

УДК 519.685

ББК 22.18

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ В ПРОБЛЕМЕ КОРРЕКТНОСТИ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ РИСКОВЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ДЛЯ CC-VAR¹

Агасандян Г. А.²

(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
ФИЦ ИУ РАН)

Работа продолжает исследования автора, связанные с установленными ранее условиями корректности семейств функций рискованных предпочтений (ф.р.п.), используемых в задачах оптимизации по континуальному критерию VaR (CC-VaR) для финансовых рынков. Эти условия применялись при решении проблемы корректности конкретных семейств, получаемых из надсемейства кусочно-линейных функций, чисто аналитическими средствами. В работе предлагаются численные методы для проверки корректности семейств ф.р.п., полезные при возникновении затруднений в проведении аналитических исследований. Они основаны на дискретном алгоритме оптимизации по CC-VaR для сценарных рынков и решают проблемы корректности с достаточно высокой степенью приближения. Методы проверяются на прежнем надсемействе и применяются к надсемейству обобщенных окружностей. Результаты демонстрируют адекватность и универсальность методики.

Ключевые слова: континуальный критерий VaR (CC-VaR), процедура Неймана-Пирсона, функции рискованных предпочтений (ф.р.п.), семейства и надсемейства ф.р.п., доходность, корректные семейства, волатильность.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00816).

² Геннадий Аршавинович Агасандян, доктор физико-математических наук (Москва, ул. Чертановская, д. 34, тел. (495) 313-44-94).

1. Введение

В работе предлагаются вычислительные алгоритмы, проверяющие на корректность семейства функций рискованных предпочтений (ф.р.п.), используемые на финансовых рынках для задач оптимизации по континуальному критерию VaR (CC-VaR) [1, 2]. Содержание работы непосредственно продолжает исследование [3, 6], где было доказано необходимое и достаточное условие корректности семейства ф.р.п. и проведено аналитическое исследование корректности определенных семейств функций, получаемых из надсемейства кусочно-линейных функций. Приводимые здесь вычислительные процедуры в состоянии решать те же проблемы с достаточной степенью приближения и предназначены для случаев, когда полного аналитического исследования провести не удается.

Как и при изучении многих иных теоретических проблем с CC-VaR, здесь решается *задача СВ* [1, 2], в которой инвестиционная сумма $S (> 0)$ не задается, но ищется (свободный от сингулярной компоненты) портфель, доставляющий $\min S$ при условии $\mathbf{P}\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon$ сразу для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$, где $\phi(\varepsilon)$ – ф.р.п. инвестора. Алгоритм оптимизации основан на континуальном применении процедуры Неймана-Пирсона [7].

Рассматриваются семейства ф.р.п. $\{\phi(\varepsilon; \lambda), \lambda \in \Lambda\}$ по параметру λ , который не является параметром масштабирования, а отражает лишь степень толерантности инвестора к риску, Λ – множество вещественных чисел (как правило, принимается $\Lambda = \mathfrak{R}_+$). Функции из семейств подчиняются ограничению $\phi(0; \lambda) \equiv 0$ и нормируются условием $\phi(1; \lambda) \equiv 1$. На графике они целиком располагаются в квадрате $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

2. Основные формулы и дискретный алгоритм

Вкратце напомним основные определения, формулы, проблему задания семейств ф.р.п. при использовании инвестором CC-VaR и условия корректности семейств. Также приводится лаконичная запись дискретного алгоритма оптимизации.

Решение задачи с CC-VaR основывается на функции *относительных доходов* $\rho(x) = p(x)/c(x)$, $x \in X$, где $p(x)$ и $c(x)$ – соответственно прогнозная и стоимостная плотности цены базового актива. Для среднего дохода $R(\lambda)$, инвестиционной суммы $A(\lambda)$ и относительного дохода $r(\lambda)$ имеет место

$$(1) \quad R(\lambda) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \lambda) d\varepsilon, \quad A(\lambda) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \lambda) d\gamma(\varepsilon), \quad r(\lambda) = \frac{R(\lambda)}{A(\lambda)},$$

где $\gamma(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, – независимая от λ диссонанта оптимального портфеля [1, 4]. Функции $g(\varepsilon)$ со свойствами диссонанты, т.е. неотрицательные и невозрастающие функции ε (возможно, и разрывные), $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, называются *допустимыми*.

Корректным называется семейство по λ ф.р.п., для которого при *любой* допустимой функции $g(\varepsilon)$ оптимальный относительный доход $r(\lambda)$ является монотонной функцией λ . Прочие семейства считаются *некорректными*.

Важную роль в анализе корректности в [1, 3, 6] играют *нормированные* ф.р.п.

$$(2) \quad \phi_n(\varepsilon; \lambda) = \phi(\varepsilon; \lambda) / R(\lambda);$$

так как они участвуют в представлении относительного дохода:

$$(3) \quad r(\lambda) = R(\lambda) / A(\lambda) = \left(\int_0^1 \phi_n(\varepsilon; \lambda) dg(\varepsilon) \right)^{-1}.$$

С использованием именно этих функций в [6] проведено полное аналитическое исследование корректности семейств кусочно-линейных функций с одинаковым интегралом на $[0, 1]$.

Однако далеко не для всех семейств подобный анализ на основе соотношений (2), (3) может быть реализован в столь полном объеме. И потому в настоящей работе функции (2) нами непосредственно не используются. Предлагается численный метод, который отвечает на те же вопросы о корректности прямыми расчетами относительного дохода по (1). При этом для получения адекватных выводов при расчетах следует использовать достаточно мелкую сетку значений параметра семейства.

По этой же причине не используются и важные для проведения теоретического анализа сформулированные и доказанные в [3, 6] *необходимые и достаточные* условия корректности. И для проведения численных расчетов удобную для анализа кон-

тинуальную задачу предстоит вновь трансформировать в дискретную. Можно это делать разными способами.

Для нас предпочтительнее начинать с разбиения множества цен базового актива на сценарии. (К этому нас подталкивает и организация реальных рынков опционов, хотя на нем дискретизация несколько иная – дискретны множества их страйков.)

В таком случае мы можем применять *дискретный* алгоритм как результат проецирования *континуального* теоретического алгоритма, оптимальность которого была доказана ранее [1, 2, 4]. При этом оптимальность дискретного алгоритма поддерживается (с некоторыми оговорками для случаев весьма грубой дискретизации [1, 5]) той же оптимальностью процедуры Неймана-Пирсона, составляющей важную часть алгоритма.

Дискретный алгоритм.

Поскольку во всех примерах работы используются только бета-распределения, в качестве множества цен базового актива принимается конечный полуинтервал $X = [0, 1)$. Свой прогноз инвестор делает в форме плотности вероятности $p(x)$, а рынок формирует стоимостную плотность $c(x)$, $x \in X$.

Сценарии $S_i \subset X$ определяются равномерным разбиением множества X на n интервалов $S_i = [x_{i-1}, x_i)$, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, где $x_i = ih$, $h = 1/n$, $i \in I_0 = I \cup \{0\}$. Их вероятности и стоимости соответствующих индикаторов получаются интегрированием в пределах сценариев. В результате имеем векторы $\mathbf{p} = \{p_i, i \in I\}$ и $\mathbf{c} = \{c_i, i \in I\}$, где

$$(4) \quad p_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx, \quad c_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x) dx.$$

В краткой форме дискретный алгоритм оптимизации можно записать последовательностью обозначений и операций:

$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{p}/\mathbf{c} = \{\rho_i = p_i/c_i, i \in I\}$ – вектор относительных доходов;

$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\rho})$ – вектор упорядочения, задающий на множестве сценариев позиции компонент вектора $\boldsymbol{\rho}$ в порядке возрастания;

$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\xi})$ – фактически, обратный к $\boldsymbol{\xi}$ вектор;

$\mathbf{d} = \mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})$ – суперпозиция векторов \mathbf{p} и $\boldsymbol{\xi}$; ее компоненты упорядочены по возрастанию компонент вектора $\boldsymbol{\rho}$;

$\Gamma = [t_{ij}]$, $t_{ij} = \{1, i \leq j; t_{ij} = 0, i > j\}$ – треугольная матрица из нулей и единиц, применяемая для последовательного суммирования компонент векторов, начиная с первой;

$\varepsilon = \mathbf{Td}$ – вектор кумулятивных вероятностей для вектора \mathbf{d} ;

$\mathbf{b} = \phi(\varepsilon)$ – вектор весов базисных инструментов в оптимальном портфеле в порядке возрастания компонент вектора ρ ;

$\mathbf{g} = \mathbf{b}(\eta)$ – вектор тех же весов, но в исходном порядке.

Основными числовыми показателями построенных портфелей служат инвестиционная сумма A , средний доход R и средняя доходность y ; они получаются по формулам (аналог (1))

$$A = (\mathbf{g}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{f}), \quad R = (\mathbf{g}, \mathbf{p}) = (\mathbf{b}, \mathbf{d}), \quad y = R/A - 1,$$

здесь (\mathbf{u}, \mathbf{v}) – скалярное произведение векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} .

В числовых примерах для обеих плотностей $p(\cdot)$ и $c(\cdot)$ используется известное из теории вероятности двухпараметрическое бета-распределение:

$$\text{Be}(u, v): \quad x^{u-1} (1-x)^{v-1} / B(u, v), \quad u, v > 0,$$

где

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1} (1-x)^{v-1} dx = \Gamma(u)\Gamma(v) / \Gamma(u, v),$$

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} \exp(-x) dx$$

соответственно бета- и гамма-функции.

Далее полагаем $p(x) \sim \text{Be}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 > 1$, $c(x) \sim \text{Be}(\beta_1, \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 > 1$. В числовых примерах дискретный алгоритм оптимизации применяется многократно для разных ф.р.п. $\phi(\cdot)$. При этом перерасчета (4) не требуется, поскольку для каждой решаемой далее задачи (1 или 2) векторы \mathbf{p} и \mathbf{c} одни и те же, а при смене задачи производится лишь перемена ролей $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{c}$.

3. Линейные функции с одним изломом

Рассматривается двухпараметрическое надсемейство кусочно-линейных функций от $\varepsilon \in [0, 1]$ с одним изломом вида

$$(5) \quad \phi(\varepsilon; \zeta, \nu) = \left\{ \nu \varepsilon / \theta, \varepsilon \leq \theta; \nu + (1-\nu) \frac{\varepsilon - \theta}{1-\theta}, \varepsilon > \theta \right\}.$$

где $\varepsilon = \theta = 1 + \nu - 2\zeta$ – абсцисса точки излома функций, ν – ее ордината. При $\zeta = 0.5$ имеет место $\phi(\varepsilon; \zeta, \nu) \equiv \varepsilon$ независимо от ν .

При фиксировании значения параметра ζ мы получаем семейство с единственным параметром v .

Этот пример надсемейства уже был рассмотрен в [6] исключительно аналитическими средствами и было доказано, что для каждого значения $\zeta \in [0, 1]$ однопараметрические семейства (5) по параметру v (играющему роль λ) являются корректными. Напомним еще, что постоянство параметра ζ (и среднего дохода) удобно для сравнения рисковых свойств ф.р.п. [6].

В данном разделе мы решаем задачу для этого же надсемейства в дискретной модели рынка, при этом мы преследуем двоякую цель. Во-первых, тем самым проверяется соответствие получаемых результатов выводам [6]. Во-вторых, мостим дорогу в следующий раздел с примером надсемейства, для которого дискретизация рынка становится, пожалуй, единственно возможным способом решения проблемы корректности, притязая, фактически, на универсальность.

В результате применения алгоритма для произвольной функции рисковых предпочтений инвестора получается (средняя) доходность инвестиции, благодаря чему можно сравнивать различные ф.р.п. между собой по этой характеристике и проверять корректность семейств функций.

В числовом примере набор s значений параметра ζ задается как $s_i = (i - 1/2)/I$, $i = 1..I$, в количестве $I = 11$. Имеем

$s = \{0.045, 0.136, 0.227, 0.320, 0.409, 0.5, 0.591, 0.682, 0.773, 0.864, 0.955\}$,

при этом $i_m = (I + 1)/2$ ($= 6$ в примере) – средний индекс.

Для каждого фиксированного значения i (и s_i) и соответствующего ему семейства определяем равномерную на каждом прямолинейном участке сетку ординат точек излома функций надсемейства в количестве $J = 9$ правилом

$$v_{i,j} = \{(2j - 1)/J, i \leq i_m; 2s_i - 1 + (1 - s_i)(2j - 1)/J, i > i_m\},$$

где $j = 1..J$. В совокупности они образуют матрицу

$$U = \{v_{i,j}, i = 1..I, j = 1..J\}.$$

Каждому исследуемому нами семейству функций отвечает набор $\{v_{i,j}, j = 1..J\}$, располагаемый в i -й строке матрицы, с фиксированным значением параметра ζ , равным s_i , $i = 1..I$.

Графики функций надсемейства для всех элементов этой матрицы уже приводился на рис. 2 в [6] (Похожие графики, но уже сглаженных функций, принадлежащих другому надсемейству, приводятся далее на рис. 2.)

Для этих функций, используемых в качестве ф.р.п., будем вычислять с целью последующего сравнения доходности инвестиции, получаемые как результат решения полной задачи дискретной оптимизации.

Между элементами матрицы \mathbf{U} устанавливается бинарное отношение сообразно определению из [6]. Для семейства по параметру θ считаем, что $\theta' > \theta''$ ($\theta' < \theta''$), если доходность при значении параметра θ' больше (меньше), чем при θ'' .

Для большей надежности выводов рассматриваются две в некотором смысле противоположные задачи.

Задача 1: покупка волатильности.

Решается задача на применение CC-VaR, в которой $p(x)$ и $c(x)$ – плотности бета-распределения, притом первая – с параметрами $\alpha_1 = 2.8$, $\alpha_2 = 2.9$, вторая – $\beta_1 = 3.2$, $\beta_2 = 3.1$, т.е.

$$p(x) = 23.6744x^{1.8}(1-x)^{1.9}, \quad c(x) = 37.8853x^{2.2}(1-x)^{2.1},$$
$$\rho(x) = p(x)/c(x) = 0.624897/x^{0.4}/(1-x)^{0.2}.$$

Отметим, что название задачи находит отражение в поведении функции $\rho(x)$ и говорит о наличии тенденции к *повышению* волатильности (степени нестабильности) с точки зрения инвестора. Ее график приводится на рис. 1 слева.

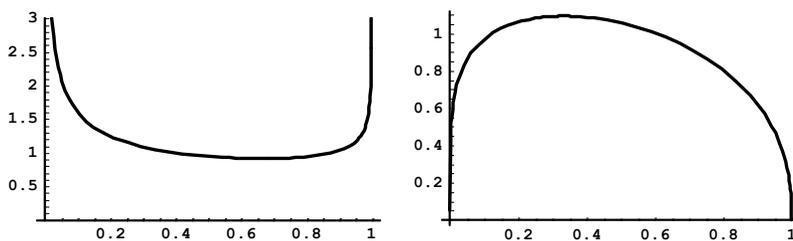


Рис. 1. . Графики функций $\rho(x)$ для задач 1 и 2.

Применением дискретного алгоритма оптимизации ко всем ф.р.п., отвечающим элементам матрицы \mathbf{U} , определяются их

(средние) доходности, при этом $n = 400$ (как компромисс между скоростью и точностью). В совокупности все они образуют матрицу $Y = \{y_{i,j}, i = 1..I, j = 1..J\}$. Эта матрица, помноженная для большей информативности на 10^3 , представлена в таблице 1. (Без такого увеличения при выбранной точности отображения чисел в таблицах наши матрицы будут содержать многие пары совпадающих элементов.)

Таблица 1. Матрица $10^3 \times Y$ в задаче 1.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	436	394	352	310	268	226	182	138	88.6
2	244	227	210	192	174	153	131	107	77.7
3	164	156	148	138	128	117	104	89.4	70.9
4	116	112	108	103	97.7	91.7	84.8	76.5	65.7
5	82.0	80.6	79.0	77.2	75.1	72.6	69.7	66.0	61.2
6	57.2	57.2	57.2	57.2	57.2	57.2	57.2	57.2	57.2
7	39.1	39.8	40.6	41.5	42.5	43.7	45.1	46.7	48.7
8	26.1	27.0	27.9	29.0	30.2	31.6	33.1	34.8	36.7
9	16.3	17.1	17.9	18.8	19.8	20.8	22.0	23.3	24.6
10	8.62	9.12	9.66	10.2	10.8	11.5	12.1	12.8	13.6
11	2.46	2.57	2.76	2.93	3.13	3.33	3.53	3.73	3.94

Комментарий. Из таблицы следует, что

(а) если $i < i_m$, то $y_{i,j+1} < y_{i,j}$ и потому $v_{i,j+1} < v_{i,j}, j = 1..J - 1$;

(б) если $i > i_m$, то $y_{i,j+1} > y_{i,j}$ и $v_{i,j+1} > v_{i,j}, j = 1..J - 1$.

Случай $i = i_m$ составляет естественное исключение.

А для семейств с фиксированным индексом $j = 1..J - 1$ (индексом параметра v точки излома) и переменным ς для всех $i = 1..I - 1$ справедливо неравенство $y_{i+1,j} < y_{i,j}$ и потому $v_{i+1,j} < v_{i,j}$.

В целях унификации задания семейств в случае (б) можно прибегнуть, например, к замене $v \rightarrow 2 - v$, что меняет зависимость семейства от параметра v с прямой на обратную.

Задача 2: продажа волатильности.

Решается задача, в которой вновь $p(x)$ и $c(x)$ – плотности бета-распределения, но на этот раз первая – с параметрами $a_1 = 3.1, a_2 = 3.2$, вторая – $\beta_1 = 2.9, \beta_2 = 2.8$:

$$p(x) = 37.8853x^{2.1}(1-x)^{2.2}, \quad c(x) = 23.6744x^{1.9}(1-x)^{1.8},$$

$$p(x) = 1.60026/(x^{0.2}(1-x)^{0.4}).$$

График $\rho(x)$ для этой задачи представлен на рис. 1 справа. Его внешний вид говорит о тенденции к *снижению* волатильности (степени нестабильности) с точки зрения инвестора.

Все полученные в результате применения дискретного алгоритма оптимизации доходности образуют матрицу $\mathbf{Y} = \{y_{ij}, i = 1..I, j = 1..J\}$. Эта матрица с увеличенными в 10^3 раз элементами представлена в таблице 2.

Таблица 2. Матрица $10^3 \times \mathbf{Y}$ в задаче 2.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	90.1	86.2	82.4	78.7	75.1	71.6	68.2	64.8	62.2
2	88.0	83.7	79.6	75.7	72.1	68.6	65.4	62.4	59.5
3	84.3	80.0	76.1	72.5	69.2	66.3	63.6	61.1	58.9
4	78.7	74.8	71.5	68.5	66.0	63.7	61.7	59.9	58.4
5	70.3	67.6	65.4	63.6	62.1	60.8	59.7	58.7	57.9
6	57.5	57.5	57.5	57.5	57.5	57.5	57.5	57.5	57.5
7	42.8	46.4	48.8	50.6	52.1	53.3	54.3	55.2	56.0
8	31.3	36.6	40.3	43.2	45.5	47.6	49.3	50.9	52.2
9	21.7	27.4	31.5	34.8	37.6	40.0	42.1	44.0	45.7
10	13.1	18.1	21.8	24.9	27.5	29.8	31.9	33.8	35.6
11	4.76	7.50	9.65	11.5	13.1	14.6	16.0	17.3	18.5

Комментарий тот же, что и к задаче 1: связанные с бинарным отношением \succ свойства таблиц 1 и 2 совпадают, т.е. по этому отношению столь разные задачи эквивалентны.

4. Дуги обобщенных окружностей

Рассмотрим теперь надсемейство ф.р.п. инвестора вида

$$(6) \quad \phi(\varepsilon; \mu, \nu) = 1 - (1 - \varepsilon^\mu)^{1/\nu}, \quad \mu, \nu > 0.$$

При $\mu, \nu > 1$ такие функции можно формально описывать как четверть обобщенной окружности с центром в $(0, 1)$ квадрата Q . Они удовлетворяют уравнению $\varepsilon^\mu + (1 - \phi(\varepsilon; \mu, \nu))^\nu = 1$ (при $\mu = \nu = 2$ получается уравнение обычной окружности).

При $\mu = \nu = 1$ окружность вырождается в отрезок прямой $\phi(\varepsilon; 1, 1) \equiv \varepsilon$, а при $\mu, \nu < 1$ окружность перестает быть выпуклой фигурой, и ее основная и интересующая нас дуга становится

вогнутой функцией. Такие функции в качестве ф.р.п. представляют несомненный интерес для консервативных инвесторов. Случай расположения μ и ν по разные стороны от единицы дает весьма экзотичные формы кривых, с трудом поддающиеся интерпретации в качестве ф.р.п. инвестора, и мы его в дальнейшем не рассматриваем.

Как и в примере раздела 3, существенной характеристикой является интеграл от функции (6) на $[0, 1]$ (равный площади под кривой ее графика). Он совпадает со средним доходом $R(\mu, \nu)$ портфеля в задаче оптимизации по CC-VaR. Его считаем вспомогательным параметром и обозначаем ζ . Вычисления для функций (6) при всех $\mu, \nu > 0$ дают

$$(7) \quad R(\mu, \nu) = R(\nu, \mu) = 1 - \Gamma(1+1/\mu)\Gamma(1+1/\nu)/\Gamma(1+1/\mu+1/\nu).$$

Кривые данного надсемейства при $\varepsilon = 1$ и $\nu > 1$ ведут себя более круто по сравнению, например, с кривыми семейства (5). Их производные по ε при $\varepsilon = 1$ и $\nu > 1$ бесконечны, что позволяет в большей мере использовать функции такого надсемейства весьма расположенными к риску инвесторами. (При $\nu < 1$ эти производные равны нулю, а при $\varepsilon = 0$ они определяются аналогичным образом значениями параметра μ .)

В данном случае проведение полного теоретического анализа затруднено, но о схожести поведения функций надсемейств (5) и (6) для наших целей можно судить по результатам многочисленных расчетов, графикам, и по самой логике проблемы.

Важно также отметить, что при этом, вообще говоря,

$$(8) \quad R(\mu, \nu) \neq 1 - R(1/\mu, 1/\nu), \quad 0 < \mu, \nu < 1.$$

Это неравенство напоминает о проблеме *аналитического продолжения* семейств в зону малого риска, что мы обычно связываем со значениями параметра семейств меньше единицы (формулы (5), (6) в [6]).

Конкретно для нашего надсемейства (6) такую проблему можно и не ставить, поскольку оно при $\mu, \nu < 1$ и так обладает нужными свойствами. Но для целей универсализации продемонстрируем на нем возможные продолжения. При этом наличие двух параметров позволяет разнообразить варианты.

Для области $\mu, \nu < 1$ можно предлагать три варианта функций с индексами 'inv', 'cs', 'cs0' соответственно: образование обратной функции, центрально-симметричное отображение, его разновидность с перестановкой $\mu \leftrightarrow \nu$. Это

$$(9) \phi_{\text{inv}}(\varepsilon; \mu, \nu) = \phi^{\leftarrow}(\varepsilon; 1/\mu, 1/\nu) = \left(1 - (1 - \varepsilon)^\nu\right)^{1/\mu}, \quad 0 < \mu, \nu < 1,$$

$$(10) \phi_{\text{cs}}(\varepsilon; \mu, \nu) = \left(1 - (1 - \varepsilon)^\nu\right)^{1/\mu} = \phi_{\text{inv}}(\varepsilon; \mu, \nu), \quad 0 < \mu, \nu < 1,$$

$$(11) \phi_{\text{cs0}}(\varepsilon; \mu, \nu) = \left(1 - (1 - \varepsilon)^\mu\right)^{1/\nu}, \quad 0 < \mu, \nu < 1.$$

Графики функции (9) получаются зеркальным отображением графиков исходных функций надсемейства с параметрами $1/\mu, 1/\nu$ относительно биссектрисы прямого угла с вершиной в $(0,0)$. Очевидно также, что формула (10) для нашего надсемейства не дает нового продолжения. В отличие от варианта (11), связанного с перестановкой $\mu \leftrightarrow \nu$. При этом для всех этих вариантов выполняются (в отличие от исходного) очевидные из геометрических соображений равенства

$$R_{\text{inv}}(\mu, \nu) = R_{\text{cs}}(\mu, \nu) = R_{\text{cs0}}(\mu, \nu) = 1 - R(1/\mu, 1/\nu) = \\ = \Gamma(1 + \mu)\Gamma(1 + \nu) / \Gamma(1 + \mu + \nu), \quad 0 < \mu, \nu < 1.$$

Дискретизация задачи.

Для параметра ζ строится сетка из I значений. Для каждого из них определяются сетки параметров μ и ν надсемейства, состоящие из J значений каждая. Они образуют соответственно матрицы $\mathbf{M} = \{\mu_{i,j}, i = 1..I, j = 1..J\}$ и $\mathbf{N} = \{\nu_{i,j}, i = 1..I, j = 1..J\}$.

Для удобства I и J вновь выбираются нечетными числами, $I = 11, J = 9$. Средние индексы в наборах обозначаются соответственно $i_m = (I + 1)/2, j_m = (J + 1)/2$. Вектор s как совокупность тестируемых значений параметра ζ выбирается, как и в разделе 3, правилом $s_i = (i - 1/2)/I, i = 1..I$. Имеем

$$s = \{0.045, 0.136, 0.227, 0.318, 0.409, 0.5, 0.591, 0.682, 0.773, 0.864, 0.955\}.$$

Вновь нас интересуют в основном семейства, получаемые из надсемейства фиксацией индекса i (и s_i).

Введем вектор $v = \{v_i, i = 1..I\}$, где v_i определяется для нового надсемейства по формуле (7) из уравнения $R(v, v) = s_i, i = 1..I$. Получаем

$$v = \{5.272, 2.716, 1.920, 1.490, 1.207, 1, 0.836, 0.699, 0.578, 0.461, 0.325\}.$$

Компоненты вектора v для рассматриваемого надсемейства служат средними значениями сеток параметров μ и v . Параметры $\mu_{i,j}$ и $v_{i,j}$ выбираются по разным формулам в зависимости от того, в первой или второй половине своей шкалы находятся индексы $i = 1..I$ и $j = 1..J$. При этом сохраняются и определенная симметрия в их задании, и некоторая равномерность сетки. Предлагается следующая последовательность действий.

Для всех $i = 1..I$ и $j \leq j_m$ сначала задаются значения μ :

$$\mu_{i,j} = 1 + (j - 1)(v_i - 1)/J,$$

а затем по ним находятся $v_{i,j}$ как корень уравнения $R(\mu_{i,j}, v) = s_i$:

$$\Gamma(1 + 1/\mu_{i,j})\Gamma(1 + 1/v)/\Gamma(1 + 1/\mu_{i,j} + 1/v) = 1 - s_i.$$

Найденные таким образом величины $\mu_{i,j}$ и $v_{i,j}$ образуют подматрицы M' и N' размера $I \times j_m$ матриц M и N соответственно. Два крайние правых столбца в матрицах M' и N' по понятным причинам одинаковы и совпадают с вектором v . Остальные элементы матриц M и N (т.е. для $j > j_m$) образуют подматрицы M'' и N'' размера $I \times (j_m - 1)$ матриц M и N соответственно. Они определяются из соображений симметрии и в соответствии с симметрией функции $R(\mu, v)$ относительно перестановки $\mu \leftrightarrow v$. Именно:

$$\mu_{i,j} = v_{i,J+1-j}, \quad v_{i,j} = \mu_{i,J+1-j}, \quad i = 1..I, \quad j = j_m + 1..J.$$

Результаты расчетов матрицы M приведены в таблице 3.

Таблица 3. Матрица M .

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.0	2.068	3.136	4.204	5.272	6.575	8.617	12.285	21.00
2	1.0	1.429	1.858	2.287	2.716	3.209	3.876	4.834	6.333
3	1.0	1.230	1.460	1.690	1.920	2.174	2.487	2.882	3.400
4	1.0	1.123	1.245	1.368	1.490	1.621	1.770	1.942	2.143
5	1.0	1.052	1.104	1.155	1.207	1.261	1.318	1.379	1.444
6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
7	1.0	0.959	0.918	0.877	0.836	0.797	0.76	0.725	0.692

8	1.0	0.925	0.850	0.775	0.699	0.629	0.568	0.514	0.467
9	1.0	0.894	0.789	0.683	0.578	0.483	0.408	0.346	0.294
10	1.0	0.865	0.730	0.595	0.461	0.347	0.265	0.204	0.158
11	1.0	0.831	0.662	0.494	0.325	0.198	0.123	0.076	0.048

В соответствии с правилами построения обеих матриц **M** и **N** полная матрица **N** получается из **M** зеркальным отображением относительно центрального (j_m -го) столбца:

$$v_{ij} = \mu_{i, J+1-j}, \quad i = 1..I, \quad j = 1..J,$$

и потому здесь уже не приводится.

На рис. 2 изображены графики функций надсемейства для построенных сеток значений параметров ζ , μ и ν .

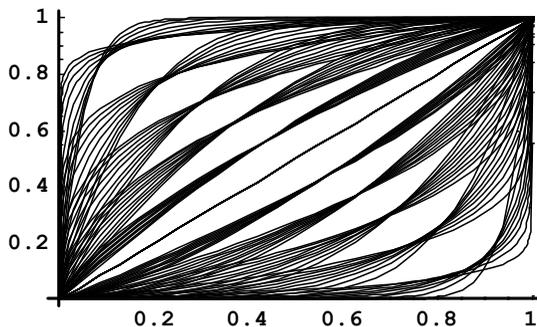


Рис.2. Графики функций $\phi(\varepsilon, \mu, \nu)$ надсемейства.

Как и в разделе 3, рассматриваются две задачи.

Задача 1: покупка волатильности.

Решается задача, в которой плотности $p(x)$ и $c(x)$ заимствуются из раздела 3, т.е.

$$p(x) = 23.6744x^{1.8}(1-x)^{1.9}, \quad c(x) = 37.8853x^{2.2}(1-x)^{2.1},$$

$$\rho(x) = p(x)/c(x) = 0.624897/x^{0.4}/(1-x)^{0.2}.$$

В результате применения дискретного алгоритма оптимизации для каждой функции рискованных предпочтений инвестора, параметры которой отвечают элементам матриц **M** и **N**, определяется доходность инвестиции. Все полученные доходности образуют матрицу $\mathbf{Y} = \{y_{ij}, i = 1..I, j = 1..J\}$. Эта матрица, умноженная на 10^3 , представлена в таблице 4.

Таблица 4. Матрица $10^3 \times Y$ в задаче 1.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	117.	168.	205.	235.	260.	285.	317.	358.	415.
2	105.	123.	139.	153.	164.	176.	189.	205.	223.
3	92.7	101.	109.	116.	122.	128.	134.	142.	150.
4	80.8	84.6	88.0	91.2	94.2	97.1	100.	103.	107.
5	69.1	70.3	71.5	72.6	73.7	74.8	75.9	77.1	78.3
6	57.4	57.4	57.4	57.4	57.4	57.4	57.4	57.4	57.4
7	46.0	45.5	45.0	44.5	43.9	43.3	42.7	42.1	41.6
8	34.9	34.3	33.7	33.0	32.2	31.3	30.5	29.7	29.0
9	24.1	23.7	23.2	22.6	21.9	21.0	20.2	19.5	18.8
10	13.8	13.6	13.4	13.0	12.6	12.0	11.4	10.8	10.3
11	4.20	4.19	4.17	4.12	4.01	3.82	3.60	3.37	3.15

Задача 2: продажа волатильности.

Решается задача, в которой плотности $p(x)$ и $c(x)$ также заимствуются из раздела 3, т.е.

$$p(x) = 37.8853x^{2.1}(1-x)^{2.2}, \quad c(x) = 23.6744x^{1.9}(1-x)^{1.8},$$

$$\rho(x) = 1.60026/x^{0.2}/(1-x)^{0.4}.$$

Все полученные в результате применения дискретного алгоритма оптимизации доходности образуют матрицу $Y = \{y_{i,j}, i = 1..I, j = 1..J\}$. Эта матрица, помноженная на 10^3 , представлена в таблице 5.

Таблица 5. Матрица $10^3 \times Y$ в задаче 2.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	70.2	80.6	84.9	87.1	88.4	89.4	90.3	91.1	91.7
2	67.7	73.4	77.2	79.8	81.8	83.4	85.0	86.6	88.1
3	65.7	69.1	71.8	74.0	75.8	77.4	79.0	80.6	82.2
4	63.4	65.3	67.0	68.5	69.9	71.1	72.4	73.7	75.0
5	60.8	61.6	62.4	63.2	63.9	64.6	65.3	66.0	66.7
6	57.6	57.6	57.6	57.6	57.6	57.6	57.6	57.6	57.6
7	53.8	53.1	52.4	51.7	51.0	50.2	49.4	48.7	48.0
8	48.8	47.7	46.5	45.2	43.7	42.1	40.6	39.2	37.9
9	42.4	41.0	39.4	37.5	35.4	33.1	31.1	29.2	27.4
10	33.1	31.8	30.1	28.1	25.5	22.8	20.4	18.4	16.6
11	17.8	17.0	15.8	14.3	12.0	9.69	7.93	6.60	5.59

Комментарий, являясь общим для задач 1 и 2 данного раздела, отличается от комментария для тех же задач из раздела 3 лишь тем, что в (а) и (б) отношения \succ и \prec меняются местами. Это обстоятельство обусловлено различием в поведении функций двух надсемейств при изменении их параметров. При возрастании индекса j возрастают и параметры ν и μ соответственно надсемейств (5) и (6) (параметр μ нами выбран по алфавиту ведущим в паре (μ, ν)), но производные по ε функций этих надсемейств в нуле растут и убывают соответственно. Итак,

(а) если $i < i_m$, то $y_{i,j+1} > y_{i,j}$ и $\mu_{i,j+1} \succ \mu_{i,j}$, $j = 1..J - 1$;

(б) если $i > i_m$, то $y_{i,j+1} < y_{i,j}$ и $\mu_{i,j+1} \prec \mu_{i,j}$, $j = 1..J - 1$.

Также при фиксировании индекса $j = 1..J - 1$ для всех $i = 1..I - 1$ выполняется неравенство $y_{i+1,j} < y_{i,j}$ и потому $\mu_{i+1,j} \prec \mu_{i,j}$.

Применение *альтернативных* продолжений (9) и (11) надсемейства в область параметров $0 < \mu, \nu < 1$ при сохранении принципа построения сетки параметров требует перерасчета нижней половины матриц \mathbf{M} и \mathbf{N} , а с ними и матриц \mathbf{Y} для обеих задач. При этом матричная картина отношений \succ и \prec для (9) не меняется, а для (11) в нижней половине матрицы картина меняется на противоположную (как раз вследствие смены ролей для параметров μ и ν).

5. Заключение

Работа совместно с предыдущей работой завершает намеченное исследование корректности семейств ф.р.п. инвестора.

Сформировано и доказано необходимое и достаточное условие корректности семейств, которое использовано для проведения аналитического исследования корректности в конкретных задачах. Условие помогает инвестору осознанно формализовать свои рискованные предпочтения в приложении к финансовому рынку и в качестве ф.р.п. выбирать функции из корректных семейств с расчетом на адекватное вознаграждение.

Специально подобраны два примера надсемейств функций, обладающих, помимо прочих достоинств, дополнительным свойством симметрии относительно биссектрисы прямого угла с вершиной в точке $(1, 0)$ в координатах «уровень вероятности –

значение функции». Симметрия функций переносится на семейства, происходящие из этих надсемейств, что позволяет четко подтвердить гипотезу качественного характера: более «доходная» (приносящая инвестору более высокую среднюю доходность) ф.р.п. порождает более низкие доходы в окрестности нуля аргумента и более высокие – единицы. И наоборот.

Разработаны численные методы проверки корректности семейств функций посредством перехода от теоретических рынков к сценарным. Эти методы продемонстрированы на примерах семейств из двух специально подобранных надсемейств и рассчитаны на те множественные случаи, когда ограничиться аналитическими средствами не удается.

Литература

1. АГАСАНДЯН Г.А. *Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках.* – М. : ВЦ РАН, 2011. – 299 с.
2. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов.* – М. : ВЦ РАН, 2015. – 297 с.
3. АГАСАНДЯН Г.А. *Об условиях корректности семейств функций рискованных предпочтений в CC-VaR /* Материалы X международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2017)». (Москва, 2-4 октября, 2017; ИПУ РАН). М.: ИПУ РАН, 2017. – С. 184-187.
4. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора //* Управление большими системами, 73 (2018). – С. 6-26.
5. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на сценарных рынках //* Информатика и ее применения. М.: ИПИ ФИЦ ИУ РАН, 2018. Т. 12. Вып. 1. – С. 32–40.
6. АГАСАНДЯН Г.А. *Об особенностях семейств функций рискованных предпочтений для CC-VaR //* Управление большими системами (в печати).
7. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики.* – М.: Наука, 1975. –750 с. (Перевод с англ.: Cramer. H. *Mathematical methods of statistics.* – Princeton University Press, 1946.)

CONTINUOUS VAR-CRITERION AND INVESTOR'S OPTIMAL PORTFOLIO

Gennady A. Agasandyan, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Doctor of Science, leading fellow (Moscow, Chertanovskaya st., 34, (495) 313-44-94).

Abstract. The work continues author's investigations connected with correctness conditions ascertained previously for families of risk-preferences functions (r.p.f.) that might be used in financial markets in problems of optimization on continuous VaR-criterion (CC-VaR). These conditions were used in analyzing an example of families deduced from the super-family of piecewise-linear functions by pure analytical means. Numerical methods of checking the correctness of r.p.f.-families that are useful when difficulties arise in analytical investigations are suggested. These methods are based on discrete algorithms of optimization under CC-VaR for scenario markets and solve correctness problems with quite high-degree approximation. Methods are tested on the former super-family and applied to the super-family of the generalized circles. Results demonstrate adequacy and generality of methodology.

Keywords: continuous VaR-criterion, Newman-Pearson procedure, risk-preferences functions (r.p.f.), families and super-families of r.p.f., yield, correct families, volatility.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии
Ерешко Феликс Иванович, 8-910-437-80-87, feresh-
ko@yandex.ru
Поступила в редакцию
Опубликована*