бинарных отношений приоритета не соответствует представлениям ЛПР о значениях попарных сравнений приоритетности исследуемых однородных объектов, то в качестве оценки вектора весовых коэффициентов следует выбрать другой вектор. При этом для случая строго монотонной системы приоритетов новая оценка вектора **U** весовых коэффициентов может представлять собой другую обобщенную прогрессию Фишберна первого порядка, а для случая смешанной системы приоритетов – последовательность Фишберна второго порядка, производящей последовательностью которой является другая обобщенная прогрессия Фишберна.

5. Заключение

Для построения оценок вектора весовых коэффициентов приоритета можно использовать последовательности Фишберна, обладающие желаемыми свойствами. В качестве свойства, обладание которым желательно для весовых коэффициентов, могут выступать, например, простое линейное отношение порядка или частично усиленное линейное отношение порядка.

Последовательности Фишберна первого порядка представляют собой строго монотонные последовательности неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию нормировки (т. е. сумма всех элементов равна 1). В качестве последовательностей, производящих последовательности Фишберна, можно использовать, например, арифметические или геометрические прогрессии натуральных чисел (в этом случае построенные последовательности Фишберна представляют собой обобщенные арифметические или геометрические прогрессии Фишберна, соответственно), числа Фибоначчи, числа Мерсенна, числа Евклида, числа Ферма и другие известные последовательности натуральных чисел.

В статье введено новое понятие: «последовательность Фишберна второго порядка». Последовательности Фишберна второго порядка представляют собой монотонные последовательности неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию нормировки. Последовательности Фишберна второго порядка удобно использовать как оценку вектора весовых коэффициентов в случае смешанной системы предпочтений, когда с точки зрения лица, принимающего решения (ЛПР), значимость рассматриваемых однородных объектов характеризуют, как отношения строгого предпочтения, так и отношения безразличия.

Выбирая последовательность Фишберна, обладающую желаемыми свойствами, ЛПР может ограничиться обобщенными прогрессиями Фишберна, значения параметров которых соответствуют желаемым свойствам, или последовательностями Фишберна второго порядка, производящими последовательности которых являются обобщенные прогрессии Фишберна, значения параметров которых соответствуют желаемым свойствам.

Оценив вектор весовых коэффициентов, необходимо найти соответствующую оценку ряда бинарных отношений приоритета для того, чтобы выполнить проверку соответствия этих векторов представлениям ЛПР о значениях попарных сравнений приоритетности рассматриваемых объектов.

Метод оценки вектора весовых коэффициентов, основанный на использовании последовательностей Фишберна первого и второго порядка, можно применять для поиска эффективного (оптимального) по Парето решения задачи многокритериальной оптимизации. Оценив вектор весовых коэффициентов, исходную задачу многокритериальной оптимизации можно привести к задаче оптимизации аддитивной функции полезности, представляющей собой некоторую свертку всех критериев.

Как известно, оптимизация построенной аддитивной функции полезности не всегда позволяет найти Парето-оптимальное решение задачи многокритериальной оптимизации. Однако в случае, когда оптимизация построенной аддитивной функции полезности приводит к оптимальному по Парето решению задачи многокритериальной оптимизации, можно ограничиться этим оптимальным по Парето решением, если найденные оценки весовые коэффициенты полностью учитывают субъективные предпочтения ЛПР, адекватно отображают приоритетность (с точки зрения ЛПР) частных критериев эффективности.

Еще одной проблемой приведения исходной задачи многокритериальной оптимизации к задаче оптимизации аддитивной функции полезности может оказаться неоднородность рассматриваемых частных критериев эффективности. Эти частные критерии могут иметь разные единицы измерения или, в случае однородных экономических показателей, разные порядки величин. Эта проблема может быть преодолена применением разных методов. В частности, можно применять разные схемы нормализации рассматриваемых экономических показателей (см., например, [2, с. 77-79]), например, такие схемы, как смена ингредиента, естественная нормализация, нормализация Сэвиджа и т. д.

Предлагаемый подход приведения исходной задачи многокритериальной оптимизации к задаче оптимизации аддитивной функции полезности, основанный на оценке вектора весовых коэффициентов последовательностями Фишберна первого и второго порядка, позволяет не разрабатывать искусственный принцип оптимальности, а ориентироваться на полный учет субъективных предпочтений ЛПР.

Литература

1. АБДУЛАЕВА З.И., НЕДОСЕКИН А.О. *Стратегический анализ инновационных рисков: монография*. – СПб: Изд-во Политехн. университета, 2013. – 145 с.
2. ВЕРЧЕНКО П.І. *Багатокритеріальність і динаміка економічного ризику (моделі та методи): Монографія*. – Київ: КНЕУ, 2006. – 272 с.
3. ИНТРИЛИГАТОР М. *Математические методы оптимизации и экономическая теория*; пер. с англ. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 606 с.

4. КИНИ Р.Л. РАЙФА Х. *Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения*; пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
5. ЛАРИЧЕВ О.И. *Теория и методы принятия решений*. – М.: Логос, 2002. – 296 с.
6. ЛОТОВ А.В., ПОСПЕЛОВА И.И. *Многокритериальные задачи принятия решений: Учебное пособие*. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 197 с.
7. МАКАРОВА И.Л. Анализ методов определения весовых коэффициентов в интегральном показателе общественного здоровья // Международный научный журнал «Символ науки». – 2015. – № 7. – С. 87-94.
8. НЕДОСЕКИН А.О. *Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний*: Автореф.… д-ра экон. наук: 08.00.13 – «Математические и инструментальные методы экономики». – СПб, 2003. – 37 с.
9. НОГИН В.Д. *Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход*. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Физматлит, 2005. – 144 с.
10. ПОДИНОВСКИЙ В.В., НОГИН В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Физматлит, 2007. – 256 с.
11. ПОТАПОВ Д.К., ЕВСТАФЬЕВА В.В. *О методиках определения весовых коэффициентов в задаче оценки надежности коммерческих банков* [Электронный ресурс]. – 2015. – URL: http://www.ibl.ru/konf/041208/60.pdf.
12. САЗОНОВ А.Е., ОСИПОВ Г.С., КЛИМЕНКО В.Д. *Использование метода экспертных отношений предпочтения для оценки уровня совершенства системы управления безопасностью морского судна* // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. – 2013. – № 3 (20). – С. 94-104.
13. СИГАЛ А.В. *О приведении обобщенной модели Марковица в поле третьей информационной ситуации к классической модели Марковица* // Системный анализ и информационные технологии: Труды Седьмой Международной конференции

САИТ-2017 (13–18 июня 2017, Светлогорск). – 2017. – С. 159-167.
14. СИГАЛ А.В., РЕМЕСНИК Е.С. *О корректном применении обобщенных прогрессий Фишберна для принятия решений в экономике на основе принципа Гиббса–Джейнса* // Аудит и финансовый анализ. – 2017. – № 5-6. – С. 568-581.
15. СИГАЛ А.В., РЕМЕСНИК Е.С. *Последовательности Фишберна и их применение в современной теории портфеля: монография*. – Симферополь: Корниенко А. А., 2018. – 204 с.
16. СОМОВ В.Л., ТОЛМАЧЕВ М.Н. *Методы определения коэффициентов весомости динамических интегральных показателей* // Вопросы статистики. – 2017. – № 6. – С. 74-79.
17. ТРУХАЕВ Р.И. *Модели принятия решений в условиях неопределенности*. – М.: Наука, 1981. – 258 с.
18. ТЮТЮКИНА Е.Б., КАПРАНОВА Л.Д., СЕДАШ Т.Н. *Определение приоритетных направлений и инвестиционной поддержки развития российской экономики* // Экономический анализ: теория и практика. – 2014. – № 38 (389). – С. 2-11.
19. ФИШБЕРН П. *Теория полезности для принятия решений*; пер. с англ. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
20. ШТОЙЕР Р. *Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления и приложения*; пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.
21. FISHBURN P.C. *Analysis of Decisions with Incomplete Knowledge of Probabilities* // Operations Research. – 1965. – Vol. 13. – No. 2. – P. 217-237.
22. FISHBURN P.C. *Decision and Value Theory*. – N. Y.: John Wiley & Sons, 1964. – 451 p.
23. FISHBURN P.C. *Independence in Utility Theory with Whole Product Sets* // Operations Research. – 1965. – Vol. 13. – No. 1. – P. 28-45.
24. FISHBURN P.C. *Utility Theory for Decision Making*. – N. Y.: John Wiley & Sons, 1970. – 234 p.

EVALUATING A VECTOR OF WEIGHTING PRIORITY COEFFICIENTS

Anatoliy Sigal, V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Doct.Sc., professor (ksavo3@gmail.com).
Elena Remesnik, V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, assistant (es2704@mail.ru).

Abstract: The article is devoted to the problem of estimating the values of the weight coefficients of priority. As an estimate of the vector of weight coefficients, it is proposed to use Fishburn sequences. One of the most important properties of Fishburn sequences is that they always satisfy a simple linear order relation, and under certain conditions, a partially strengthened linear order relation. The notion of second-order Fishburn sequences introduced in the article allows us to construct an estimate of the vector of weights in the case of a mixed system of preferences, when, from the point of view of decision-makers, the importance of partial criteria is characterized by both a strict preference relationship and an indifference relationship. The developed method for estimating the weight coefficients vector allows to take into account the subjective preferences of the decision maker, and in the case of solving a multi-criteria optimization problem based on optimization of the linear convolution function of criteria, i.e. a scalar optimality criterion, which is an additive utility function of the decision maker, allows us to build a criterion convolution function that fully reflects the decision maker's preferences; taking into account risk and uncertainty.

Keywords: weight coefficient vector; Fishburn sequence; linear order relation; mixed preferences; convolution of criteria; decision-making.

УДК 519.83
ББК 22.18

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...
Опубликована ...заполняется редактором...